《著名重点中学各科学习指导与测试》

# 初三平面几何

潘慰高　主编
马元鹿　吴欣　编

南京大学出版社

著名重点中学各科学习指导与测试

# 初三平面几何

主编　潘慰高
编者　马元鹿
　　　吴　欣

南京大学出版社

1996·南京

著名重点中学各科学习指导与测试
初三平面几何
潘慰高　马元鹿　吴　欣编著
*
南京大学出版社出版
（南京大学校内）
江苏省新华书店发行　　阜宁印刷厂印刷
*
开本 787×1092　1/32　印张 7　字数 156 千
1994 年 5 月第 1 版　　1996 年 5 月第 3 次印刷
印数 15001—25100
ISBN 7-305-02151-2/O·123
定价：5.50 元

# 出版说明

为了帮助中学生学好基础知识，掌握基本的技能、技巧，训练思维方法，提高解题能力，我社组织了南京师范大学附中、金陵中学等著名重点中学的特级教师、高级教师，编写了这套“著名重点中学各科学习指导与测试”丛书，它包括高中语文、英语、数学、物理、化学五个学科。

本丛书紧扣教材，每一节分三个部分：第一部分为知识要点，提纲挈领，突出重点、要点，对复习起指导作用；第二部分为学习指导，通过典型例题的分析评述，着重指导解题的思维与方法，提高解题的技能技巧，加强对基础知识和基本技能的训练，以提高学生解题的自觉性、科学性、技巧性；第三部分为练习与测试，供学习用的训练，巩固和提高基本知识、基本技能和基本方法。

本丛书的作者们有厚实的业务基础，丰富的教学经验，培养了一批又一批基础扎实、思维敏捷、作风过硬、能力卓著的优秀学生，在国内享有较高声誉。本丛书是他们数十年经验的总结，智慧的结晶，相信本丛书是广大中学生的良师益友，对指导学习、锻炼思维、提高分析解题能力，掌握基本的知识体系是大有裨益的。

南京大学出版社

# 目 录

# 第六章　相似形

## 一、比例、比例线段

### （一）知识要点

1．比例：两个比相等的式子叫做比例式。比例可以写成如下的形式（只研究所有字母都不等于零的情形）：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$或$a:b=c:d$。

2．比例外项和比例内项：在比例$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$中，$a,d$叫做比例外项，$b,c$叫做比例内项，$d$叫做$a,b,c$的第四比例项。

3．比例中项：如果比例中两个比例内项相等，即为$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$或$a:b=b:c$时，$b$叫做$a,c$的比例中项。

4．比例的性质定理：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longleftrightarrow ad=bc$，符号“$\Longleftrightarrow$”表示从左端可以推出右端，并且从右端也可以推出左端。

5．比例的性质定理的推论：$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}\Longleftrightarrow b^2=ac$。

6．合比性质：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longleftrightarrow\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$。

7．等比性质：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots\cdots=\frac{m}{n}$，（$b+d+\cdots+n\neq$

0 ）$\Longrightarrow \dfrac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}=\dfrac{a}{b}$.

8．两条线段的比：在同一单位下，两条线段长度的比叫做这两条线段的比。

9．比例线段：在四条线段$a,b,c,d$中，如果$a$和$b$的比等于$c$和$d$的比，那么这四条线段叫做成比例线段或简称为比例线段。

10．黄金分割：把一条线段（$AB$）分成两条线段（如图 6-1），使其中较大的线段（$AC$）是原线段（$AB$）与较小线段（$BC$）的比例中项，叫做把这条线段黄金分割。


图6-1

（二）学习指导

1．如何应用比例的性质定理把比例式与等积式互相转化?

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Longleftrightarrow ad=bc$，这个公式表明它可以从左边的比例式推出右边的等积式，并且也可从右边的等积式推出左边的比例式。因此从$ad=bc$转化为比例式可以写出以上八种形式：

（1）$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$；（2）$\dfrac{d}{b}=\dfrac{c}{a}$；

（3）$\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$；（4）$\dfrac{d}{c}=\dfrac{b}{a}$；

（5）$\dfrac{b}{a}=\dfrac{d}{c}$；（6）$\dfrac{b}{d}=\dfrac{a}{c}$；

（7）$\dfrac{c}{a}=\dfrac{d}{b}$；（8）$\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}$。

当$b$是$a,c$的比例中项时，常有以下三种表示形式：

（1）$a:b=b:c$ $\left(\text{或}\frac{a}{b}=\frac{b}{c}\right)$；

（2）$b^2=ac$；

（3）$b=\pm\sqrt{ac}$。

例1 已知：（1）$(3x+2y):(2x-5y)=7:2$；（2）$4x^2-3y^2=xy$，$(x\neq 0, y\neq 0)$。求$x:y$。

解 （1）根据比例的性质定理，得$2(3x+2y)=7(2x-5y)$，$6x+4y=14x-35y$，$8x=39y$，$\therefore x:y=39:8$。

（2）由于等式$4x^2-3y^2=xy$不是等积式，因此先需要进行等价变换，再因式分解，应用零的性质转化为等积式。

$4x^2-3y^2-xy=0$，$(x-y)(4x+3y)=0$，$\therefore x-y=0$和$4x+3y=0$，$\therefore x=y$和$4x=-3y$，$\therefore x:y=1$和$x:y=(-3):4$。

解法二：由$4x^2-3y^2=xy$，$\frac{4x^2-3y^2}{y^2}=\frac{xy}{y^2}$，$4\left(\frac{x}{y}\right)^2-3=\frac{x}{y}$，$4\left(\frac{x}{y}\right)^2-\frac{x}{y}-3=0$，$\left(4\frac{x}{y}+3\right)\left(\frac{x}{y}-1\right)0=$，$\therefore\frac{4x}{y}+3=0$，和$\frac{x}{y}-1=0$，即$\frac{4x}{y}=-3$和$\frac{x}{y}=1$，$\therefore x:y=(-3):4$，和$x:y=1$。

2．学会添设比值为k的方法进行解题：当已知条件是连比时，一般可以设比值为常数k，这样就可以使得比的前项等于比的后项与k的乘积，达到消元归k的目的，简化运算。

例2 已知$a:2b:c=3:5:8$，$9b-2c=6$，求$a,b,c$的值。

解 $a:2b:c=3:5:8$，即$\frac{a}{3}=\frac{2b}{5}=\frac{c}{8}$，设$\frac{a}{3}=\frac{2b}{5}=$

$\frac{c}{8}=k$，则$a=3k$，$2b=5k$，$c=8k$，因此$9b-2c=9\cdot\frac{5k}{2}-2\cdot 8k=\frac{13k}{2}=6$，$\therefore k=\frac{12}{13}$，$\therefore a=\frac{36}{13}$，$b=\frac{30}{13}$，$c=\frac{96}{13}$。

3．巧用比例性质解方程：我们知道比例有如下性质：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longleftrightarrow\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+b}{c-d}$（合分比性质）。在解分式方程时，应用它可以简化解题过程，减少计算量，使问题迅速得以解决。

例3　解方程：（1）$\frac{x^2+x+1}{2x^2-x-1}=\frac{2x^2-x+2}{2x^2+x-2}$；

（2）$\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=2-x$。

**分析**（1）　若直接去分母，把分式方程转化为整式方程，运算就很繁杂，注意到方程的两边的分子和分母的一次项系数和常数项互为相反数，那么我们就可以应用合分比性质，简化运算。

解　$\frac{(2x^2+x+1)+(2x^2-x-1)}{(2x^2+x+x)-(2x^2-x-1)}$

$$=\frac{(2x^2-x+2)+(2x^2+x-2)}{(2x^2-x+2)-(2x^2+x-2)}.$$

即　$\frac{4x^2}{2(x+1)}=\frac{4x^2}{2(2-x)}$ 即

$\therefore$　$4x^2=0$　和　$2(x+1)=2(2-x)$。

$x=0$　和　$x=\frac{1}{2}$。

经检验　$x=0$和$x=\frac{1}{2}$是原方程的解。

**分析**（2）　若先把原方程的左边分母有理化，然后再两

边平方转化为有理方程，显然运算很是复杂，根据方程的特征，应用比例的性质可以简化运算。

$$\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})+(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})-(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}$$

$$=\frac{(2-x)+1}{(2-x)-1},$$

即 $$\frac{2\sqrt{x+1}}{-2\sqrt{x-1}}=\frac{3-x}{1-x},$$

$$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}=\frac{3-x}{x-1}.$$

两边平方，得 $\frac{x+1}{x-1}=\frac{(3-x)^2}{(x-1)^2}$，

$$(x+1)(x-1)^2=(3-x)^2(x-1),$$

$$(x+1)(x-1)^2-(3-x)^2(x-1)=0,$$

$$(x-1)[(x+1)(x-1)-(x-3)^2]=0,$$

$$(x-1)(6x-10)=0,$$

$$x_1=1,\ x_2=\frac{5}{3}.$$

经检验 $x_1=1$ 和 $x_2=\frac{5}{3}$ 都是原方程的解。

（三）测试 6－1　　（45分钟）

一、选择题

1．已知 $a=45\text{cm}$，$b=16\text{cm}$，$c=40\text{cm}$，$d=18\text{cm}$，下列比例式中，正确的是　　（　　）

(A) $a:b=c:d$　　(B) $a:d=b:c$

(C) $c:a=b:d$　　(D) $b:a=c:d$

2．下列各组为三条线段的比，其中可以构成三角形的是　　（　　）

(A)5：20：30　　(B)15：30：20

(C)10：20：30　　(D)5：5：10

3．三角形的三条中位线组成的三角形周长与原三角形周长的比为　（　　）

(A)1：2　(B)1：4　(C)1：$\sqrt{2}$　(D)1：6

4．若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\neq 1$，（$a\neq 0$），且$m\neq 0$，则下列各式中，正确的是　（　　）

(A)$\frac{a}{b}=\frac{c+m}{d+m}$　　(B)$\frac{a}{b}=\frac{c^2}{d^2}$

(C)$\frac{a}{b}=\frac{a+cm}{b+dm}$　　(D)$\frac{a}{b}=\frac{ac}{bd}$

5．已知$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$，则$\frac{x+y+z}{2z}$等于　（　　）

(A)$\frac{4}{9}$　(B)$\frac{9}{4}$　(C)$\frac{8}{9}$　(D)$\frac{9}{8}$

6．如果$a:b=12:8$，且$b$是$a$和$c$的比例中项，那么$b:c$等于　（　　）

(A)4：3　(B)3：4　(C)3：2　(D)2：3

7．如果线段$a=2$cm，$b=3$cm，$c=5$cm，那么以下正确的是　（　　）

(A)$a,b,c$的第四比例项是$\frac{10}{3}$ cm

(B)$(a+1\text{cm})$，$3b$，$4c$，的第四比例项是60cm

(C)$a+c$和$b$的比例中项是$\frac{9}{7}$cm

(D)$a+c$和$b+c$的比例中项是$2\sqrt{7}$ cm

8．点$P$和$Q$在线段$AB$上，并且都在$AB$之间，若$AP:PB=2:3$，$AQ:QB=3:4$，且$PQ=2$，那么$AB$的长等

于 （ ）

(A)12　(B)23　(C)70　(D)105

## 二、填空题

9．若$5y-4x=0$，则$\frac{x}{y}=$\_\_\_\_\_\_，$\frac{y}{x}=$\_\_\_\_\_\_，$\frac{x+y}{y}=$\_\_\_\_\_\_，$\frac{y}{x-y}=$\_\_\_\_\_\_，$\frac{x+y}{x-y}=$\_\_\_\_\_\_，$\frac{x+y}{2x+y}=$\_\_\_\_\_\_，$\frac{x^2}{x^2-y^2}=$______。

10．若$4:x=3:2$，则$x=$\_\_\_\_\_\_；若$(x+2):x=9:2$，则$x=$______；若$1:x=x:(1-x)$，则$x=$____。

11．已知：$a=\frac{1}{2}$，$b=2+\sqrt{3}$，$c=2-\sqrt{3}$，则$a,b,c$的第四比例项$x=$____，$b,c$的比例中项$y=$____。

12．已知：$3a:b:c=2:3:5$，则$(a-c):b=$\_\_\_\_，$(a-3b+2c):(a+3b-2c)=$______。

13．点$C$把线段$AB$内分为$AC:CB=2:3$，且$AC=48\text{cm}$，则$AB=$______；若外分为$AC:CB=3:2$，$AC=48\text{cm}$，则$AB$______。

14．已知等边三角形的边长为$a$，那么它的高与边长的比等于______。

## 三、解答题

15．已知$\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c}$，求证：$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$。

16. 如图，已知：$MN$是矩形$ABCD$的对 称 轴，如果$\frac{AF}{AB}=\frac{AB}{AD}$，求矩形$ABCD$的长$AD$与宽$AB$的比。

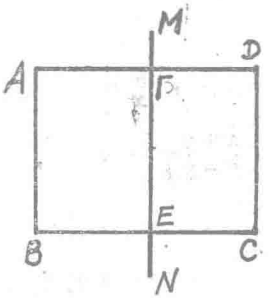


图6-2

17. 已知：$C$是线段$AB$上的一点，$D$是$AB$延长线上的一点，且$AD:DB=AC:CB$，$AB=6\text{cm}$，$AC=3.6\text{cm}$。求$AD$和$DB$的长。

## 四、选做题

18. 在直线$l$上依次有$A, B, C, D, E$五点，且$AB=a$，$AC=b$，$AD=c$，$AE=d$，点$P$也在直线$l$上，且 在$C$，$D$之间，若$BP:PE=CP:PD$，求$AP$的长。

19. 解方程：$\dfrac{\sqrt[3]{41x+2}-\sqrt[3]{3x-1}}{\sqrt[3]{41x+2}+\sqrt[3]{3x-1}}=\dfrac{3}{7}$.

## 二、平行线分线段成比例

### (一)知识要点

1．平行线分线段成比例定理：三 条 平 行线截两条直线，所得的对应线段成比例。

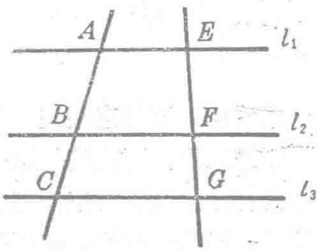

图6-3

如图6-3，$l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$，则 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{EF}{FG}$ 或 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{EF}{EG}$，或 $\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{EG}{FG}$.

2．平行线分线段成比例定理推论 1：平行于三角形一边的直线截其他两边，所得的对应线段成比例。

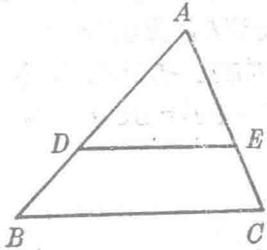

图6-4

如图 6-4，$\triangle ABC$中，$DE /\!/ BC$，则 $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$或$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$或$\dfrac{AB}{DB}=\dfrac{AC}{EC}$.

3．平行线分线段成比例定理推论2：平行于三角形一边，并且和其他两边（或其延长线）相交的直线所截得的三角形的三边与原三角形三边对应成比例。

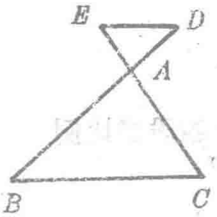


图6-5

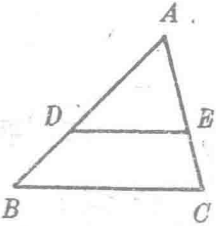


图6-6

如图6-5，6-6，△$ABC$中，$DE \parallel BC$，分别交$AB$，$AC$（或其延长线）于$D$，$E$，则$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$。

（二）学习指导

1．应用第三比做桥梁，当比例式不能直接证明时，可以观察一下，如它们同时都等于第三比，那么就把这个第三比作为桥梁，进行等比代换。怎样才能找到第三比呢？这要因题而定，往往是作某一条线段的辅助平行线，应用平行线分线段成比例定理而得。

例1　如图6-7，△$ABC$中，$D$是$AC$上的一点，延长$CB$到$E$，使$BE=AD$，连结$DE$交$AB$于$F$。求证：$AC \cdot FD=BC \cdot EF$。

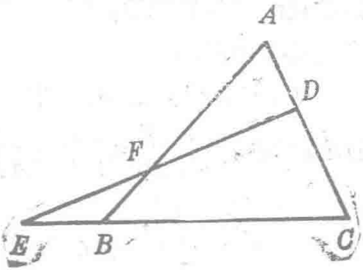


图6-7

分析　把$AC\cdot FD=BC\cdot EF$，化为比例式：$\dfrac{EF}{FD}=\dfrac{AC}{BC}$，因为题图中没有平行线，不能直接应用平行线分线段成比例定理，由于$D,F,E$三点在同一条直线上，我们又需要证明$\dfrac{EF}{FD}$等于第三比$\dfrac{m}{n}$，那么就可以从点$D$，或点$F$，或点$E$作平行线，因为已知条件中有$AD=BE$，所以过$D$或过$E$，作平行线为最佳方法。

**证明一**　过$D$作$DG\parallel AB$交$BC$于$G$，（如图6-8），则

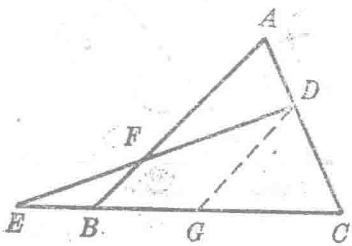


图6-8

$\dfrac{EF}{FD}=\dfrac{BE}{BG}$，$\dfrac{AD}{BG}=\dfrac{AC}{BC}$。

$\because AD=BE$，

$\therefore \dfrac{EF}{FD}=\dfrac{AC}{BC}$。

$\therefore AC\cdot FD=EF\cdot BC$。

**证明二**　过$D$作$DH\parallel BC$交$AB$于$H$，（如图6-9），则

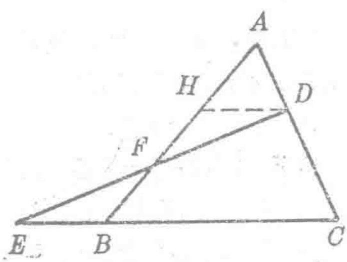


图6-9

$\dfrac{EF}{FD}=\dfrac{BE}{DH}$，$\dfrac{AD}{DH}=\dfrac{AC}{BC}$，

$\because AD=BE$，

$\therefore \dfrac{EF}{FD}=\dfrac{AC}{BC}$，

$\therefore AC\cdot FD=EF\cdot BC$。

**证明三**　过$E$作$EM\parallel AC$交$AB$的延长线于$M$，（如图6-10），则$\dfrac{EF}{FD}=\dfrac{EM}{AD}$，$\dfrac{EM}{BE}=\dfrac{AC}{BC}$，又$\because AD=BE$，$\therefore$