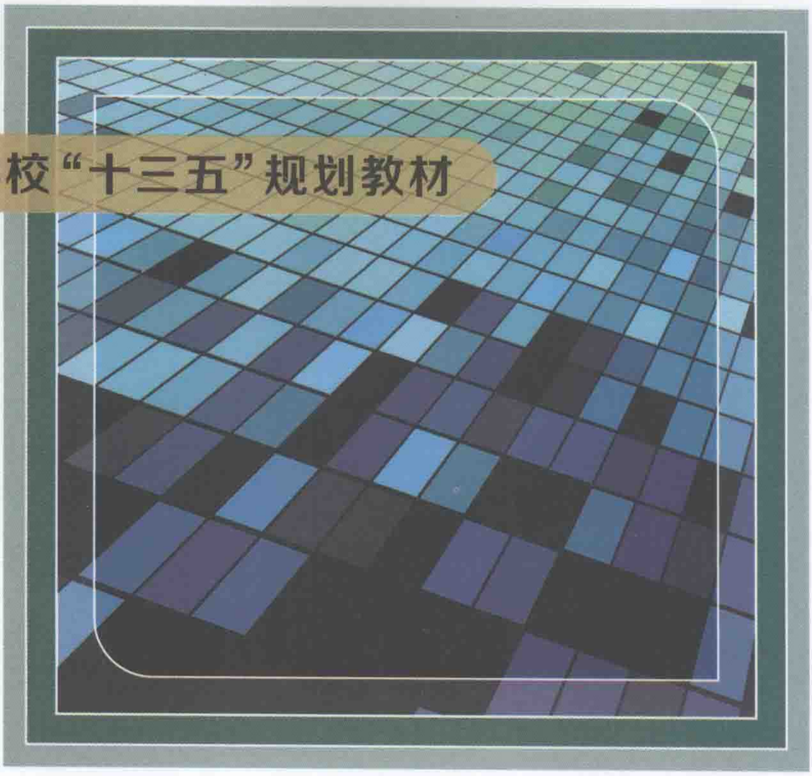
高等学校“十三五”规划教材



工程数学

（下册）

主编　杨萍　敬斌

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

高等学校“十三五”规划教材

工程数学（下册）

主编　杨萍　敬斌

西安电子科技大学出版社

内容简介

本书分为上、下两册，共20章．上册包括线性代数和复变函数，下册包括概率论、数理统计和积分变换．

下册共11章，分别为随机事件及概率、古典概率的基本公式、一维随机变量及其分布、二维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、极限定理、样本及抽样分布、参数估计、假设检验、傅里叶(Fourier)变换、拉普拉斯(Laplace)变换．为更好地启发读者的思维，本书增添了大量的知识产生背景的内容．

本书内容丰富，结构严谨，突出实际运用，可作为高等工科院校本科生数学基础课教材，也可作为工程技术人员的参考书．

图书在版编目(CIP)数据

工程数学·下册/杨萍，敬斌主编．一西安：西安电子科技大学出版社，2016.2

高等学校"十三五"规划教材

ISBN 978-7-5606-3980-2

Ⅰ．①工…　Ⅱ．①杨…　②敬…　Ⅲ．①工程数学一高等学校一教材　Ⅳ．①TB11

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第021600号

策划编辑　戚文艳

责任编辑　王　瑛

出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071

网　　址　www.xduph.com　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com

经　　销　新华书店

印刷单位　陕西大江印务有限公司

版　　次　2016年2月第1版　2016年2月第1次印刷

开　　本　787毫米×1092毫米　1/16　印　张　18

字　　数　424千字

印　　数　1～3000册

定　　价　32.00元

ISBN 978-7-5606-3980-2/TB

XDUP 4272001-1

前　　言

工程数学是高等院校理工科学生一门重要的数学基础课，包括线性代数、复变函数、概率论、数理统计和积分变换等内容，对培养学生的数学思维和工程应用能力具有重要的作用.

在新技术革命对人才培养需求的牵引下，近些年作者对“工程数学”课程进行了一系列的教学改革，从内容体系、知识结构等方面进行了优化，补充了部分启发学生思维、有助于学生能力培养的教学内容，这些改革成果凝练成了本书. 本书分为上、下两册，上册包括线性代数和复变函数，下册包括概率论、数理统计和积分变换. 在本书的编写过程中，着力体现以下几个特色：

（1）在注重保持数学理论体系的系统性和严密性的同时，从更有利于学生理解和学习的角度对部分内容体系进行了大胆的调整、优化，使各部分知识联系更紧密，体现由浅入深、由具体到抽象、循序渐进的特点.

（2）注重知识点的溯本求源. 在书中添加了大量反映知识起源的背景材料，使学生在学习和阅读时能够了解相关知识点产生的时代背景，感受数学前辈们在探索问题时的思想火花.

（3）更加关注知识的实际应用. 书中无论在概念导入、方法应用还是知识拓展等部分，都着力将理论知识与实际问题结合起来. 在实践性较强的部分，还特别添加了软件使用方法的介绍和一些实验环节，帮助学生观察和思考，从而实现对数学概念的深入理解和灵活应用. 在积分变换等工程应用很强的部分，注意将数学理论与工程背景紧密结合，体现工程数学的工程应用特色.

（4）在例题、习题选择上更有针对性. 精心挑选有代表性的例题和习题，既有理论分析计算问题，也有启发思维的应用实例，进一步增强了教材的实用性.

本书的编写大纲由杨萍、敬斌拟定. 下册共 11 章，第十、十一章由房茂燕编写，第十二、十三章由吴聪伟编写，第十四章由赵志辉编写，第十五章由刘素兵编写，第十六至十八章由杨萍、杨宝珍编写，第十九、二十章由朱亚红、彭司萍编写. 全书由杨萍、敬斌统稿.

由于编者水平有限，书中不妥之处在所难免，敬请读者批评指正，以便进一步修改完善.

编　者

2015 年 10 月

目　录

第三部分　概　率　论

第四部分 数理统计

第五部分 积 分 变 换

第三部分　概　率　论

人们在生活中会遇到各种各样的现象，这些现象大体可分为两类：确定性现象和随机现象．随机现象的结果具有不确定性，只发生一次的随机现象，其结果具有偶然性特征，但在相同条件下重复发生的随机现象往往具有一定的规律性．概率论就是研究重复试验下大量随机现象统计规律性的学科，它是数理统计学的基础．

概率论从最初对单个随机事件发生的可能性大小(概率)的研究，到后面引入随机变量，对一类随机现象的规律性进行研究，其发展经历了一个漫长的时期，如今已建立了一套严密的数学理论体系．随着科学技术的发展，概率论和数理统计越来越受到重视，它的方法正向许多基础学科、工程学科渗透．概率论与其他学科相结合形成了如随机信号处理、统计物理学、统计生物学等理论分支，在控制、通信、决策以及可靠性分析等领域都有十分重要的应用．

第十章　随机事件及概率

10.1　随机试验与随机事件

在自然界和人类社会中存在两类不同的现象：一类是确定性现象，即在一定条件下必然发生或必然不发生的现象；另一类是随机现象，即在一定条件下有多个可能的结果，至于哪一个结果会出现，事先无法断定，又称之为偶然性现象.

随机现象在大量重复观察中呈现出来的规律性称为统计规律，它是随机现象本身所固有的，不随人们意志而改变的客观属性.

为了研究统计规律，需对随机现象进行大量重复的观察或试验，我们称之为**随机试验**(random experiment)，简称试验，用字母 E 表示. 随机试验具有如下特点：

(1) 可在相同条件下重复进行；

(2) 每次试验都有多个可能结果，但究竟出现哪种结果，试验前不能断定；

(3) 试验的一切可能结果是事先可知的.

随机试验的每一个可能的结果称为**样本点**或者**基本事件**. 因为随机事件的所有可能结果是明确的，从而所有的基本事件也是明确的. 例如：在抛掷硬币的试验中，“出现反面”和“出现正面”是两个基本事件；在掷骰子的试验中，“出现一点”，“出现两点”，“出现三点”，…，“出现六点”这些都是基本事件.

试验所有可能结果的全体构成的集合称为**样本空间**(sample space)，也即基本事件的全体，通常用大写希腊字母 Ω 表示. Ω 中的点即样本点，常用 ω 表示. 样本空间包含的样本点个数称为容量.

在具体问题中，给定样本空间是研究随机现象的第一步.

例 10.1　一盒中有 10 个完全相同的球，分别有号码 1, 2, 3, …, 10，从中任取一球，观察其标号，则 $\Omega=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$，$\omega_i=$“标号为 i”$(i=1, 2, 3, \cdots, 10)$，ω_1，ω_2，…，ω_{10} 为基本事件(样本点).

例 10.2　在研究英文字母使用频率时，通常选用这样的样本空间：$\Omega=\{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \cdots, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}\}$.

例 10.1 和例 10.2 讨论的样本空间只有有限个样本点，是比较简单的样本空间.

例 10.3　讨论某寻呼台在单位时间内收到的呼叫次数，其可能结果一定是非负整数，因此样本空间为 $\Omega=\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$.

例 10.3 讨论的样本空间含有无穷个样本点，且这些样本点可以依照某种顺序排列起来，称之为可列样本空间.

例 10.4　讨论某地区的气温时，自然把样本空间取为 $\Omega=(-\infty, +\infty)$ 或 $\Omega=[a, b]$.

例 10.4 讨论的样本空间含有无穷多个样本点，它充满一个区间，称之为无穷样本空间.

从上述例子中可以看出，针对不同的问题，样本空间可以为有限集、可列集或无限集. 在今后的讨论中，都认为样本空间是预先给定的. 当然，对于一个实际问题或一个随机现象，由于考虑问题的角度不同，所以样本空间的选择可能不同.

例如：掷骰子这个随机试验，若考虑出现的点数，则样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$；若考虑的是出现奇数点还是出现偶数点，则样本空间 $\Omega=\{$奇数，偶数$\}$.

由此说明，同一个随机试验的样本空间并不唯一，它依赖于试验目的.

随机事件(random event) 是试验中可能出现也可能不出现的结果，是由某些样本点构成的集合，或者说是样本空间的一个子集，简称事件，是概率论最基本的概念之一，常用字母 A，B，C，… 表示. 从集合的角度看，基本事件是由每个可能结果构成的单点集，是一种特殊的随机事件. 随机事件包含的样本点个数称为基本事件数，用 $N(A)$、$N(B)$ 等表示.

例如，抛掷一枚骰子，观察出现的点数，"点数不大于 4"，"点数为奇数" 等均为随机事件. 再如，在一个口袋中含有编号分别为 1，2，…，n 的 n 个球，从这个袋中任取一球，观察后立即将球放回，则随机试验的样本空间为 $\Omega=\{1,2,\cdots,n\}$，事件"取得的球号数不小于 3" 也是随机事件.

事件对应于样本点的集合，对任一事件 A 来说，一个样本点 ω 要么属于 A 要么不属于 A. 若随机试验出现的结果(即样本点)$\omega\in A$，就称事件 A 发生；反之，一次试验中事件 A 发生了，就意味着 A 所包含的某个样本点 ω 恰为试验的结果.

样本空间 Ω 有两个特殊的子集，一个是 Ω 本身，一个是空集 $\varnothing$. 为了方便研究，可将两者视为随机事件的极端情形. 其中前者包含了所有可能的样本点，故每次试验必然发生，称之为**必然事件**；后者不包含任何样本点，故每次试验都不发生，称之为**不可能事件**.

10.2　事件的关系和运算

对于随机试验而言，它的样本空间 Ω 可以包含很多随机事件，概率论的任务之一就是研究随机事件的规律，通过对较简单事件规律的研究来掌握更复杂事件的规律，为此需要研究事件之间的关系与运算.

若没有特殊说明，认为样本空间 Ω 是给定的，且还定义了 Ω 中的一些事件，如 $A_i(i=1,2,\cdots)$ 等，由于随机事件是一个集合，从而事件的关系与运算可以按照集合之间的关系和运算来处理.

一、事件的包含关系

定义 10.1　若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，或称 A 是 B 的子事件，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

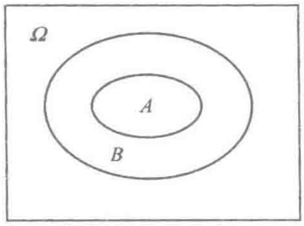


图 10.1

比如前面提到的 $A=\{$球的标号为6$\}$，这一事件就导致了事件 $B=\{$球的标号为偶数$\}$ 的发生，因为摸到标号为 6 的球意味着偶数号球出现了，所以有 $A\subset B$. 可以从图 10.1 中给出直观

的解释，A、B 是两个事件，也就是说，它们是 Ω 的子集，"A 发生必然导致 B 发生"意味着属于 A 的所有样本点在 B 中，由此可见，集合 A 包含于集合 B，所以，事件 $A \subset B$ 的含义与集合论是一致的.

特别地，对任何事件 A，有

$$A \subset \Omega, \varnothing \subset A$$

二、事件的相等

定义 10.2 设 $A, B \subset \Omega$，若 $A \subset B$，同时有 $B \subset A$，则称 A 与 B **相等**，记作 $A = B$.

由定义 10.2 易知，相等的两个事件 A、B 总是同时发生或同时不发生. 在同一样本空间中，两个事件相等意味着它们含有相同的样本点.

三、和(并)事件与积(交)事件

定义 10.3 设 $A, B \subset \Omega$，称事件"A 与 B 中至少有一个发生"为 A 和 B 的**和事件**或**并事件**，记作 $A \cup B$，如图 10.2 所示.

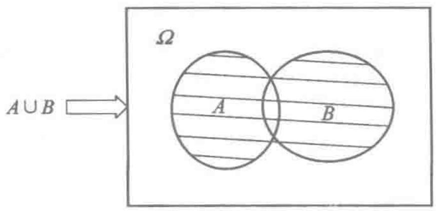


图 10.2

实质上，

$$A \cup B = \text{“}A \text{ 或 } B \text{ 发生”}$$

$$A \cup \Omega = \Omega, A \cup A = A$$

类似地，可定义 n 个事件的和 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$，表示这 n 个事件中至少有一个发生.

若 $A \subset B$，则 $A \cup B = B$，$A \subset A \cup B$，$B \subset A \cup B$.

例 10.5 设某种圆柱形产品，若底面直径和高都合格，则该产品合格.

令 $A = \{$直径不合格$\}$，$B = \{$高度不合格$\}$，则 $A \cup B = \{$产品不合格$\}$.

定义 10.4 设 $A, B \subset \Omega$，称"A 与 B 同时发生"这一事件为 A 和 B 的**积事件**或**交事件**，记作 AB 或 $A \cap B$，如图 10.3 所示.

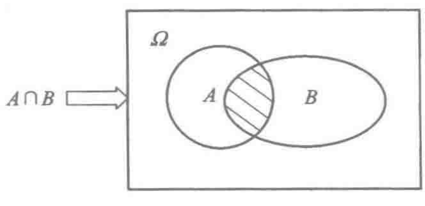


图 10.3

同样，积事件的概念也可以推广为可列个事件的情形. 设 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，称"$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生"这一事件为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件，记作 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$

或 $A_1A_2\cdots A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$.

显然，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap\Omega=A$，$A\cap A=A$，$A\cap B\subset A$，$A\cap B\subset B$.

若 $A\subset B$，则 $A\cap B=A$.

如例 10.5 中，若 $C=\{$直径合格$\}$，$D=\{$高度合格$\}$，则 $CD=\{$产品合格$\}$.

四、差事件

定义 10.5　设 $A,B\subset\Omega$，称“A 发生 B 不发生”这一事件为 A 与 B 的**差事件**，记作 $A-B$，如图 10.4 所示.

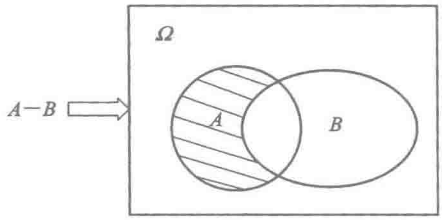


图 10.4

如例 10.5 中，$A-B=\{$该产品的直径不合格，高度合格$\}$，明显地有 $A-B=A-AB$，$A-\varnothing=A$.

五、对立事件

定义 10.6　称 $\Omega-A$ 为 A 的**对立事件**或 A 的**逆事件**，记作 $\overline{A}$，如图 10.5 所示.

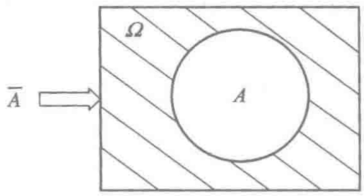


图 10.5

对立事件满足：

$$A\cup\overline{A}=\Omega,\ A\overline{A}=\varnothing$$

由此说明，在一次试验中 A 与 $\overline{A}$ 有且仅有一个发生，即不是 A 发生就是 $\overline{A}$ 发生. 显然 $\overline{\overline{A}}=A$，说明 A 与 $\overline{A}$ 互为逆事件. 对于任意两个事件 A、B，有 $A-B=A\overline{B}$.

对于必然事件 Ω 和不可能事件 $\varnothing$，有 $\overline{\Omega}=\varnothing$，$\overline{\varnothing}=\Omega$.

例 10.6　设有 100 件产品，其中 5 件产品为次品，从中任取 50 件产品，记 $A=\{$50 件产品中至少有一件次品$\}$，则 $\overline{A}=\{$50 件产品中没有次品$\}=\{$50 件产品全是正品$\}$.

六、互不相容事件(互斥事件)

定义 10.7　若两个事件 A 与 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称 A 与 B 为**互不相容事件**(或**互斥事件**).

注 任意两个基本事件都是互斥的. 例如，在摸球试验中，“摸到3号球”与“摸到6号球”两个事件互不相容.

对于互斥事件 A、B，可以把和事件 $A \cup B$ 记作 $A + B$.

如果一组事件 $A_1, A_2, \cdots$ 中任意两个都互斥，则称这组事件两两互斥. 对于一个两两互斥的事件组 $A_1, A_2, \cdots$，可以把和事件 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots$ 记作 $A_1 + A_2 + \cdots$.

若 A、B 为互斥事件，则 A、B 不一定为对立事件；若 A、B 为对立事件，则 A、B 互斥.

七、事件的运算法则

事件间的运算满足与集合类似的运算法则：

(1) 交换律：$A \cup B = B \cup A$，$AB = BA$.

(2) 结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$，$(AB)C = A(BC)$.

(3) 分配律：$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$，$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

(4) 对偶律(德·摩根律)：$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$，$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.

例 10.7 设 A、B、C 为 Ω 中的随机事件，则

(1) “A 与 B 发生而 C 不发生”可表示为 $AB - C$ 或 $AB\overline{C}$；

(2) “A 发生，B 与 C 不发生”可表示为 $A - B - C$ 或 $A\overline{B}\overline{C}$；

(3) “恰有一个事件发生”可表示为 $A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C$；

(4) “恰有两个事件发生”可表示为 $AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$；

(5) “三个事件都发生”可表示为 ABC；

(6) “至少有一个事件发生”可表示为 $A \cup B \cup C$ 或(3)、(4)、(5)之并；

(7) “A、B、C 都不发生”可表示为 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$；

(8) “A、B、C 不都发生”可表示为 $\overline{ABC}$；

(9) “A、B、C 不多于一个发生”可表示为 $A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C \cup \overline{A}\overline{B}\overline{C}$ 或 $\overline{AB \cup BC \cup AC}$；

(10) “A、B、C 不多于两个发生”可表示为 $\overline{ABC}$.

例 10.8 试验 E：袋中有三个球编号为1、2、3，从中任意摸出一球，观察其号码，记 $A = \{$球的号码小于3$\}$，$B = \{$球的号码为奇数$\}$，$C = \{$球的号码为3$\}$.

试问：

(1) E 的样本空间是什么？

(2) A 与 B，A 与 C，B 与 C 是否互不相容？

(3) A、B、C 的对立事件是什么？

(4) A 与 B 的和事件、积事件、差事件各是什么？

解 设 ω_i 为“摸到的球号码为 i”，$i = 1, 2, 3$.

(1) E 的样本空间是 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$；

(2) $A = \{\omega_1, \omega_2\}$，$B = \{\omega_1, \omega_3\}$，$C = \{\omega_3\}$，$B$ 与 C 是相容的，A 与 C 互不相容；

(3) $\overline{A} = \{\omega_3\}$，$\overline{B} = \{\omega_2\}$，$\overline{C} = \{\omega_1, \omega_2\}$；

(4) $A \cup B = \Omega$，$AB = \{\omega_1\}$，$A - B = \{\omega_2\}$.

10.3　古典概率

概率论是一门研究随机现象数量规律的学科，它起源于对赌博问题的研究. 早在16世纪，意大利学者卡丹与塔塔里亚等人就已从数学角度研究过赌博问题. 他们的研究除了赌博外还与当时的人口、保险业等有关，但由于卡丹等人的思想未引起重视，概率概念的要旨也不明确，所以很快被人们淡忘了.

等可能概型与几何概型是两个经典概率模型.

一、等可能概型

先讨论一类最简单的随机试验，它具有下述特征：

(1) 样本空间中的元素只有有限个，不妨设有 n 个元素，分别记为 ω_1，ω_2，…，ω_n；

(2) 每个基本事件出现的可能性是相等的.

称这种数学模型为**等可能概型**(或**古典概型**).

对等可能概型中的任意事件 A，若 A 是由 k 个基本事件构成的集合，则

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 中包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$$

所以在古典概型中，事件 A 的概率是一个分数，其分母是样本点(基本事件)总数 n，而分子是事件 A 包含的基本事件数 k.

例如：将一枚硬币连续掷两次就是这样的试验，也是古典概型，它有四个基本事件：(正、正)，(正、反)，(反、正)，(反、反)，每个基本事件出现的概率都是$\frac{1}{4}$.

若将两枚硬币一起掷，试验的可能结果为(正、反)，(反、反)，(正、正)，但它们出现的可能性却是不相同的，(正、反)出现的可能性为$\frac{2}{4}$，而其它两个事件出现的可能性均为$\frac{1}{4}$，所以它不是等可能概型. 对此，历史上曾经有过争论，达朗贝尔曾误认为这三种结果的出现是等可能的.

判别一个概率模型是否为等可能概型，关键是看是否满足“等可能性”条件. 对此，通常根据实际问题的某种对称性进行理论分析，而不是通过试验来判断.

由等可能概型的计算公式可知，在等可能概型中，若 $A=\Omega$，则 $P(A)=1$. 同样，若 $A=\varnothing$，则 $P(A)=0$.

不难验证，对于满足等可能概型的任一事件 A，有

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1,\ P(\Omega)=1,\ P(\varnothing)=0$$

对于互斥的 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n，有

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

利用等可能概型公式计算事件的概率，关键是要求基本事件总数和 A 中包含的事件数，这里需要利用排列和组合的有关知识，且有一定的技巧性. 下面利用几个相关例题来说明.

例 10.9 在盒子中有 5 个球(3 个白球、2 个黑球)，从中任取 2 个，求取出的 2 个球都是白球的概率及一白、一黑的概率.

分析 从 5 个球中任取 2 个，共有 C_5^2 种不同取法，可以将每一种取法作为一个样本点，则样本点总数 C_5^2 是有限的. 由于取球是随机的，因此样本点出现的可能性是相等的，故这个问题是等可能概型.

解 设 $A=\{$取到的 2 个球都是白球$\}$，$B=\{$取到的 2 个球一白一黑$\}$，且基本事件总数为 C_5^2，A 中包含的基本事件数为 C_3^2，故

$$P(A)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}$$

B 中包含的基本事件数为 $C_3^1C_2^1$，故

$$P(B)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{3}{5}$$

由此例我们初步体会到解等可能概型问题的两个要点：

(1) 判断问题是否属于等可能概型，即判断样本空间是否有限和等可能性；

(2) 计算等可能概型的关键是“记数”，这主要利用排列与组合的知识.

例 10.10 在盒子中有 10 个相同的球，分别标为号码 1，2，3，…，9，10，从中任摸一球，求此球的号码为偶数的概率.

解 方法一：由题意知 $\Omega=\{1,2,\cdots,10\}$，故基本事件总数 $n=10$. 令 $A=\{$所取得的球的号码为偶数$\}$，则 A 含有 5 个基本事件，故

$$P(A)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

方法二：令 $A=\{$所取得的球的号码为偶数$\}$，则 $\overline{A}=\{$所取得的球的号码为奇数$\}$，因而 $\Omega=\{A,\overline{A}\}$，故 $P(A)=\dfrac{1}{2}$.

此例说明，在等可能概型问题中，选取适当的样本空间，可使解题变得简洁.

例 10.11 某班级有 n 个人($n<365$)，求至少有两个人的生日在同一天的概率.

解 假定一年按 365 天计算，令 $A=\{$至少有两个人的生日在同一天$\}$，则 A 的情况比较复杂(两人，三人，… 在同一天)，但 A 的对立事件 $\overline{A}=\{n$ 个人的生日全不相同$\}$，则

$$P(\overline{A})=\frac{C_N^n n!}{N^n}=\frac{N!}{N^n(N-n)!}\qquad (N=365)$$

又因为 $P(A)+P(\overline{A})=1$，故

$$P(A)=1-\frac{N!}{N^n(N-n)!}\qquad (N=365)$$

这个例子就是历史上有名的“生日问题”，对于不同的一些 n 值，其相应的 $P(A)$ 如表 10.1 所示.

表 10.1

n	10	20	23	30	40	50
$P(A)$	0.12	0.41	0.51	0.71	0.89	0.97

从表 10.1 中可以看出，“一个班级中至少有两个人生日相同”这个事件发生的概率并

不像多数人想象的那样小，而是足够大. 当班级人数达到 23 时，有半数以上的班级会发生这件事情；而当班级人数达到50时，有 97% 的班级会发生上述事件，当然这里所讲的半数以上、97% 的班级都是对概率而言的，只有在试验次数较多的情况下(要求班级数相当多)，才可以理解为频率. 这个例子告诉我们"直觉"并不可靠，从而更有力地说明了研究随机现象统计规律的重要性.

二、几何概型

古典概型中的试验结果是有限的，实际问题中，经常遇到试验结果是等可能但数量无限的情况. 例如，在一个面积为 S_Ω 的区域 Ω 中，等可能地任意投点，这里等可能的确切意义是这样的：在区域 Ω 中有任意一个小区域 A，若它的面积为 S_A，则点落在 A 中的可能性大小与 S_A 成正比，而与 A 的位置及形状无关. 如果点落在区域 A 这个随机事件仍记为 A，则由 $P(\Omega)=1$ 可得 $P(A)=\dfrac{S_A}{S_\Omega}$，这一类概率称为**几何概率**.

同样，如果在一条线段上投点，那么只需要将面积改为长度；如果在一个空间立体内投点，则只需将面积改为体积.

因此，几何概率是以等可能性为基础，借助几何上的度量(长度、面积、体积或容积等)来合理地规定概率.

例 10.12 (会面问题)甲、乙两人约定在 6 时到 7 时之间某处会面，并约定先到者应等候另一人一刻钟，过时即可离去，求两人能会面的概率.

解 以 x 和 y 分别表示甲、乙约会的时间，则 $0\leqslant x\leqslant 60$，$0\leqslant y\leqslant 60$.

两人能会面的充要条件是 $|x-y|\leqslant 15$，在平面上建立直角坐标系(见图 10.6)，则(x, y)的所有可能结果是边长为60的正方形，而可能会面的时间由图中阴影部分表示. 这是一个几何概率问题，故

$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{60^2-45^2}{60^2}=\frac{7}{16}$$

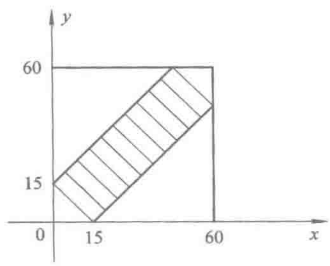


图 10.6

例 10.13 蒲丰(Buffon)投针问题. 平面上画有等距离的平行线，平行线间的距离为 $\alpha(\alpha>0)$，向平面任意投掷一枚长为 $l(l<\alpha)$ 的针，试求针与平行线相交的概率.

解 假设 x 表示针的中点与最近一条平行线的距离，又以 φ 表示针与此直线间的交角，则 $0\leqslant x\leqslant \dfrac{\alpha}{2}$，$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$. 由此可以确定 x-φ 平面上的一个矩形 $\Omega=\{(x,\varphi)\mid 0\leqslant x\leqslant\dfrac{a}{2},\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi\}$. 针与平行线相交，其满足的条件为 $x\leqslant\dfrac{l}{2}\sin\varphi$，见图 10.7，则

$$A=\{(x,\varphi)\mid 0\leqslant x\leqslant\frac{a}{2},\ x\leqslant\frac{l}{2}\sin\varphi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi\}$$

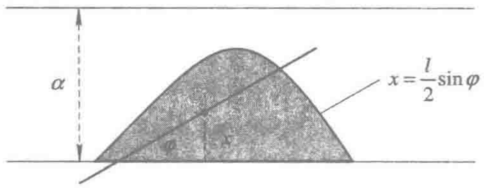


图 10.7

由等可能性可知

$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{\int_0^\pi \frac{l}{2}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{\pi\,\frac{a}{2}}=\frac{2l}{\pi a}$$

若 l、a 为已知，则以 π 值代入上式，即可求得 $P(A)$ 的值. 反之，若已知 $P(A)$ 的值，也可以用上式去求 π，而关于 $P(A)$ 的值，可以用频率去近似它. 如果投针 N 次，其中针与平行线相交 n 次，则频率为$\frac{n}{N}$，于是 $\pi\approx\frac{2lN}{na}$.

这是一个颇为奇妙的方法，只要设计一个随机试验，使一个事件的概率与某一未知数相连，然后通过重复试验，以频率近似概率即可求得未知数的近似值. 当然，试验次数要相当多. 随着计算机的发展，人们用计算机来模拟所设计的随机试验，从而这种方法得到广泛应用. 这种计算方法称为**随机模拟法**，也称为**蒙特卡洛法**.

10.4　概率的定义及性质

一、统计定义

对于随机试验中的随机事件，在一次试验中是否发生，虽然不能预先知道，但是它们在一次试验中发生的可能性是有大小之分的. 比如，掷一枚均匀的硬币，随机事件 A(正面朝上）和随机事件 B(正面朝下）发生的可能性是一样的(都为$\frac{1}{2}$). 又如，袋中有 8 个白球，2 个黑球，从中任取一球. 显然取到白球的可能性要大于取到黑球的可能性. 一般地，对于任何一个随机事件都可以找到一个数值与之对应，该数值作为随机事件发生的可能性大小的度量.

定义 10.8　随机事件 A 发生的可能性大小的度量(数值)，称为 A 发生的**概率**(probability)，记为 $P(A)$.

对于一个随机事件来说，它发生可能性大小的度量是自身决定的，并且是客观存在的. 一个根本问题是，对于一个给定的随机事件发生的概率，究竟有多大呢?

再来看，掷硬币的试验，做一次试验，事件 A(正面朝上）是否发生是不确定的，然而这是问题的一个方面，当大量重复做该试验时，事件 A 发生的次数(也称为频数）体现出一定的规律性，约占总试验次数的一半.