《著名重点中学各科学习指导与测试》

初二代数

（第三册）

潘慰高　主编

覃近文　周晓南　编

南京大学出版社

初二代数

主编　潘慰高
编者　覃近文
　　　周晓南

南京大学出版社
1996·南京

著名重点中学各科学习指导与测试
初　二　代　数

潘慰高　覃近文　周晓南 编

*

南京大学出版社出版
(南京大学校内　邮编 210093)
江苏省新华书店发行　　丹阳兴华印刷厂印刷

*

开本 787×1092　1/32　印张 5.5　字数 121 千
1994 年 5 月第 1 版　　1996 年 5 月第 3 次印刷
印数 14151—24150
ISBN 7-305-02212-8/O·140
定价 4.40 元
(南大版图书若有印、装错误可向承印厂退换)

出版说明

为了帮助中学生学好基础知识，掌握基本的技能技巧，训练思维方法，提高解题能力，我社组织了南京师范大学附中、金陵中学等著名重点中学的特级教师、高级教师，编写了这套“著名重点中学各科学习指导与测试”丛书，它包括初高中语文、英语、数学、物理、化学五个学科。

本丛书紧扣教材，每一节分三个部分：第一部分为知识要点，提纲挈领，突出重点要点，对复习起指导作用；第二部分为学习指导，通过典型例题的分析评述，着重指导解题的思想与方法，提高解题的技能技巧，加强对基础知识和基本技能的训练，以提高学生解题的自觉性、科学性、技巧性；第三部分为练习与测试，供学生用以训练，巩固和提高基本知识，基本技能和基本方法。

本丛书的作者们有厚实的业务基础，丰富的教学经验，培养了一批又一批基础扎实、思维敏捷、作风过硬、能力卓著的优秀学生，在国内享有较高声誉。本丛书是他们数十年经验的总结，智慧的结晶，相信本丛书是广大中学生的良师益友，对指导学习、锻炼思维、提高分析解题能力，掌握基本的知识体系是大有裨益的。

南京大学出版社

目　录

第九章 数的开方

一、平方根、算术平方根

(一) 知识要点

1．平方根定义：如果一个数的平方等于 a，这个数就叫做 a 的平方根．一个非负数 a 的平方根记作 $\pm\sqrt{a}$ $(a\geqslant 0)$．

2．平方根的性质：一个正数有两个平方根，且它们互为相反数；负数没有平方根；零的平方根是零．

3．开平方：求一个数 a 的平方根的运算叫做开平方．开平方与平方互为逆运算．

4．算术平方根：正数 a 的正的平方根，叫做 a 的算术平方根；零的算术平方根是零．一个非负数 a 的算术平方根记作 $\sqrt{a}$ $(a\geqslant 0)$．

(二) 学习指导

1．负数没有平方根

对这个平方根的重要性质，只要从数的平方结果去观察就容易理解了．

如：$\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$, $0.5^2=0.25$, $0^2=0$．

显然，任何数的平方都不可能是负数，所以负数不能开平方．即负数没有平方根．想一想 $(-7)^2$ 与 -7^2 有没有平方根，为什么？

解：$\because$ $(-7)^2=49>0$

$\therefore\ (-7)^2$有平方根，它们是±7。

而$-7^2=-49<0$

$\therefore$ 负数-7^2没有平方根。

由上，判断一个数有没有平方根，关键是确定这个数的符号。上例中-7^2是正数$(-7)^2$的相反数，切不可把它与$(-7)^2$混淆起来，而求它的平方根。

2．平方根与算术平方根的关系。

对这个问题，可以从下面两点来理解：

(1) 一个正数a的平方根有两个：$\sqrt{a}$与$-\sqrt{a}$，它们互为相反数。而一个正数的算术平方根只有一个：$\sqrt{a}$。

(2) 一个正数的算术平方根就是这个正数的平方根中那个正的平方根。

因此，平方根与算术平方根是既有区别，又有联系。弄清了它们之间的关系就可以避免混淆这个概念的错误。

例1 判断下面求平方根的解法是否正确。

解 $\because\ (\pm7)^2=49,$

$\therefore$ 49的平方根是±7。

即 $\sqrt{49}=\pm7$。

说明 容易看出，结论中把49的平方根写作$\sqrt{49}=\pm7$是错误的。因为等式左边的$\sqrt{49}$表示49的算术平方根，而右边的±7表示49的平方根。错误原因是把一个数的平方根和算术平方根等同起来。正确写法是：$\pm\sqrt{49}=\pm7$。

例2 求$\frac{1}{3}x^2-27=0$中的x。

解 整理得$\frac{1}{3}x^2=27$， **解** 整理得$\frac{1}{3}x^2=27$，

$\therefore\ x^2=81,$ $\therefore\ x^2=81,$

∴ $x=\sqrt{81}$　　　　　　而$(\pm 9)^2=81$，

即 $x=9$。　　　　　　　∴ $x=\pm\sqrt{81}=\pm 9$。

错误解法。　　　　　　　正确解法。

同样的，在求$(-5)^2$的平方根时也会出现类似的错误。

如：∵ $(-5)^2=25$，

∴ $(-5)^2$的平方根是-5，

即$\sqrt{(-5)^2}=-5$

要防止在求一个数的平方根时忽略负的（或正的）平方根，除了应加强对相关概念的理解，一般，可把求一个数a的平方根的问题都转化成 $x^2=a$ 的形式。再根据平方根的定义，按照(1)寻找平方等于$a(a\geqslant 0)$的数，以确定a的平方根的值；(2) 用平方根的符号$\pm\sqrt{a}$来表示a的平方根的推理方法去求x，特别要注意，当a是正数时，它的平方根一定有两个，并且其中任何一个正的(或负的)平方根都不能代替a的平方根。

3．明确$\sqrt{a}$的两个重要条件(1) $a\geqslant 0$；(2) $\sqrt{a}\geqslant 0$。

式子$\sqrt{a}$表示数a的算术平方根。由定义可知，正数的正的平方根和零的平方根就是它们的算术平方根。所以，$\sqrt{a}$必须满足$a\geqslant 0$且$\sqrt{a}\geqslant 0$的条件，即一个非负数的非负平方根就是这个数的算术平方根。要注意，这两个非负的条件缺一不可，稍有疏忽，就会导致错误。

例3 求$\sqrt{(-6)^2}+|-6|$的值

解 原式$=-6+6$　　　　**解** 原式$=\sqrt{36}+|-6|$

$=0$。　　　　　　　　　　　$=6+6=12$。

错误解法　　　　　　　　正确解法

应用算术平方根的两个非负条件也可以解决一些典型问题。如：

例 4 已知$\sqrt{2a-1}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}=0$，求 $\frac{a}{b}$的值。

解 由算术平方根的定义得：

$$\sqrt{2a-1}\geqslant 0 \quad 且 \quad \sqrt{b+\frac{1}{4}}\geqslant 0.$$

∴ 当且仅当$\sqrt{2a-1}=0$ 且 $\sqrt{b+\frac{1}{4}}=0$ 时

$$\sqrt{2a-1}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}=0 \text{ 才能成立。}$$

$$\therefore \quad a=\frac{1}{2}, \quad b=-\frac{1}{4},$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b}=\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{4}}=-2.$$

说明 本题应用的推理为 1° 算术平方根的两个非负条件。2° 如果几个非负数之和等于零，那么每个非负数必为零。

（三）测试 9-1 （45 分钟）

一、选择题

1. 由$\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$，可以说

（A）$\frac{1}{4}$是$\frac{1}{16}$的平方根 （B）$\frac{1}{16}$的平方根是$\frac{1}{4}$

（C）$\frac{1}{16}$开平方是$\frac{1}{4}$ （D）$\frac{1}{16}$开平方是$\pm\frac{1}{4}$ [ ]

2. 下列各数没有平方根的是

（A）$(-5)^2$ （B）0

（C）$\left|-\frac{1}{3}\right|$ （D）(-3^2) [ ]

3．下列说法正确的是

（A） -7是$(-7)^2$的算术平方根

（B） 8 的平方根是± 4

（C） $-\frac{1}{3}$是$\frac{1}{9}$的一个平方根

（D） a^2 的算术平方根是 a 【 】

4．下列各式求值正确的是

（A） $\sqrt{3^2}=\pm 3$ （B） $\pm\sqrt{(-4)^2}=\pm 4$

（C） $-\sqrt{(-4)^2}=4$ （D） $\sqrt{-3^2}=-3$ 【 】

5．下列式子：

(1) $\sqrt{(-49)(-1)}=7$ (2) $\sqrt{(-2)^2}=2$

(3) $-\sqrt{\frac{4}{9}}=-\frac{2}{3}$ (4) $(-\sqrt{6})^2=6$

(5) $\pm\sqrt{0.0025}=\pm 0.05$ (6) $\sqrt{m^2}=m(m\geqslant 0)$

其中表示算术平方根的是

（A） (1)(2)(4) （B） (2)(4)(6)

（C） (1)(5)(6) （D） (1)(2)(6) 【 】

6．一个数的算术平方根只要存在，那么

（A） 它只有一个，并且是一个正数

（B） 它一定小于这个数

（C） 它是一个非负数

（D） 它不可能等于这个数 【 】

7．$(-\sqrt{64})^2$ 的算术平方根是

（A） 64 （B） 8 （C） ± 8 （D） ± 64

【 】

8．若 $\sqrt{2a+b^2}+|b^2-7|=0$，那么 a, b 的值分别是

（A） $\frac{7}{2}$, $\sqrt{7}$ （B） $-\frac{7}{2}$, $\sqrt{7}$

(C) $-\frac{7}{2}$, $\pm\sqrt{7}$　　(D) $\frac{7}{2}$, $\pm\sqrt{7}$　[　]

二、填空题

1. 平方得 $\frac{25}{81}$ 的数是____，$\frac{25}{81}$ 开平方得____。

2. $\left|-2\frac{1}{4}\right|$ 的平方根是____，$(-0.3)^2$ 的算术平方根是____，$\sqrt{36}$ 的平方根是____

3. 若 $x^2=(-6)^2$，则 $x=$____，$-\sqrt{(-3)^2}=$____。

4. -10 是数 a 的一个平方根，则 $a=$____。

5. 当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，$\sqrt{x^2}-2x+1=$______；当 $a=5$ 时 $\sqrt{\frac{(4-a)^2}{a-4}}=$____。

6. a 的平方根为____，算术平方根是____，这里 a 的条件是____。

三、判断并求下列各数的平方根、算术平方根

1. $3\frac{6}{25}$；　　2. $\sqrt{41^2-40^2}$；

3. $\left(-\frac{1}{49}\right)^2$　　4. (-20^2)。

四、求下列各式的值

1. $-\sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2}$　　2. $\pm\sqrt{7\frac{21}{25}}$；

3. $\sqrt{-(-13^2)}$；　　4. $\sqrt{117^2-108^2}$。

五、求下列式子中的 x

1．$20-\frac{1}{5}x^2=0$；　　2．$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2=\sqrt{16}$；

3．$7^2+x^2=25^2$；　　4．$(3x-1)^2=30\frac{1}{4}$。

六、选做题

1．若$\sqrt{2a+b}+\sqrt{3-a+4b}=0$，求 $a-b$ 的平方根。

2．如果$|a|+a=0$，化简 $\sqrt{4a^2}$。

二、立方根和 n 次方根

（一）知识要点

1．立方根。

(1) 立方根：如果一个数的立方等于 a，这个数就叫做 a 的立方根。一个数 a 的立方根记作 $\sqrt[3]{a}$。

(2) 开立方：求一个数的立方根的运算叫做开立方。开立方与立方互为逆运算。

(3) 立方根的性质：正数有一个正的立方根；负数有一

个负的立方根;零的立方根仍旧是零。

2. n次方根。

(1) n次方根：如果$x^n=a$(n是大于1的整数)，那么x叫做a的n次方根。

(2) n为偶数时，非负数a的n次方根记作$\pm\sqrt[n]{a}$ $(a\geqslant 0)$ n为奇数时，a的n次方根记作$\sqrt[n]{a}$。

(2) 奇次方根和偶次方根的性质：

正数的奇次方根是一个正数，负数的奇次方根是一个负数。正数的偶次方根有两个，它们互为相反数，负数的偶次方根不存在，零的n次方根仍是零。

(3) n次算术根：正数a的正的n次方根，叫做a的n次算术根；零的n次方根也叫零的n次算术根。一个数a的n次算术根记作$\sqrt[n]{a}$ $(a\geqslant 0)$。

(二) 学习指导

本单元的主要概念与上一单元相关的概念都有类似之处，所以，可采用类比的方法学习和加深理解。

1. 任何数都有立方根，而负数没有平方根。这是开立方与开平方的不同之处。因为负数的立方是一个负数，所以负数的立方根仍是一个负数。

例1 求-64的立方根。

错误解法：$\because$ $-64<0$, $\therefore$ -64没有立方根。

正确解法：$\because$ $(-4)^3=-64$, $\therefore$ -4是-64的立方根。$\therefore$ $\sqrt[3]{-64}=-4$。

2. 任何一个数a都有唯一一个立方根$\sqrt[3]{a}$；并且它与这个数的符号相同。如$\sqrt[3]{27}=3$，$\sqrt[3]{-8}=-2$，这也是奇次方根具有的共性。而一个正数的平方根或偶次方根却有两个，

且互为相反数。如$\pm\sqrt{\frac{1}{25}}=\pm\frac{1}{5}$，$\pm\sqrt[6]{64}=\pm2$。所以，在求一个数(使其开方有意义)的奇次方根和偶次方根时，应注意区别对待。

例 2 求$\frac{1}{64}$的 6 次方根和立方根。

解 $\because\ \left(\pm\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$，$\therefore\ \frac{1}{64}$的 6 次方根是$\pm\frac{1}{2}$。

即 $$\therefore\ \pm\sqrt[6]{\frac{1}{64}}=\pm\frac{1}{2}.$$

(2) $\because\ \left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$，$\therefore\ \frac{1}{4}$是$\frac{1}{64}$的立方根，

即 $$\therefore\ \sqrt[3]{\frac{1}{64}}=\frac{1}{4}.$$

3．求一个数a的n次方根时，应特别注意：(1) 当n为奇数时，被开方数a可以是任何数。特别当$a>0$时，正数a的奇次方根同时也是a的奇次算术根。如$\sqrt[5]{4}$表示 4 的 5 次方根，也是 4 的 5 次算术根。(2) 当n为偶数时，仅当被开方数$a\geqslant0$时，$\sqrt[n]{a}$才有意义。特别当$a>0$时，a的偶次方根$\pm\sqrt[n]{a}$中的$\sqrt[n]{a}$是a的n次算术根。如±3是 81 的四次方根，其中 3 是 81 的四次算术根。

例 3 判断下列各式：

(1) $\pm\sqrt[4]{\left(-\frac{1}{9}\right)^2}$，　(2) $\sqrt[5]{-24}$；　(3) $\sqrt[3]{0}$；

(4) $\sqrt[6]{(-2^2)}$；　(5) $\sqrt[8]{(-3)^2}$。

是否有意义？是否表示算术根？

解 (1) $\because\ \left(-\frac{1}{9}\right)^2>0$，$\therefore\ \pm\sqrt[4]{\left(-\frac{1}{9}\right)^2}$有意义，

它表示$\left(-\frac{1}{9}\right)^2$的四次方根。

(2) $\because$ $n=5$是奇数， $\therefore$ $\sqrt[5]{-24}$有意义，

它表示-24五次方根。

(3) $\sqrt[3]{0}$表示0的立方根，也是0的三次算术根。

(4) $\because$ $n=6$是偶数且$-2^2=-4<0$，

$\therefore$ $\sqrt[6]{-2^2}$没有意义。

(5) $\because$ $(-3)^2=9>0$， $\therefore$ $\sqrt[8]{(-3)^2}$有意义，它表示$(-3)^2$的8次算术根。

4. 由奇次方根的性质可得，互为相反数的两个数的立方根也互为相反数。所以，求一个数的立方根时，一般可应用公式$\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}\ (a>0)$进行转换。即，先求这个负数的绝对值的立方根，再取其相反数。如，$\sqrt[3]{-729}=-\sqrt[3]{729}=-9$。

(三) 测试 9-2 (45分钟)

一、选择题

1. 下列语句和式子都是正确的是

(A) $-\frac{1}{8}$的三次算术根是$-\frac{1}{2}$；记作$\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}=-\frac{1}{2}$

(B) 0.0125的立方根的相反数是0.5，记作$-\sqrt[3]{0.0125}=-0.5$

(C) 因为$\left(-\frac{1}{4}\right)^4=\frac{1}{256}$，所以$-\frac{1}{4}$是$\frac{1}{256}$的四次方根

(D) $\frac{2}{3}$是$\frac{32}{243}$的五次算术根，即$\sqrt[5]{\frac{32}{243}}=\frac{2}{3}$ [ ]

2. 下列语句中正确的是

(A) 负数没有立方根

(B) 负数没有奇次方根

(C) 负数的奇次算术根等于这个负数的绝对值的奇次方根

(D) 负数的奇次方根一定是负数 [ ]

3．式子$\sqrt[n]{a}$的意义是

(A) a 的 n 次方根

(B) a 的 n 次算术根

(C) 当 $a\geqslant 0$ 且 n 为偶数时，表示 a 的 n 次算术根

(D) 当 $a\leqslant 0$ 且 n 为奇数时，表示 a 的 n 次算术根

4．下列语句正确的是

(A) 一个数的立方根不是正数就是负数

(B) 平方根和立方根都相等的数有 0 与 1

(C) 负数没有立方根．

(D) 一个数的立方根与这个数同号． [ ]

5．若$\sqrt[3]{a}$与$\sqrt{a}$ ($a\geqslant 0$)均有意义，则一定有

(A) $\sqrt[3]{a}\leqslant\sqrt{a}$ (B) $\sqrt[3]{a}\neq\sqrt{a}$

(C) $\sqrt[3]{a}>\sqrt{a}$ (D) 以上结论都不对 [ ]

6．若 x 的 7 次幂等于 5，那么 x 可记作

(A) 5^7 (B) $\sqrt[5]{7}$ (C) 7^5 (D) $\sqrt[7]{5}$

[ ]

7．如果$\sqrt[3]{2-x}$是 $2-x$ 的三次算术根，那么

(A) $x<2$ (B) $x=2$

(C) $x\leqslant 2$ (D) x 是任何实数 [ ]

8．下列语句中正确的是

(A) 正数 a 的 n 次方根叫做 a 的 n 次算术根

(B) 零的 n 次方根无意义

(C) 若 n 为偶数，$a\geqslant 0$ 时，$\sqrt[n]{a}$ 才有意义

(D) 任何实数都可以开方 [ ]

二、填空

1．-512 的立方根是____，立方得 $15\frac{5}{8}$ 的数是______，

$\sqrt{|-729|}$的立方根是____。

2. 7次方得-128的数是____，-128的7次方根是____；6次方得$\frac{1}{729}$的数是____；$\frac{1}{729}$的6次方根是____，6次算术根是____。

3. $\sqrt[3]{-0.343}=$____；$-\sqrt[3]{0.875-1}=$____；$\sqrt[5]{-\frac{1}{3125}}=$____

4. 若$\sqrt[n]{a}$ $(a<0)$有意义，则n为____，当n为偶数时，若$\sqrt[n]{-a}$有意义，则a____。

5. 若$\sqrt[5]{32}+\sqrt[3]{A}+|-1|=0$，则$A=$____。

6. 判断填空：

(1) $\pm\frac{1}{4}$是$\frac{1}{64}$的立方根 (　　)

(2) $\sqrt[4]{-81}=-\sqrt[4]{81}=-3$ (　　)

(3) $\sqrt[5]{-4}$是-4的五次算术根 (　　)

(4) $\sqrt[3]{1\frac{7}{8}-2}=-\frac{1}{2}$ (　　)

(5) 0.00125的立方根是0.05 (　　)

三、求下列各数

1. $\frac{1}{(-2)^6}$的3次算术根；

2. $-\frac{243}{100000}$的五次方根；

3. $\left(-\frac{1}{16}\right)^2$的四次算术根；

4. $(-0.216)^2$的6次方根及6次算术根。