"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材配套教辅

《大学物理（第三版）》学习指导与题解

康 颖 主编

科学出版社

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材配套教辅

《大学物理(第三版)》学习指导与题解

康　颖　主编

李定国　陈　聪　史祥蓉　鄢红春　姚陆锋　樊　洋　等　编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是与康颖教授主编的“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材《大学物理(第三版)》配套的学习辅导书，包括力学、振动与波、热学、电磁学、光学、狭义相对论、量子物理基础等内容. 为了便于学习，各章按基本要求、主要内容、典型例题、习题分析与解答四部分编写. 其中，例题具有一定的代表性和示范性，注重分析和启发；习题难易层次分明，涵盖知识点全面. 本书给出了教材中全部习题的解答，解题过程思路清晰，方法简捷，语言流畅，易读易懂.

本书适用于高等院校工科各专业、理科非物理类专业、军队院校合训和非合训专业等，也可供自学者使用.

图书在版编目(CIP)数据

《大学物理(第三版)》学习指导与题解/康颖主编. —北京：科学出版社，2015.12

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材配套教辅

ISBN 978-7-03-046365-4

Ⅰ.①大… Ⅱ.①康… Ⅲ.①物理学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 269936 号

责任编辑：昌 盛 罗 吉/责任校对：张凤琴

责任印制：霍 兵/封面设计：迷底书装

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

大厂书文印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015 年 12 月第 一 版 开本：720×1000 1/16

2015 年 12 月第一次印刷 印张：18 1/2

字数：373 000

定价：35.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

大学物理是一门重要的基础课. 大学物理课程所讲授的基本概念、基本理论和基本方法是构成学生科学素养的重要组成部分,是一个科学工作者和工程技术人员所必备的. 要学好大学物理,除了课堂内的学习和训练外,还要结合教学要求,思考和求解一定数量的习题,这是学习过程中不可缺少的重要环节. 这样做对理解基本规律、掌握科学方法、拓宽知识面、增强分析问题和解决问题的能力等都是十分有益的.

本书是与康颖教授主编的"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材《大学物理(第三版)》配套的学习辅导书. 为了便于学习,各章按基本要求、主要内容、典型例题、习题分析与解答四部分编写. 其中典型例题 76 道,具有一定的代表性和示范性,求解过程注重分析和启发,部分例题还给出了多种解法;习题 543 道,含选择、填空、问答、计算等多种类型,具有一定的典型性和综合性,并且难易层次分明,涵盖知识点全面. 本书给出了教材中全部习题的解答,解题过程思路清晰,方法简捷,语言流畅,易读易懂. 为了突出思路,有些习题略去了中间具体数字的计算过程. 为了引起读者对矢量的关注,书中矢量一律采用箭头标记. 建议读者在使用本书时,先自己解题,再和题解比较,进行分析,这样做收获会更大. 希望本书对读者学习大学物理有较大的帮助.

本书是在康颖教授主编的《大学物理(第二版)学习指导与题解》的基础上进行修订的. 原书由康颖、李定国、陈聪、史祥蓉、鄢红春、刘华波、秦国斌等编写,本书由康颖、李定国、陈聪、史祥蓉、鄢红春、姚陆锋、樊洋等修订,最后由康颖统稿和定稿.

在本书的编写和修订过程中,得到许多老师的支持和帮助,在此一并表示感谢!

由于编者水平所限和编写时间仓促,书中错误和疏漏在所难免,恳请读者不吝指正.

编　者

2015 年 9 月

目　　录

第 1 章　质点运动的描述

基本要求

1. 掌握用位置、速度、加速度等物理量描述质点运动的方法，理解这些物理量的矢量性、瞬时性和相对性；能借助直角坐标系，熟练运用微积分知识求解简单的运动学问题.

2. 理解自然坐标描述法和圆周运动的角量描述法，掌握两种描述之间的关系，理解切向加速度和法向加速度的概念.

3. 理解伽利略速度变换式，并会用于求解简单的相对运动问题.

一、主要内容

1. 质点运动的描述

描述运动首先要确定参考系，要定量描述运动，还要在参考系上建立坐标系.

(1) 直角坐标描述

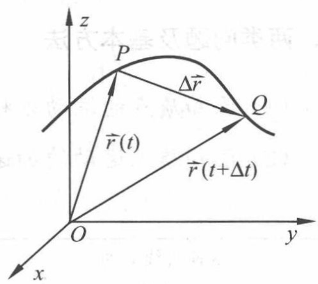


图 1.1

位置矢量：　$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

运动方程：

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

分量式：

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

轨道方程：　分量式消去 t 即得.

位移矢量：

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$$

速度矢量：　$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\vec{i} + \dfrac{dy}{dt}\vec{j} + \dfrac{dz}{dt}\vec{k}$

加速度矢量：　$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dfrac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \dfrac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \dfrac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$

$\vec{a}$ 的方向总是指向曲线的凹侧. $\vec{a}$ 与 $\vec{v}$ 成锐角时，速率增大；$\vec{a}$ 与 $\vec{v}$ 成钝角时，速率减小；$\vec{a}$ 与 $\vec{v}$ 垂直时，速率不变. $\vec{a}$ 等于恒矢量的运动称为匀变速运动.

(2) 自然坐标描述

运动方程：　$s = s(t)$

速度： $v=\dfrac{ds}{dt}$

加速度： $\vec{a}=\vec{a}_\tau+\vec{a}_n=a_\tau\vec{\tau}+a_n\vec{n}$

$$a_\tau=\frac{dv}{dt},\quad a_n=\frac{v^2}{\rho}$$

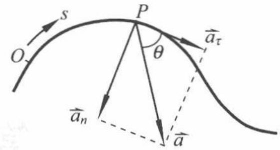


图 1.2

切向加速度 a_τ 反映速度大小变化；法向加速度 a_n 反映速度方向变化.

(3) 角量描述(圆周运动)

运动方程： $\theta=\theta(t)$

角速度： $\omega=\dfrac{d\theta}{dt}$

角加速度： $\beta=\dfrac{d\omega}{dt}=\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

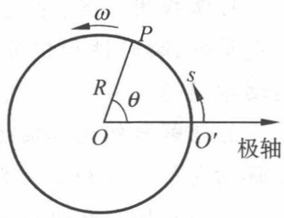


图 1.3

角量描述与线量描述的关系：

$$s(t)=R\theta(t),\qquad v=R\omega,\quad a_\tau=R\beta,\quad a_n=\frac{v^2}{R}=R\omega^2$$

2. 相对运动

伽利略速度变换： $\vec{v}_{AS}=\vec{v}_{AS'}+\vec{v}_{S'S}$

3. 两类问题及基本方法

(1) 已知质点的运动方程，求任意时刻的速度和加速度，用求导法.

(2) 已知质点运动的加速度(或速度)及初始状态，求运动方程，用积分法.

典型运动公式对比表

匀变速直线运动 (a =常量)	匀变速圆周运动 (β=常量)	抛体运动 ($\vec{a}=\vec{g}$=常矢量)
$v=v_0+at$	$\omega=\omega_0+\beta t$	$\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{g}t$
$x-x_0=v_0t+\frac{1}{2}at^2$	$\theta-\theta_0=\omega_0t+\frac{1}{2}\beta t^2$	$\vec{r}-\vec{r}_0=\vec{v}_0t+\frac{1}{2}\vec{g}t^2$
$v^2=v_0^2+2a(x-x_0)$	$\omega^2=\omega_0^2+2\beta(\theta-\theta_0)$	常分解为两个直线运动求解

二、典型例题

例 1.1 一质点沿半径为 R 的两个半圆弧轨道从 O 点经 A、B、C 点运动到 D 点，并保持速率 v 不变，如图所示. 试求质点(1)在 O、A、D 点的位置矢量和速度矢量；(2)从 O 点到 D 点的路程和位移；(3)从 O 点到 A 点的平均速度和平均加速度；

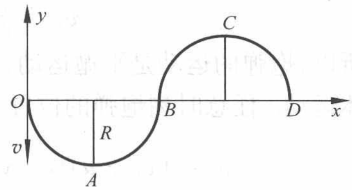
(4)在A点和D点的加速度.

解　(1) O、A、D三点的坐标分别为$(0,0)$、$(R,-R)$、$(4R,0)$,所以位置矢量分别为

$$\vec{r}_O=0,\quad \vec{r}_A=R\vec{i}-R\vec{j},\quad \vec{r}_D=4R\vec{i}$$

速度矢量为

$$\vec{v}_O=-v\vec{j},\quad \vec{v}_A=v\vec{i},\quad \vec{v}_D=-v\vec{j}$$



例1.1图

(2) 从O到D的路程$S_{OD}=2\pi R$,位移为

$$\Delta\vec{r}_{OD}=\vec{r}_D-\vec{r}_O=4R\vec{i}$$

(3) 从O到A的平均速度和平均加速度为

$$\overline{\vec{v}}_{OA}=\frac{\vec{r}_A-\vec{r}_O}{t_A-t_O}=\frac{R\vec{i}-R\vec{j}}{\pi R/(2v)}=\frac{2v}{\pi}(\vec{i}-\vec{j})$$

$$\overline{\vec{a}}_{OA}=\frac{\vec{v}_A-\vec{v}_O}{t_A-t_O}=\frac{v\vec{i}-(-v\vec{j})}{\pi R/(2v)}=\frac{2v^2}{\pi R}(\vec{i}+\vec{j})$$

(4) 因为速率不变,只有法向加速度,所以在A点和D点的加速度为

$$\vec{a}_A=\frac{v^2}{R}\vec{j},\ \cdot\ \vec{a}_D=-\frac{v^2}{R}\vec{i}$$

说明　从O到D的位移大小$4R$显然与路程$2\pi R$不相等,这是因为位移的大小等于始末位置间的直线距离,而路程则是实际路径的长度.平均速度和平均加速度都与所取的时间段有关,一般与速度和加速度不等.

例1.2　一艘正在沿直线行驶的小艇,在发动机关闭后,其加速度大小与速度平方成正比(比例系数为k)而方向相反.设发动机关闭时小艇的速度为v_0,试求在关闭发动机后小艇又行驶x距离时的速度.

解　依题意,$a=-kv^2$,按速度和加速度的定义,并做变量替换有

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-kv^2$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{v}=-k\mathrm{d}x$$

积分可得小艇行驶x距离时的速度

$$\int_{v_0}^{v}\frac{1}{v}\mathrm{d}v=-\int_0^x k\mathrm{d}x$$

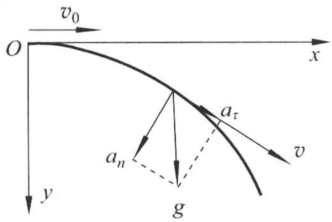
$$\ln\frac{v}{v_0}=-kx,\quad v=v_0\mathrm{e}^{-kx}$$

例1.3　在水平飞行的飞机上向前发射一颗炮弹,炮弹相对飞机的出口速度大小为v_1,飞机速度大小为u.如图所示,以地面为参考系(发射点为坐标原点,x轴沿速度方向向前,y轴竖直向下),略去空气阻力,试求:(1)炮弹运动的轨道方程;(2)t时刻加速度的切向分量、法向分量和曲率半径.

解　(1) 依题意，炮弹相对地面的初速度为

$$\vec{v}_0=\vec{v}_{弹对机}+\vec{v}_{机对地}=(v_1+u)\vec{i}$$

所以，炮弹的运动是平抛运动，可分解为水平方向的匀速运动和竖直方向的自由落体运动. 任意时刻炮弹的位置为



例 1.3 图

$$x=(v_1+u)t,\quad y=\frac{1}{2}gt^2$$

将以上两式消去 t 即得轨道方程

$$y=\frac{g}{2(v_1+u)^2}x^2$$

(2) t 时刻的速度为

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(v_1+u),\quad v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=gt$$

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{(v_1+u)^2+g^2t^2}$$

炮弹运动的加速度为 $\vec{g}$，其切向分量和法向分量分别为

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{g^2t}{\sqrt{(v_1+u)^2+g^2t^2}}$$

$$a_n=\sqrt{g^2-a_\tau^2}=\frac{g(v_1+u)}{\sqrt{(v_1+u)^2+g^2t^2}}$$

由 $a_n=v^2/\rho$ 可得曲率半径

$$\rho=\frac{v^2}{a_n}=\frac{[(v_1+u)^2+g^2t^2]^{3/2}}{g(v_1+u)}$$

例 1.4　一质点沿圆周运动，半径 $R=1$ m，速度按 $v=(3t^2+1)$(SI)变化. 试求从 $t=0$ 到 $v=4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 时质点对圆心转过的角度和通过的路程.

解　当 $v=(3t^2+1)=4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 时，$t=1$ s.

利用角速度的定义 $\omega=\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ 及速度与角速度的关系 $v=R\omega$，有

$$\mathrm{d}\theta=\omega\mathrm{d}t=\frac{v}{R}\mathrm{d}t$$

对上式积分，可得质点在 0～1s 时间内转过的角度

$$\theta=\int_0^\theta \mathrm{d}\theta=\int_0^t\frac{v}{R}\mathrm{d}t=\int_0^1(3t^2+1)\mathrm{d}t=2\ \mathrm{rad}=114°35'$$

该时间内质点通过的路程为

$$s=R\theta=1\ \mathrm{m}\times 2\ \mathrm{rad}=2\ \mathrm{m}$$

说明　由 $v=(3t^2+1)>0$ 可知，质点沿圆周运动时只进不退. 若取 $t=0$ 时质点的自然坐标为 0，则 t 时刻自然坐标 s 的量值等于 $0\sim t$ 时间内质点通过的路程，所以路程 s 也可由 $v\mathrm{d}t$ 积分求得.

三、习题分析与解答

(一) 选择题和填空题

1.1　以下说法哪些是正确的?[　　]

(A) 质点沿直线前进时,若减小向前的加速度,则前进的速度也随之减小.

(B) 质点的加速度值很大,而速度的值可以不变,这是不可能的.

(C) 质点的速度方向恒定,其加速度的方向可能不断变化.

(D) 质点运动的速率恒定,其速度可能变化.

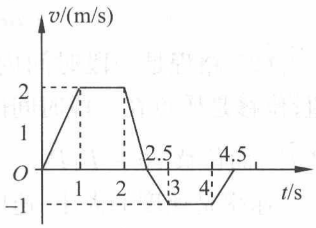
1.2　一质点在平面上的运动方程为 $\vec{r}=at^2\vec{i}+bt^2\vec{j}$($a$、$b$ 为常量),则该质点做[　　]

(A) 匀速直线运动.　　(B) 变速直线运动.

(C) 抛物线运动.　　(D) 一般曲线运动.

1.3　一质点沿 x 轴运动,其 v-t 曲线如图所示.若 $t=0$ 时,质点位于坐标原点,则 $t=4.5$s 时,质点的位置坐标为[　　]

(A) 5 m.(B) 2 m.(C) −5 m.(D) −2 m.



题 1.3 图

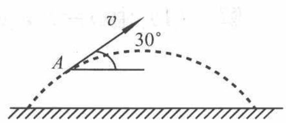
1.4　某人骑自行车以速率 v 向西行驶,今有风以相同速率从北偏东 30°方向吹来,试问:人感到风从哪个方向吹来?[　　]

(A) 北偏东 30°.　(B) 南偏东 30°.　(C) 北偏西 30°.　(D) 西偏南 30°.

1.5　一质点沿直线运动,其运动方程为 $x=(6t-t^2)$SI,在 t 由 0 至 4 s 的时间间隔内,质点的位移大小为______,该时间间隔内质点走过的路程为______.

1.6　一质点沿 x 方向运动,其加速度随时间变化关系为 $a=(3+2t)$SI.如果初始时质点的速度 $v_0=5$ m/s,则当 $t=3$ s 时,质点的速度 $v=$________.

1.7　一物体做如图所示的斜抛运动,测得在轨道 A 点处速度大小为 v,其方向与水平方向夹角为 30°,则物体在 A 点的切向加速度 $a_\tau=$________,轨道的曲率半径 $\rho=$________.



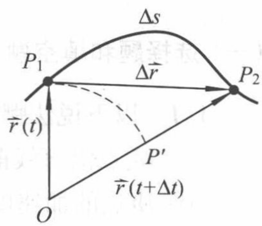
题 1.7 图

1.8　一质点沿半径为 R 的圆周运动,在 $t=0$ 时经过 P 点,此后其速率按 $v=A+Bt$ 变化(A、B 为正的已知常量),则质点沿圆周运动一周再经过 P 点时的切向加速度 $a_\tau=$________,法向加速度 $a_n=$________.

答案　**1.1** (C)、(D);　**1.2** (B);　**1.3** (B);　**1.4** (C).　**1.5**　8 m,10 m;　**1.6**　23 m·s^{-1};　**1.7**　$-g/2$, $2\sqrt{3}v^2/(3g)$;　**1.8**　B, $A^2/R+4\pi B$.

(二) 问答题和计算题

1.9 下列各量有何区别?



题 1.9 图

(1) $\Delta\vec{r}$ 和 Δr;$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$和$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.

(2) 路程和位移;速度和速率.

答 (1) $\Delta\vec{r}$ 是 Δt 时间内位矢 $\vec{r}$ 的增量,即位移;Δr 则是 Δt 时间内位矢 $\vec{r}$ 大小的增量. 题 1.9 图中 $\Delta\vec{r}=\overrightarrow{P_1P_2}$,而 $\Delta r=\overline{P'P_2}$.

$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$是加速度,而$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$是加速度的切向分量,两者关系为

$$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right|=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}\geqslant\left|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|$$

(2) 路程是一段时间内质点在运动轨道上实际路径的长度,是标量,不取负值;位移是质点在一段时间内由起点指向终点的有向线段,是矢量. 图中路程$\Delta s=\overset{\frown}{P_1P_2}$,而位移 $\Delta\vec{r}=\overrightarrow{P_1P_2}$.

速率是速度的大小. 速度是矢量,速率是标量,且不取负值.

1.10 斜上抛物体在轨道上哪一点法向加速度最大? 哪一点曲率半径最小?

解 斜上抛物体在轨道上任一点的法向加速度大小为 $a_n=g\cos\theta$,θ 是物体运动到该点时速度方向与水平方向的夹角. 在轨道最高点处 $\theta=0$,此处法向加速度为最大. 由 $a_n=v^2/\rho=g\cos\theta$,得曲率半径 $\rho=v^2/(g\cos\theta)$. 斜抛体在最高点处速率最小而 $\cos\theta$ 最大,所以轨道最高点处的曲率半径最小.

1.11 一质点在 Oxy 平面内,依照 $x=t^2$ 的规律沿曲线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 运动. 式中 x、y 以米计,t 以秒计. 试求:(1)该质点的运动方程;(2)从第 2s 末到第 4s 末,质点的平均速度和平均加速度的大小和方向.

解 (1) 由 $x=t^2$, $y=\frac{1}{4}x^2=\frac{1}{4}t^4$,可得质点的运动方程

$$\vec{r}=(t^2\vec{i}+\frac{1}{4}t^4\vec{j})\ \mathrm{m}$$

(2) 从第 2s 末到第 4s 末,质点运动的平均速度

$$\overline{\vec{v}}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\vec{r}_4-\vec{r}_2}{4-2}=(6\vec{i}+30\vec{j})\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

平均速度的大小为

$$|\overline{\vec{v}}|=\sqrt{6^2+30^2}=30.6(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

平均速度的方向与 x 轴正向的夹角为

$$\alpha = \arctan(\frac{30}{6}) = \arctan5 = 78°41'$$

质点在任意时刻的速度

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (2t\vec{i} + t^3\vec{j})\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

从第 2s 末到第 4s 末，质点运动的平均加速度

$$\overline{\vec{a}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_4 - \vec{v}_2}{4-2} = (2\vec{i} + 28\vec{j})\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

平均加速度的大小为

$$|\overline{\vec{a}}| = \sqrt{2^2 + 28^2} = 28.1\ (\text{m}\cdot\text{s}^{-2})$$

平均加速度的方向与 x 轴正向的夹角为

$$\beta = \arctan(\frac{28}{2}) = \arctan14 = 85°54'$$

1.12　质点在 Oxy 平面内运动,其运动方程为 $\vec{r} = a\cos\omega t\vec{i} + b\sin\omega t\vec{j}$,其中 a、b、ω 均为大于零的常量.(1) 试求质点在任意时刻的速度;(2) 证明质点运动的轨道为椭圆;(3) 证明质点的加速度恒指向椭圆中心.

解　(1) 速度为

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -a\omega\sin\omega t\vec{i} + b\omega\cos\omega t\vec{j}$$

(2) 由 $x = a\cos\omega t$ 和 $y = b\sin\omega t$ 消去 t 得轨道方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

此为椭圆方程,表明质点做椭圆运动.

(3) 加速度为

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\omega^2(a\cos\omega t\vec{i} + b\sin\omega t\vec{j}) = -\omega^2\vec{r}$$

因 $\omega^2 > 0$,所以 $\vec{a}$ 的方向恒与 $\vec{r}$ 相反,即 $\vec{a}$ 恒指向椭圆中心.

1.13　质点的运动方程为 $x = -10t + 30t^2$ 和 $y = 15t - 20t^2$,式中 x、y 以米计,t 以秒计.试求:(1) 初速度的大小和方向;(2) 加速度的大小和方向.

解　(1) 速度为

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -10 + 60t,\quad v_y = \frac{dy}{dt} = 15 - 40t$$

由 $t=0$ 得初速度 $v_{0x} = -10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$,$v_{0y} = 15\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.初速度大小为

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = 18.0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

由 v_{0x} 和 v_{0y} 的正负可知,$\vec{v}_0$ 与 x 轴正向夹角为第二象限的角,其值为

$$\alpha = \pi - \arctan\left(\frac{15}{10}\right) = 123°42'$$

(2) 加速度为

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 60\ \mathrm{m \cdot s^{-2}},\quad a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -40\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 72.1\mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

由 a_{0x} 和 a_{0y} 的正负可知,$\vec{a}$ 与 x 轴正向夹角为第四象限的角,其值为

$$\beta = \arctan\frac{a_y}{a_x} = \arctan\left(-\frac{2}{3}\right) = -33°41'$$

1.14 由静止从原点出发的质点的加速度在 Ox 轴和 Oy 轴上的分量分别为 $a_x = 10t$ 和 $a_y = 5t^2$,式中各量均采用 SI 单位. 求 $t = 5$ s 时质点的速度矢量和位置矢量.

解 初始条件为 $v_{0x} = v_{0y} = 0, x_0 = y_0 = 0$. 据 $a_x = \mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t = 10t$ 有

$$\int_0^{v_x} \mathrm{d}v_x = \int_0^t 10t\mathrm{d}t,\quad v_x = 5t^2(\mathrm{m \cdot s^{-1}})$$

据 $a_y = \mathrm{d}v_y/\mathrm{d}t = 5t^2$ 有

$$\int_0^{v_y} \mathrm{d}v_y = \int_0^t 5t^2\mathrm{d}t,\quad v_y = \frac{5}{3}t^3(\mathrm{SI})$$

所以

$$\vec{v} = \left(5t^2\vec{i} + \frac{5}{3}t^3\vec{j}\right)(\mathrm{SI})$$

$t = 5$ s 时,由上式得

$$\vec{v}_5 = \left(125\vec{i} + \frac{625}{3}\vec{j}\right)(\mathrm{m \cdot s^{-1}})$$

据 $v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 5t^2$ 和 $v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{5}{3}t^3$,经积分后可得位矢为

$$\vec{r} = \left(\frac{5}{3}t^3\vec{i} + \frac{5}{12}t^4\vec{j}\right)(\mathrm{SI})$$

$t = 5$ s 时,位矢为

$$\vec{r}_5 = \left(\frac{625}{3}\vec{i} + \frac{3125}{12}\vec{j}\right)\ \mathrm{m}$$

1.15 一质点沿 Ox 轴运动,其加速度与速度成正比,比例系数为 k,加速度的方向与运动方向相反. 设初始坐标为 x_0,初始速度为 v_0,试求质点的速度表达式和运动方程.

解 依题意 $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = -kv$,分离变量,并根据初始条件两边积分

$$\int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{v} = -k\int_0^t \mathrm{d}t$$

可得速度表达式为

$$v = v_0\mathrm{e}^{-kt}$$

由速度定义 $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$,并根据初始条件,有

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x = \int_0^t v\mathrm{d}t = v_0\int_0^t \mathrm{e}^{-kt}\mathrm{d}t$$

可得运动方程为

$$x = x_0 + \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt})$$

1.16　有一开始静止于 x_0 处的质点，以加速度 $a=-k/x^2$ 沿 Ox 轴负方向运动，k 为正值常量. 求质点的速度与其位置坐标间的关系.

解　由 $a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}=-\frac{k}{x^2}$，得

$$\int_0^v v\mathrm{d}v = -k\int_{x_0}^x \frac{\mathrm{d}x}{x^2},\quad v^2 = 2k\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right)$$

因质点向 x 轴负方向运动，所以有

$$v = -\sqrt{2k\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right)}$$

讨论　本题若 $x_0>0$，则在由 x 轴正的一侧向原点($x=0$)运动时，加速度和速度都将趋于负无穷大，但又不能通过原点，因为一旦通过原点后，$x<0$，上式根号中为负数而无解，这种情况是不合理的. 所以，本题只存在 $x_0<0$，即质点从 x 轴负的一侧由静止开始向负方向运动才是合理的.

1.17　由长为 l 的刚性细杆相连的两个物体 A、B 可以在光滑轨道上滑行，如图所示. 如物体 A 以恒定的速率 v 向左滑行，当 $\alpha=60°$时，求物体 B 的速度.

解　坐标系如图. 物体 A 的速度为

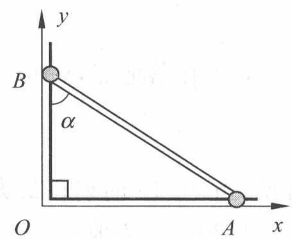
$$\vec{v}_A = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} = -v\vec{i}$$

物体 B 的速度为

$$\vec{v}_B = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j}$$

由 $x^2+y^2=l^2$，得

$$2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\frac{x}{y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$



题 1.17 图

将$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-v$，$\tan\alpha=\frac{x}{y}$代入上式，即得

$$\vec{v}_B = v\tan\alpha\vec{j}$$

当 $\alpha=60°$时，物体 B 的速度大小 $v_B=\sqrt{3}v$，方向向上.

1.18　一小球沿斜面向上运动，其运动方程为 $s=5+4t-t^2$，式中 s 以米计，t 以秒计. 试求：(1) 小球运动到最高点的时刻；(2) 从 $t=0$ 到小球运动到最高点这段时间内的位移大小.

解　(1) 小球速度为

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 4-2t$$

到达最高点时 $v=0$，代入得 $t=2$ s.

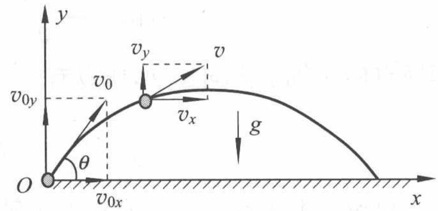
(2) 因为前 2 s 内 $v\geqslant 0$，表明前 2 s 内小球沿斜面向上做单方向运动. $t=0$ 时 $s_0=5$ m，$t=2$ s 时，$s=9$ m，所以位移大小为

$$\Delta s = s - s_0 = 4\ \mathrm{m}$$

1.19 在竖直平面内以初速 $\vec{v}_0$ 抛出一个小球,抛射角为 θ. 忽略空气阻力,试求:(1) 小球运动的轨道方程;(2)小球所能达到的最大高度(射高);(3)小球落地点与抛出点之间的距离(射程);θ 为何值时射程最大?

解 (1) 以抛出点为原点建立如图所示的坐标系,则 x 方向为匀速运动,y 方向为匀变速运动. 速度分量式为

$$\begin{cases} v_x = v_0\cos\theta & ① \\ v_y = v_0\sin\theta - gt & ② \end{cases}$$



题 1.19 图

运动方程分量式为

$$\begin{cases} x = (v_0\cos\theta)t & ③ \\ y = (v_0\sin\theta)t - \dfrac{1}{2}gt^2 & ④ \end{cases}$$

消去 t,得小球运动的轨道方程

$$y = x\tan\theta - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2$$

上式表明,在忽略空气阻力的情况下,抛体运动的轨迹是一条抛物线.

(2) 在最高点,$v_y=0$, 由式②,有 $t=v_0\sin\theta/g$,代入式④,得到射高

$$H = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}$$

(3) 在落地点,$y=0$,由式④,有 $t=2v_0\sin\theta/g$,代入式③,可得射程

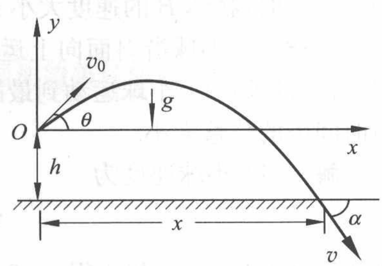
$$R = \frac{v_0^2\sin 2\theta}{g}$$

可见,当 $\theta=45°$时射程最大,其值为 $R_m = v_0{}^2/g$.

1.20 从离地 $h=8.0$ m 的高地,以抛射角 $\theta=30°$、初速 $v_0=10\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 抛出一个小球,(1) 问小球在何时何处落地?(2) 求小球落地时速度的大小和方向.(取 $g=10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$)

解 (1) 以抛出点为原点建立如图所示的坐标系,则 x 方向为匀速运动,y 方向为匀变速运动. 有

$$\begin{cases} x = (v_0\cos\theta)t \\ y = (v_0\sin\theta)t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad ①$$



题 1.20 图

以上两式消去 t 得轨道方程

$$y = x\tan\theta - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2 \quad ②$$

在落地点,$y=-8.0$ m, 又 $\theta=30°$, $v_0=10\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $g=10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$,代入式②,解得

$x = 16.1$ m (负值已舍去)

由式①得到小球落地时刻为

$$t=\frac{x}{v_0\cos\theta}=\frac{16.1}{10\times\cos30^\circ}=1.86\ (\mathrm{s})$$

所以,小球在抛出后 1.86 s 落在距抛出点水平距离 16.1 m 处.

(2) 在小球落地时刻,由速度分量式可得

$$v_x=v_0\cos\theta=10\times\cos30^\circ=8.66\ (\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

$$v_y=v_0\sin\theta-gt=10\times\sin30^\circ-10\times1.86=-13.6\ (\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

所以,小球落地速度 $\vec{v}$ 的大小为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=16.1\ (\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

$\vec{v}$ 与水平方向的夹角为

$$\alpha=\arctan\frac{v_y}{v_x}=\arctan\left(\frac{-13.6}{8.66}\right)=-57^\circ30'$$

1.21　升降机以加速度 a 上升时,一螺钉从它的天花板上脱落.如升降机的天花板与其底面的距离为 H,求:(1) 螺钉从天花板落到底面所需的时间;(2) 螺钉相对升降机外固定柱子的下落距离(设螺钉离开天花板时的速率为 v_0).

解　如图所示,图(a)、(b)分别表示螺钉开始脱落和落至底面时的情况,y 轴的原点取在螺钉开始脱落时升降机的底面处.

(1) 螺钉脱落后对地的运动方程为

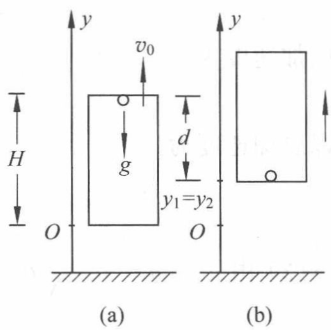
$$y_1=H+v_0t-\frac{1}{2}gt^2$$

升降机底面对地的运动方程为

$$y_2=v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

当螺钉落至底面时,有 $y_1=y_2$,代入上两式得螺钉下落时间为

$$t=\sqrt{\frac{2H}{g+a}}$$



题 1.21 图

(2) 由图(b)知螺钉相对于 Oy 轴或机外固定柱子的下落距离为

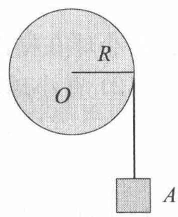
$$d=H-y_1=-v_0t+\frac{1}{2}gt^2$$

将 t 值代入得

$$d=\frac{Hg}{g+a}-v_0\sqrt{\frac{2H}{g+a}}$$

1.22　一个半径 $R=1.0$ m 的圆盘,可绕水平轴 O 自由转动.一根轻绳绕在盘子的边缘,其自由端拴一物体 A,如图所示.在重力作用下,物体 A 从静止开始匀加速地下降,在 $\Delta t=2.0$ s 内下降的距离 $h=0.4$ m.求物体开始下降后 3.0 s,边缘上任一点的切向加速度与法向加速度.

解　设 A 下降的加速度为 a_A，有 $h=\frac{1}{2}a_A\Delta t^2$，则在 3 s 末圆盘边缘任一点的切向加速度为



题 1.22 图

$$a_\tau=a_A=\frac{2h}{\Delta t^2}=\frac{2\times 0.4}{2.0^2}=0.2(\mathrm{m\cdot s^{-2}})$$

该时刻边缘上任一点的速率为

$$v=a_At=0.2\times 3.0=0.6(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

法向加速度为

$$a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{0.6^2}{1.0}=0.36(\mathrm{m\cdot s^{-2}})$$

1.23　一质点沿半径为 R 的圆周按规律 $s=v_0t-\frac{1}{2}bt^2$ 运动，v_0、b 是正值常量. 求：(1) 在时刻 t 质点的总加速度；(2) t 为何值时，总加速度的大小等于 b；(3) 当总加速度的大小为 b 时，质点沿圆周运行的圈数.

解　(1) 由运动方程得速度为

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v_0-bt \tag{①}$$

切向加速度为

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-b$$

法向加速度为

$$a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(v_0-bt)^2}{R}$$

所以总加速度为

$$\vec{a}=-b\vec{\tau}+\frac{(v_0-bt)^2}{R}\vec{n} \tag{②}$$

(2) 由 $a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=\sqrt{b^2+\frac{(v_0-bt)^4}{R^2}}=b$ 得

$$t=\frac{v_0}{b}$$

(3) 此时 $t=v_0/b$，代入式①知此时 $v=0$. 当 $t>v_0/b$ 时，$v<0$，质点将往回运动，而 $t<v_0/b$ 时，$v>0$. 所以在 $t=v_0/b$ 前，质点做单方向圆周运动，走过的路程为

$$s=\frac{v_0^2}{b}-\frac{v_0^2}{2b}=\frac{v_0^2}{2b}$$

转过的圈数则为

$$n=\frac{s}{2\pi R}=\frac{v_0^2}{4\pi Rb}$$

1.24　距河岸(看成直线)500 m 处有一艘静止的船，船上的探照灯以每分钟 1 转的转速转动. 当光束与岸边成 60°角时，求光束沿岸边移动的速率.