

“十一五”国家重点图书出版规划项目

18

□ 数学文化小丛书

李大潜 主编

对称与群

○ 顾沛



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

“十一五”国家重点图书出版规划项目

数学文化小丛书

李大潜 主编

对称与群

Duichen yu Qun

顾 溥



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图书在版编目(CIP)数据

数学文化小丛书. 第2辑: 全10册 / 李大潜主编.
— 北京: 高等教育出版社, 2013. 9

ISBN 978-7-04-033520-0

I. ①数… II. ①李… III. ①数学-普及读物 IV.
① O1-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第226474号

策划编辑	李蕊	责任编辑	张耀明	封面设计	张楠
责任绘图	尹文军	版式设计	王艳红	责任校对	王效珍
责任印制	朱学忠				

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社址	北京市西城区德外大街4号	网址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印刷	北京信彩瑞禾印刷厂	网上订购	http://www.landaco.com
开本	787 mm×960 mm 1/32		http://www.landaco.com.cn
总印张	28.125		
本册印张	2.625	版次	2013年9月第1版
本册字数	46千字	印次	2013年11月第2次印刷
购书热线	010-58581118	定价	80.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物料号 12-2437-46

数学文化小丛书编委会

- 顾 问：谷超豪（复旦大学）
项武义（美国加州大学伯克利分校）
姜伯驹（北京大学）
齐民友（武汉大学）
王梓坤（北京师范大学）
- 主 编：李大潜（复旦大学）
- 副主编：王培甫（河北师范大学）
周明儒（徐州师范大学）
李文林（中国科学院数学与系统科学研究院）
- 编辑工作室成员：赵秀恒（河北经贸大学）
王彦英（河北师范大学）
张惠英（石家庄市教育科学研究所）
杨桂华（河北经贸大学）
周春莲（复旦大学）

本书责任编辑委：赵秀恒

数学文化小丛书总序

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的。数学不仅是一种精确的语言和工具、一门博大精深并应用广泛的科学，而且更是一种先进的文化。它在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，是人类文明的一个重要支柱。

要学好数学，不等于拼命做习题、背公式，而是要着重领会数学的思想方法和精神实质，了解数学在人类文明发展中所起的关键作用，自觉地接受数学文化的熏陶。只有这样，才能从根本上体现素质教育的要求，并为全民族思想文化素质的提高夯实基础。

鉴于目前充分认识到这一点的人还不多，更未引起各方面足够的重视，很有必要在较大的范围内大力进行宣传、引导工作。本丛书正是在这样的背景下，本着弘扬和普及数学文化的宗旨而编辑出版的。

为了使包括中学生在内的广大读者都能有所收益，本丛书将着力精选那些对人类文明的发展起过重要作用、在深化人类对世界的认识或推动人类对世界的改造方面有某种里程碑意义的主题，由学有

专长的学者执笔,抓住主要的线索和本质的内容,由浅入深并简明生动地向读者介绍数学文化的丰富内涵、数学文化史诗中一些重要的篇章以及古今中外一些著名数学家的优秀品质及历史功绩等内容。每个专题篇幅不长,并相对独立,以易于阅读、便于携带且尽可能降低书价为原则,有的专题单独成册,有些专题则联合成册。

希望广大读者能通过阅读这套丛书,走近数学、品味数学和理解数学,充分感受数学文化的魅力和作用,进一步打开视野、启迪心智,在今后的学习与工作中取得更出色的成绩。

李大潜

2005年12月

目 录

一、客观世界中多种多样的对称	1
二、平面图形的对称性	15
三、对称的本质	25
四、平面图形的对称变换群	29
五、置换与置换群	34
六、多元多项式的对称性	39
七、对任意客观事物之对称性的描述	43
八、抽象群	50
九、群的若干应用	58
参考文献	74

一、客观世界中多种多样的对称

人们通常说到的“对称”，往往是指物体的左右对称或者上下对称；其实，“对称”的含义是十分广泛、深刻的。

1974年5月30日，毛泽东主席出人意外地约见了诺贝尔物理学奖得主李政道。

关于这次约见，李政道先生在2000年出版的《对称与不对称》一书（参考文献[5]）（图1）中写道，“使我吃惊的是，他见到我时想了解的第一件事竟是物理学中的对称性。”



图 1

“毛泽东认为，‘对称’实质上是一个静止的概念。而按照毛泽东的观点，人类社会的整个进化过程是基于‘动力学’变化的，动力学是唯一重要的因素，而静力学则不是重要的因素。毛泽东坚持认为，这在自然界也一定是对的。因而，他完全不能理解，对称在物理学中为什么会被捧到如此高的地位。”

“在我们会见时，我是唯一的客人。在我们的椅子之间有一张小桌子，上面有本子、铅笔和常用来待客的绿茶。我把一支铅笔放在本子上，再使本子倾斜朝向毛泽东，然后又朝向我。这支铅笔就在本子上来回滚动。我指出，尽管没有一个瞬时是静止的，然而，从整体而言，这个动力学过程也有对称性。对称这个概念绝不是静止的，它要比其通常的含义普遍很多，而且适用于一切自然现象，从宇宙的产生到每个微观的亚核反应过程。毛泽东很赞赏这简单的演示。然后，他又询问了有关对称的深刻含义以及其他物理专题的许多问题。”

李政道先生还说，“对称与不对称的问题在自然界、艺术和科学中都占有很重要的地位，在物理学中尤其重要。”（参考文献 [5]）

读者现在看到的这本小书，讨论的就是“对称”。我们先从感性上看看平常说到的各种各样的“对称”，然后层层深入，逐步揭示“对称”的本质，并进而用数学方法描述这种本质。

最常见的对称是物体的“左右对称”。天安门城楼、太和殿、埃菲尔铁塔等建筑物，火车、轮船等交通工具，蝴蝶、鸟兽等动物，电视机、鼠标等物件的

外形，图中剪纸、京剧脸谱等艺术品的图案，都是左右对称的例子（图 2）。

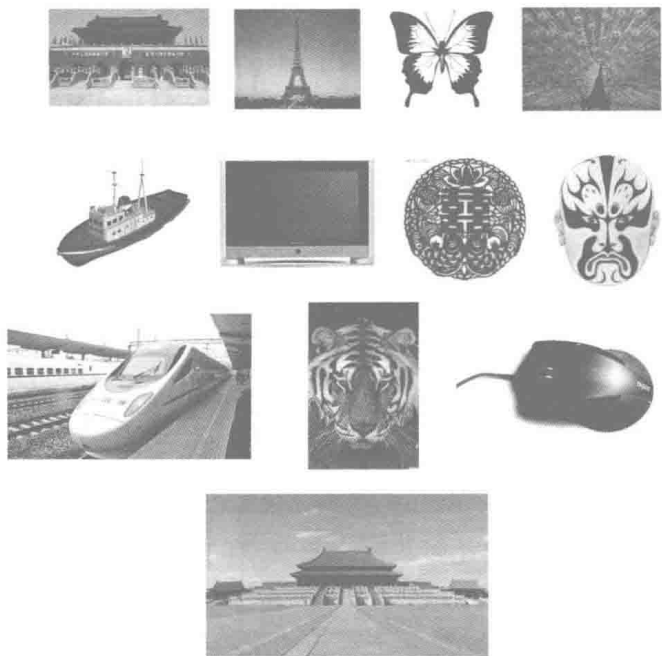


图 2

谁都懂得：买鞋要成双，既不能买一只大一只小的，也不能买两只一边顺儿的；挑选眼镜，常要把眼镜放到桌面上检验一下，左右镜架是否一样长，是否一样高；冬天出门戴皮手套，一定是左手戴左手套，右手戴右手套，也知道两只手套虽然样子差不多，但是左手的手套戴不到右手上，可见大家多少懂得，人的左右脚、左右脸、左右手“很对称”，却

又不相同(图3)。

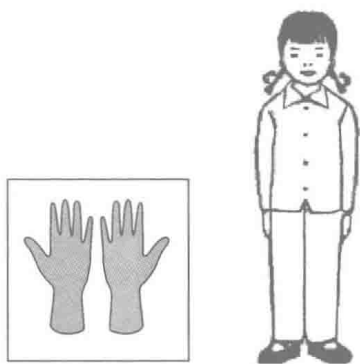


图3

这里所说的物体“左右对称”，其在平面的情形也称为“轴对称”。此外，较常见到的“对称”还有“中心对称”。

初中平面几何的教科书中，有下面两个关于“对称图形”的定义。

定义1：如果一个平面图形沿着平面上一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，那么这个图形叫做轴对称图形，这条直线称为它的对称轴。

定义2：把一个平面图形绕平面上某一点旋转 180° ，如果旋转后的图形能够与原来的图形互相重合，那么这个图形叫做中心对称图形，这个点称为它的对称中心。

物体的“左右对称”，是指物体作为空间的立体图形对一个镜面作反射后，左、右部分能够互相重合，所以也称为“镜面对称”或“反射对称”。类似

地,“中心对称”的概念也可以推广到空间.

方形的桌面,六角形的雪花,圆形的车轮,环形的救生圈,球形的篮球,都是中心对称的例子(图4).不少水生的低等动物的外形呈辐射状,也是中心对称的例子.而生物学中的一些病毒,呈正多面体的形状,也是中心对称的例子(图5).

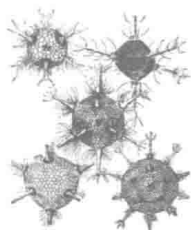


图 4

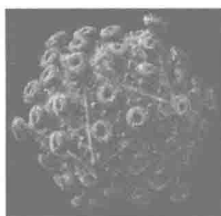


扁形动物

放射太阳虫



某些病毒



艾滋病病毒

图 5

客观世界中的对称是多种多样的.象棋和围棋

的棋盘，中国古代的窗棂，电风扇的扇叶，蜜蜂的蜂窝，花布的图案，相框的装饰边沿，锥形的富士山，不少商标的图案，寓意丰富的太极图，化学中许多物质的分子结构，沿一个固定方向行走时的脚印，也都是“对称”的例子（图 6）。

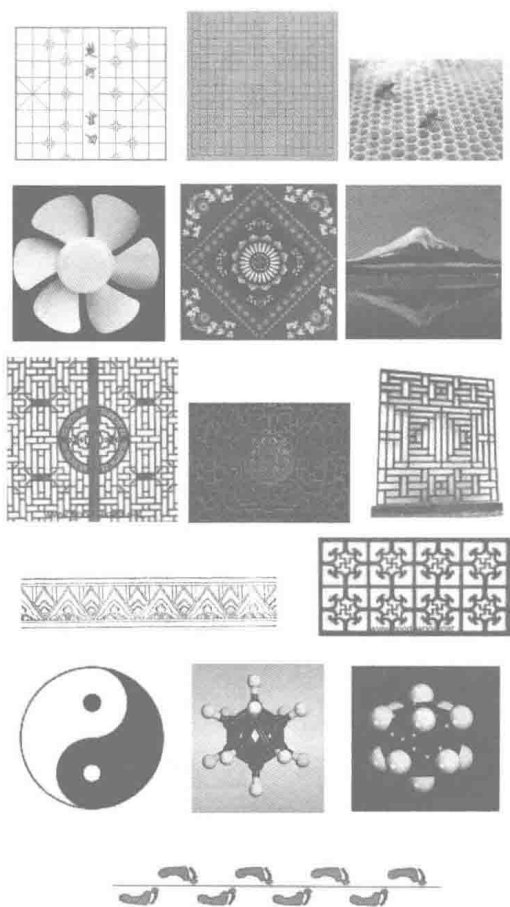


图 6

上面的例子，基本上都是关于图形（平面的和立体的图形）的对称；这种几何方面的对称概念，在几千年前就有了。其实，除了图形的对称外，客观世界中还有许多对称。正如李政道先生所说，“对称这个概念”“要比其通常的含义普遍很多”。

例如文学中的对仗也是一种对称，“明月松间照，清泉石上流”，就含有对称性。下面是中国古代的“回文诗”，倒着念与正着念，效果完全一样，所以也表现出一种对称性：秋江楚燕宿沙洲，燕宿沙洲浅水流；流水浅洲沙宿燕，洲沙宿燕楚江秋。北京的一个商号叫“天然居”，也挂有“客上天然居，居然天上客”的“回文”牌匾。北京还有一种醋叫“宽醋”，其广告词也巧妙地写成了“回文”：好醋宽心宽醋好。

生活中昼夜的交替，春夏秋冬四季的轮回，也表现出自然界的对称性。

物体的相对运动，作用力与反作用力，体育比赛中的循环赛制，都含有“对称”的成分。关于“循环赛制”，大家知道，世界杯足球赛决赛阶段是先分组进行循环赛，决出“16强”后再进行淘汰赛。循环赛制与淘汰赛制在“对称性”上的强弱就不同。在循环赛制下，每一个队与小组内所有的队都要比赛，对于各个队是比较平等的、对称的；而淘汰赛制对于各个队就不很对称，当一个队与某个确定的球队比赛一场后，失败即被淘汰，再没有与其他队比赛的机会了。

再看看数学公式中的对称。某些数学公式表现出一定的对称性，如计算三角形面积的海伦公式

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

其中 $s = \frac{a+b+c}{2}$, 它对于三角形的三条边长 a, b, c 有一定的对称性.

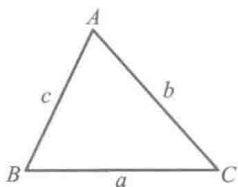


图 7

再如“三角学”中的正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

对于三角形的三条边长 a, b, c 和三个内角 A, B, C 有对称性.

“代数学”中的对称多项式

$$f = x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2$$

对于 x_1, x_2, x_3 有一定的对称性.

复数与其共轭复数

$$a + b\sqrt{-1} \text{ 与 } a - b\sqrt{-1},$$

也表现出某种对称性.

我们还可以比较一下“夫妻关系”与“父女关系”的“对称性”孰强孰弱. 细想想, 两者虽然都是

一男一女，但是夫妻关系是“互为”配偶的关系，应该比父女关系的对称性要强。

有这样一个游戏，是依据“对称”的道理设计的：甲乙两人轮流在一个方桌面上放置硬币，每人每次放置一枚一元钱的硬币，硬币之间不允许有任何重叠，直到方桌上放满为止，第一个放不下的人为输。如果你先放，你能否想出取胜的策略？

该策略是：你先把第一枚硬币放在方桌面的正中，然后在对方放置一枚硬币以后，你则在与他那枚硬币（关于方桌面的中心）对称的位置放置你的一枚硬币；如此不断延续，只要对方有放置硬币的地方，你就一定有放置硬币的地方。但是方桌面是有限的，总有放不下硬币的时候，那时第一个放不下硬币的人一定不是你，而是你的对手，根据游戏规则，对方输了你赢了。

这里还可以说一个与“对称”相关的真实的故事。20世纪80年代有一些英国和美国的科学家，在强烈的激光脉冲照射下产生的碳团簇中，意外地发现 C_{60} 具有超常的稳定性。那时人们并不知道 C_{60} 的分子结构，这些科学家希望搞清60个碳原子是如何结合成一个碳分子的，以致会如此稳定。他们甚至用非常初等的方法去尝试猜测和拼凑 C_{60} 的分子结构。例如用硬纸板剪成正六边形（他们觉得正六边形是相当稳定的），每一个顶点代表一个碳原子，然后用胶水设法把这些正六边形粘成理想的形状。但是经过多次的尝试，他们都不满意自己构造的结果。后来其中有的科学家偶然地看到建筑学家富勒

(R. B. Fuller) 的作品, 受到启发. 富勒设计的薄壳结构建筑物中, 不仅有大量的正六边形, 还掺杂着一些正五边形. 于是他们也剪出一些正五边形的硬纸板, 分别加到原来的那些正六边形硬纸板中, 重新摸索着构造 C_{60} 的分子结构. 有一天, 他们粘成了自认为理想的形状. 他们觉得, 如此精巧、对称、完美的结构, 一定具有高度的稳定性, 一定就是 C_{60} 分子的真实结构. 他们想, 这样对称的结构, 数学家一定知道, 于是马上电话咨询他们认识的数学家. 电话那端的数学家仔细听了他们的描述后, 亲切、认真地回答: “我们确实知道你们粘成的那个结构. 但是你们自己也应该知道, 因为你们粘出来的, 其实就是一个足球啊!” 那时的足球, 正是由 20 块白色的正六边形和 12 块黑色的正五边形构成的, 恰好有 60 个顶点 (图 8). 他们再看看自己辛辛苦苦粘出的模型, “可不是吗!” 他们立刻跑到商店, 买回一个足球. 研究小组的成员列队站在足球后面, 照了一张相.

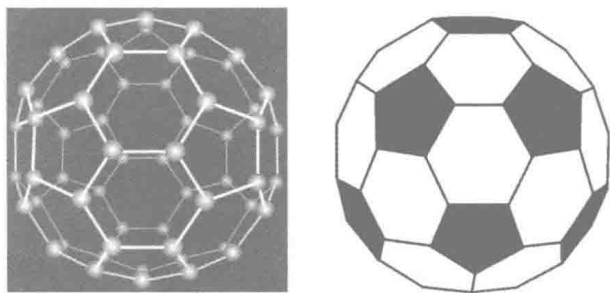


图 8