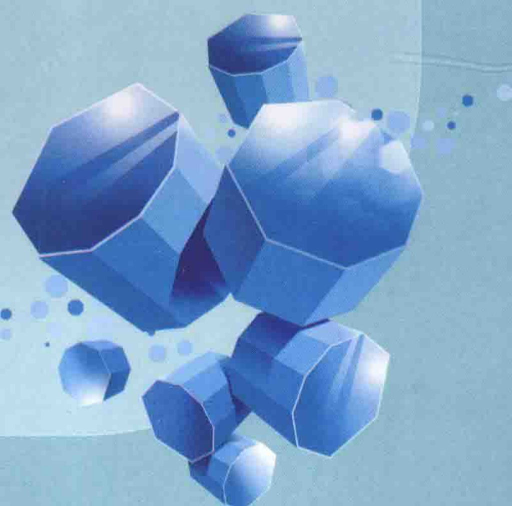
高职高专公共基础课“十二五”规划教材

高等数学（上）

主编　蔺守臣　杨向斌



西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

高职高专公共基础课“十二五”规划教材

高等数学(上)

主　编　蔺守臣　杨向斌
副主编　代　瑛　徐　静
参　编　王　晨　张崇巍　田　军　赵向东

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书分为上、下两册，主要介绍高等数学的基础知识。上册主要包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程、空间解析几何与向量代数；下册主要包括多元函数微积分、无穷级数、行列式、矩阵、线性方程组、线性规划初步、概率论与数理统计初步。

本书内容全面，通俗易懂，所选取的例题与实际应用联系紧密，注重微积分知识在各个专业领域内的应用和拓展。

本书可作为高职高专院校各个专业的通用教材，也可作为工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上/蔺守臣，杨向斌主编. 一西安：西安电子科技大学出版社，2015.9

高职高专公共基础课“十二五”规划教材

ISBN 978-7-5606-3856-0

Ⅰ. ① 高… Ⅱ. ① 蔺… ② 杨… Ⅲ. ① 高等数学一高等职业教育一教材 Ⅳ. ① O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 216140 号

策　　划　刘统军
责任编辑　雷鸿峻
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)
电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071
网　　址　www. xduph. com　　电子邮箱　xdupfxb001@163. com
经　　销　新华书店
印刷单位　陕西天意印务有限责任公司
版　　次　2015 年 9 月第 1 版　2015 年 9 月第 1 次印刷
开　　本　787 毫米×1092 毫米　1/16　印　张　15
字　　数　353 千字
印　　数　1～3000 册
定　　价　30. 00 元

ISBN 978-7-5606-3856-0/O

XDUP 4148001-1

前　言

本书是根据当前我国高职高专院校的发展趋势，认真总结、分析、吸收全国高职高专院校各专业数学教学改革经验，从人才培养目标出发，以教育部最新修订的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》为指导，在研究、对比多种同类教材和广泛吸收其精华的基础上，组织了一批长期在教学一线、有丰富教学经验的骨干教师编写的。

本书充分体现了"打好基础，够用为度，服务专业，应用为目的"的基本教学要求，贯彻培养学生四方面的能力：一是用数学思维分析解决问题的能力；二是把实际问题转化为数学模型的能力；三是求解数学模型的能力；四是用数学知识解决一些所学专业问题的能力。针对高职高专学生的特点，本书语言表述尽量通俗简洁，深入浅出，降低其抽象性。本书具有以下特色：

(1) 坚持理论联系实际，从实际问题入手，采用从特殊到一般的推理方式，遵循从感性到理性的认知规律。

(2) 在确保数学概念准确的前提下，尽量借助通俗的语言，力求使抽象的数学概念形象化，便于读者理解。

(3) 针对高职高专学生的实际情况，适当降低了理论和计算的难度，不严格强调理论的严密性与系统性。

(4) 例题与习题的设置按照由易到难的梯度，每节、每章都配有习题，便于学生自学检测。

(5) 注重培养学生运用数学思想、方法解决实际问题的能力。

(6) 本书力求基本要求与拓宽知识相结合，适应不同要求和不同层次的教学，考虑到部分学生日后的继续学习，部分章节内容深度适当加大。

(7) 全书力求讲清楚基本概念、基本思想和基本方法，层次分明，文字叙述精练准确、通俗流畅，尽量运用图形、表格、实例、数据来说明问题，增强了教材的直观性。

(8) 本书从教学内容的编排上尽量考虑适合于不同专业、不同专业方向的需求，给教师提供了选择适当章节讲授的空间。

本书分为上、下两册，共 15 章。上册包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程、空间解析几何与向量代数；下册包括多元函数微积分、无穷级数、行列式、矩阵、线性方程组、线性规划初步、概率论与数理统计初步。

参加本书编写的有：蔺守臣(绪论、第 1～5 章及附录部分)、王晨(第 6 章)、代瑛(第 7、8、10 章)、张崇巍(第 9 章)、杨向斌(第 11～13 章)、田军(第 14 章)、徐静(第 15 章)，

王晨、赵向东参与了本书的整理、校对及出版的有关协调工作。全书由蔺守臣、杨向斌负责总体规划、修改和技术处理。

本书的出版得到了西安电子科技大学出版社的大力支持，在此表示感谢。

由于时间仓促，加之编者水平有限，书中不足之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2015 年 5 月

目　　录

绪　论

高等数学是高职高专院校相关专业必修的一门重要的基础课，其内容包括一元函数微积分学、多元函数微积分学、空间解析几何、极限、线性代数、概率与数理统计基础等，其基础内容是微积分。

为了激发、培养读者对高等数学的学习兴趣，下面将从高等数学的发展历史、高等数学与初等数学的比较及怎样学习高等数学等三个方面对高等数学做一简要介绍。

一、高等数学的发展历史

世界万事万物无不在一定的空间中运动，在运动变化过程中都存在一定的数量关系。数学就是研究现实中数量关系与空间形式的科学。简而言之，数学就是研究线性的科学。随着科学技术的不断发展，人们对事物的认识逐渐深化，作为数学对象的"数"和"形"，在数学发展的不同阶段，表现形式随之不同。

17 世纪以前的数学，研究的"数"是常数或常量，研究的"形"是孤立的、不变的、规则的几何形体，研究常量间的代数运算和不同几何体内部及相互间的关系，分别形成了初等数学和初等几何，统称为初等数学。因此，有人把这一阶段称为初等数学阶段。

1637 年，法国数学家笛卡尔(Descartes)引入了坐标，建立了解析几何。解析几何的建立，沟通了数学中两个基本研究对象"数"与"形"，使得用代数的方法去处理几何问题成为可能，也为处理变量间的依赖关系提供了几何模型，使数学的发展进入了一个新阶段。在这一阶段中，研究的"数"是变数或变量，研究的"形"是不规则的几何形体，如曲线、曲面、曲边形和曲面体等，而且"数"和"形"开始紧密地联系起来。17 世纪，英国科学家牛顿(Newton)和德国科学家莱布尼茨(Leibniz)创立了微积分。此后，数学的发展遂出现一泻千里之势，形成了内容丰富的高等数学、高等几何与数学分析三大分支，同时还出现了一些其他分支。相对初等数学，人们称它们为高等数学，因此，有人把这一阶段(1637 年至 19 世纪末)称为高等数学阶段。

在 20 世纪 40 年代，计数数学的发展促进了电子计算机的发展；反过来，电子计算机的发展又加快了数学的发展，从而使繁琐的数学统计推理可由一般的工程技术人员借助计算机完成。

二、高等数学与初等数学的比较

从研究常量到研究变量，从研究规则的几何形体到研究不规则的几何形体，是人类对自然界认识的一大飞跃，是数学发展中的一个转折点，在上述两个阶段中，不但研究的对象不同，而且研究的方法也不同。初等数学主要采用形式逻辑的方法，静态地、孤立地研究问题，而高等数学则不然，它是以运动的、变化的观点去研究问题。因此，高等数学研究和解决问题的思想、方法有其非常明确的特点，现概括如下：

(1) 变化的观点。用变化的观点去考察问题，从变化中去认识、解决问题，如速度问题和面积问题这两个典型问题的解决，就充分体现了变化的这一观点。

(2) 引入变量，并寻求变量与变量之间的一种依赖关系，这就决定了微积分主要研究变量。而初等数学则主要研究常量，如代数中的解方程和几何中的规则图形。因此，初等数学基本上是常量数学，而微积分属于变量数学。

(3) 处理“曲”与“直”、“变”与“不变”、“有限”与“无限”、“匀”与“不匀”等之间的矛盾，通常采用以“直”代“曲”，以“不变”代“变”，以“有限”代“无限”，从而求得近似解答，最后归纳为近似与精确的矛盾。为了解决近似与精确的矛盾，通常采用极限方法，使矛盾得到非常科学的解答。

(4) 极限理论与方法是解决高等数学中问题的基础，它从方法上突出表现了微积分学不同于初等数学的重要特点。

三、怎样学习高等数学

虽然高等数学的内容丰富，分支繁多，表现形式抽象，应用广泛，对初学者或一般水平的读者难度大，但我们首先要处理好心态，即不能惧怕，正确对待，采取严肃、认真、刻苦、科学的态度去学习，就会收到一定的效果。

其二，要有扎实的初等数学基础。这就要求我们必须具备一定的初等数学基础知识，同时要有一定的逻辑思维能力、空间想象能力，尤其要具备发散思维、抽象思维和逻辑推理能力。

其三，通过高等数学的学习，要培养利用抽象的表达方式深刻理解基本概念的内涵与实质以及它们之间的内在联系，正确领会一些重要的数学思维方法。

其四，当代科学技术飞速发展，不但要求我们掌握更多的数学知识，而且要求会运用这些知识去解决实际问题。

其五，提倡独立钻研，勤于思考，大胆提出问题，善于研究问题，培养自己的创造思维和学习能力。

总之，学好数学并不是一件难事，只要付出必要的努力，培养学习数学的广泛兴趣，学数学就不是枯燥乏味的事了。数学可以开启人们的智慧，掌握了它的真谛，就会给我们增添解决问题的力量。

第1章　函　数

初等函数的研究对象基本上是不变的量，而高等数学的研究对象是变化的量。所谓函数关系，就是变量之间的依赖关系。本章将在回顾中学数学有关函数知识的基础上介绍函数的概念及其性质、反函数与复合函数、初等函数等内容，为学习高等数学打下良好的基础。

1.1　函数的概念及其性质

1.1.1　函数的概念

函数是高等数学的主要研究对象，中学数学中已经介绍了函数的一些概念，在下面的学习中我们不再对以前内容简单重复，而是要从不同的角度对函数进行描述。

1. 函数的定义

定义 1.1　给定两个非空数集 D、W，存在某一确定的对应法则 f。若对于集合 D 中的任意一个元素 x，通过对应法则 f 之后，在集合 W 中都有唯一确定的 y 与之对应，则称这个对应法则 f 为定义在集合 D 上的一个函数关系，或称变量 y 是变量 x 的函数，记作

$$y = f(x),\ x \in D$$

其中：x 称为自变量；y 称为因变量；D 称为函数的定义域，记作 $D(f)$。

若 $x_0 \in D(f)$，则称函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有定义。x_0 所对应的变量 y 的取值称为当 $x=x_0$ 时，函数 $y=f(x)$ 的函数值，记作 y_0 或 $f(x_0)$ 或 $y\big|_{x=x_0}$。

由全体函数值所构成的集合称为该函数的值域，记作 $R(f)$，即

$$R(f) = \{y \mid y = f(x),\ x \in D\}$$

在此要注意函数的值域 $R(f)$ 和函数定义中的给定非空数集 W 之间的关系，非空数集 W 的元素未必都是作为函数值存在的，$R(f)$ 只能是 W 的子集，即 $R(f) \subseteq W$。这里也可以称非空数集 W 为函数 $y=f(x)$ 的陪域。

需要指出，按照上述定义，记号 f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的：前者表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则，而后者表示与自变量 x 对应的函数值。但为了叙述方便，习惯上常用记号"$f(x)$，$x \in D$"或"$y=f(x)$，$x \in D$"来表示定义在 D 上的函数。

表示函数的记号是可以任意选取的，除了常用的 f 之外，还可采用其他英文字母或希腊字母，如 g、F、φ、ψ 等，相应地，函数可记作 $y=g(x)$、$y=F(x)$、$y=\varphi(x)$、$y=\psi(x)$ 等。有时还直接用因变量的记号表示函数，即把函数记作 $y(x)$。但在同一个问题的讨论中，为了区别几个不同函数，就需要用几个不同的记号来表示它们。

2. 函数的两个要素

函数的对应法则 f 和定义域 $D(f)$ 称为函数的两个要素。函数的定义域通常按两种情

形来确定：一种是对有实际背景的函数，根据实际背景中变量的实际意义来确定；另一种是对解析表达式表示的函数，通常约定这种函数的定义域是使得该解析表达式有意义的一切实数构成的集合。定义域一般用区间来表示。

例 1.1　设 $f(x)=3x^2+2x-1$ 是一个特定的函数，试写出它的对应法则。

解　函数 $f(x)=3x^2+2x-1$ 的对应法则为 $f(\ )=3(\ )^2+2(\ )-1$。

例 1.2　设 $f(x+1)=x^2-3x$，求 $f(x)$。

解　设 $x+1=u$，则 $x=u-1$，因此

$$f(u)=(u-1)^2-3(u-1)=u^2-5u+4$$

即

$$f(x)=x^2-5x+4$$

例 1.3　求函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+2}}+\sqrt{x(x-1)}$ 的定义域。

解　这是两个函数之和的定义域，先分别求出每个函数的定义域，再求其交集即可。

要使 $\frac{1}{\sqrt{x+2}}$ 有意义，必须满足 $x+2>0$，解得 $x>-2$，即定义域为 $(-2, +\infty)$。

要使 $\sqrt{x(x-1)}$ 有意义，必须满足 $x(x-1)\geqslant 0$，解得 $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant 0$，即定义域为 $(-\infty, 0]\cup[1, +\infty)$。

于是，所求函数的定义域为 $(-2, 0]\cup[1, +\infty)$。

如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的。

例 1.4　函数 $y=x$ 与 $y=\frac{x^2}{x}$ 是否为相同函数？

解　函数 $y=x$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$，而函数 $y=\frac{x^2}{x}$ 在 $x=0$ 时无意义，其定义域是 $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$。因此，$y=x$ 与 $y=\frac{x^2}{x}$ 是定义域不同的函数。

例 1.5　函数 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 是否为相同函数？

解　虽然 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 都是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的函数关系，但是其对应法则却是不相同的。对于函数 $y=x$，当 $x>0$ 时 $y>0$，当 $x<0$ 时 $y<0$。而对于函数 $y=\sqrt{x^2}$，当 $x>0$ 时 $y>0$，当 $x<0$ 时 $y>0$。因此，这两个函数是定义域相同而对应法则不同的函数。

3. 函数的表示法

在函数的定义中，并没有具体规定用什么方法表示函数。为了能更好地研究函数，就要采用适当的方法把函数表示出来。函数的表示法通常有三种，即解析式法、图像法和表格法。

1) 解析式法

解析式法又叫公式法，它是把自变量 x 与因变量 y 的函数关系由数学表达式给出，便于理论研究。微积分中的绝大多数函数都是用解析式法来表示的。例如，$y=\frac{1}{x(x-1)}+$

$\sqrt{9-x^2}$就是用解析式法表达的 y 与 x 的函数关系，它的定义域为

$$D=[-3,\ 0)\cup(0,\ 1)\cup(1,\ 3]$$

用解析式法给出的函数，可以在坐标平面上找出其几何关系，称为函数的图形。

2）图像法

图像法是把函数关系用平面的点集$\{(x,\ y)\mid y=f(x),\ x\in D\}$反映出来，一般情况下，它是一条平面曲线。

例 1.6　某人开车去上班的途中匀速前行，出发后不久，他的车坏了，他停在路边把车修好，随后又匀速前行。请把此人离开出发地的距离关于时间的函数关系用图形描述出来。

解　此人离开出发地的距离关于时间的函数图形如图 1-1 所示。

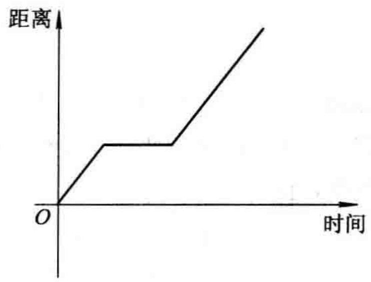


图 1-1

3）表格法

表格法是把变量间的函数关系通过表格形式反映出来。这种表示方法使得自变量与因变量的对应关系一目了然。

例 1.7　天水电视台每天播放天气预报，经统计，麦积区 2014 年 8 月 19 日至 29 日每天的最高气温如表 1-1 所示。

表 1-1

日期	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
最高温度	32	28	30	31	29	30	32	28	29	29	31

4. 分段函数

有些函数，对于其定义域内自变量取不同值时，其对应法则不能用一个统一的解析表达式表示，而要用到两个或两个以上的数学式子表示，这类函数称为“分段函数”。分段函数的数学表达式虽然是用几个式子来表示的，但它表示的是一个函数而不是几个函数。

例 1.8　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

的定义域为$(-\infty,\ +\infty)$，其图形如图 1-2 所示。

例 1.9　符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

的定义域为$(-\infty,+\infty)$，其图形如图 1-3 所示。

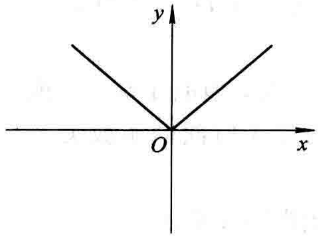


图 1-2

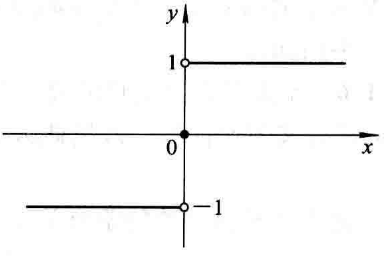


图 1-3

例 1.10　用分段函数表示函数 $y=3-|x-1|$。

解　根据绝对值的定义可知：当 $x-1<0$，即 $x<1$ 时，$|x-1|=-(x-1)$；当 $x-1\geqslant 0$，即 $x\geqslant 1$ 时，$|x-1|=x-1$。因此，有

$$y=\begin{cases}3+(x-1), & x<1\\ 3-(x-1), & x\geqslant 1\end{cases}$$

即

$$y=\begin{cases}2+x, & x<1\\ 4-x, & x\geqslant 1\end{cases}$$

例 1.11　已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+2, & 0\leqslant x\leqslant 2\\ x^2, & 2<x\leqslant 4\end{cases}$，求 $f(x-1)$。

解

$$f(x-1)=\begin{cases}(x-1)+2, & 0\leqslant x-1\leqslant 2\\ (x-1)^2, & 2<x-1\leqslant 4\end{cases}$$

即

$$f(x-1)=\begin{cases}x+1, & 1\leqslant x\leqslant 3\\ (x-1)^2, & 3<x\leqslant 5\end{cases}$$

5. 隐函数

在前面我们所遇到的用解析式法表达的函数中，它们的对应法则都是因变量用自变量的一个数学表达式表示出来的，如 $f(x)=3x^2+2x-1$，$y=\dfrac{1}{x(x-1)}+\sqrt{9-x^2}$ 等，这些函数称为显函数。而有些函数，它们的对应法则是用一个方程 $F(x,y)=0$ 来表示的，这些函数称为隐函数，如 $xy=1$，$y+x^2+1=0$ 等。

方程 $F(x,y)=0$ 可能确定一个 y 与 x 的函数关系。但不是任意一个 $F(x,y)=0$ 都能确定一个 y 与 x 的函数关系，因为没有任何实数 y 与 x 能满足给定方程 $x^2+y^2+1=0$，函数的定义域不能是空集。

即使方程 $F(x,y)=0$ 可以确定一个 y 与 x 的函数关系，这种函数关系也不一定能用显函数表示出来。

1.1.2 函数的几种简单性质

1. 函数的奇偶性

定义 1.2 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任一 $x\in D$，都有

(1) $f(-x)=f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为偶函数；

(2) $f(-x)=-f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为奇函数。

对于偶函数，因为 $f(-x)=f(x)$，所以如果点 $P(x, f(x))$ 在图形上，则与它关于 y 轴对称的点 $P'(-x, f(x))$ 也在图形上，因此偶函数的图形关于 y 轴对称。

对于奇函数，因为 $f(-x)=-f(x)$，所以如果点 $P(x, f(x))$ 在图形上，则与它关于原点对称的点 $P'(-x, -f(x))$ 也在图形上，因此奇函数的图形关于原点对称。

例 1.12 判断函数 $f(x)=x^4-2x^2$ 的奇偶性。

解 因为

$$f(-x)=(-x)^4-2(-x)^2=x^4-2x^2=f(x)$$

所以 $f(x)=x^4-2x^2$ 是偶函数。

例 1.13 判断函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的奇偶性。

解 因为

$$f(-x)=\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}=-f(x)$$

所以 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 是奇函数。

例 1.14 判断函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0\\ 0, & x=0\\ x-1, & x>0\end{cases}$ 的奇偶性。

解 因为

$$\begin{aligned}f(-x)&=\begin{cases}-x+1, & -x<0\\ 0, & -x=0\\ -x-1, & -x>0\end{cases}\\ &=\begin{cases}-(x-1), & x>0\\ 0, & x=0\\ -(x+1), & x<0\end{cases}\\ &=\begin{cases}-(x+1), & x<0\\ 0, & x=0\\ -(x-1), & x>0\end{cases}\\ &=-f(x)\end{aligned}$$

所以该函数是奇函数。

2. 函数的单调性

定义 1.3 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内有定义(区间 I 可以是函数 $f(x)$ 的定义域，也可以是定义域的一部分)，对于区间 I 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，

(1) 若有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在区间 I 内单调递增；

(2) 若有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在区间 I 内单调递减。

单调递增函数的图形是沿着 x 轴正方向逐渐上升的，单调递减函数的图形是沿着 x 轴正方向逐渐下降的。

例 1.15　判断函数 $y=\sqrt{x}$的单调性。

解　该函数的定义域为$[0,+\infty)$，在定义域内任取两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2}$，因此函数 $y=\sqrt{x}$在其定义域内单调递增。

例 1.16　判断函数 $y=x^2+1$ 的单调性。

解　该函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，在定义域内任取两点 x_1 和 x_2，有

$$f(x_1)-f(x_2)=(x_1^2+1)-(x_2^2+1)=x_1^2-x_2^2$$

在$(-\infty,0]$内，当 $x_1<x_2$ 时，$x_1^2>x_2^2$，于是有 $f(x_1)>f(x_2)$，因此函数 $y=x^2+1$ 在$(-\infty,0]$内是单调递减的。

在$[0,+\infty)$内，当 $x_1<x_2$ 时，$x_1^2<x_2^2$，于是有 $f(x_1)<f(x_2)$，因此函数 $y=x^2+1$ 在$[0,+\infty)$内是单调递增的。

因此，函数 $y=x^2+1$ 在其定义域内不是单调函数。

3. 函数的周期性

定义 1.4　对于函数 $y=f(x)$，如果存在常数 $T>0$，使得 $f(x+T)=f(x)$恒成立，则称此函数为周期函数，满足这个等式的最小正数 T 称为函数的最小正周期。

例 1.17　设函数 $f(x)$是以 $T>0$ 为周期的周期函数，证明 $f(ax)(a>0)$是以 T/a 为周期的周期函数。

证明

$$f\left(a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right)=f(ax+T)$$

因为 $f(x)$ 是以 $T>0$ 为周期的周期函数，所以有 $f(ax+T)=f(ax)$。因此 $f\left(a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right)=f(ax)$，即 $f(ax)(a>0)$是以 T/a 为周期的周期函数。

4. 函数的有界性

定义 1.5　设函数 $y=f(x)$在区间 I 内有定义(区间 I 可以是函数 $f(x)$的定义域，也可以是定义域的一部分)，如果存在一个正数 M，使得对于区间 I 内任意的自变量 x，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$在区间 I 内有界；否则，称函数 $f(x)$在区间 I 内无界。

例如：函数 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内有界，因为对于任意实数 x，恒有 $|\sin x|\leqslant 1$；函数 $y=\frac{1}{x}$在$(0,+1)$内无界，在$(1,+\infty)$内有界。

例 1.18　证明函数 $y=\frac{1}{x^2+1}$是有界函数。

证明　函数 $y=\frac{1}{x^2+1}$的定义域是$(-\infty,+\infty)$，且

$$|y|=\left|\frac{1}{x^2+1}\right|=\frac{1}{x^2+1}$$

因为 $x^2+1\geqslant 1$，所以

$$|y|=\left|\frac{1}{x^2+1}\right|=\frac{1}{x^2+1}\leqslant 1$$

因此，$y=\dfrac{1}{x^2+1}$在$(-\infty,\ +\infty)$内有界。

习题 1.1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{3x+2}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$；

(3) $y=\ln\sin x$；　　(4) $y=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$。

2. 下列各对函数是否相同？为什么？

(1) $y=\ln\sqrt{x}$与$y=\dfrac{1}{2}\ln x$；

(2) $y=\cos x$与$y=\sqrt{1-\sin^2 x}$；

(3) $y=\dfrac{1}{x+1}$与$y=\dfrac{x-1}{x^2-1}$；

(4) $y=1$与$y=\cos^2 x+\sin^2 x$。

3. 设函数$f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\leqslant 1\\ 0, & x>1\end{cases}$，求$f(-3)$、$f(1)$、$f(3)$。

4. 设函数$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<0\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$，画出函数$f(x)$的图形，并求其定义域。

5. 设$F(x)=f(x)\left(\dfrac{1}{2^x+1}-\dfrac{1}{2}\right)$，已知$f(x)$为奇函数，判断$F(x)$的奇偶性。

6. 已知$f(x)$为周期函数，判断下列函数是否为周期函数。

(1) $f^2(x)$；　　(2) $f(2x)$；

(3) $f(x+2)$；　　(4) $f(x)+2$。

7. 证明下列函数是有界函数：

(1) $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$；　　(2) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$。

8. 讨论函数$y=e^{-x^2}$的奇偶性、单调性、周期性及有界性。

1.2 反函数与复合函数

1.2.1 反函数

定义 1.6 设$y=f(x)$是x的函数，如果把y当作自变量，x当作因变量，则由关系式$y=f(x)$所确定的函数$x=f^{-1}(y)$称为函数$y=f(x)$的反函数，而$y=f(x)$称为直接函数。

习惯上我们总是用x表示自变量，y表示因变量，因此，往往把$x=f^{-1}(y)$改写成$y=$