

“十二五”国家重点图书出版规划项目

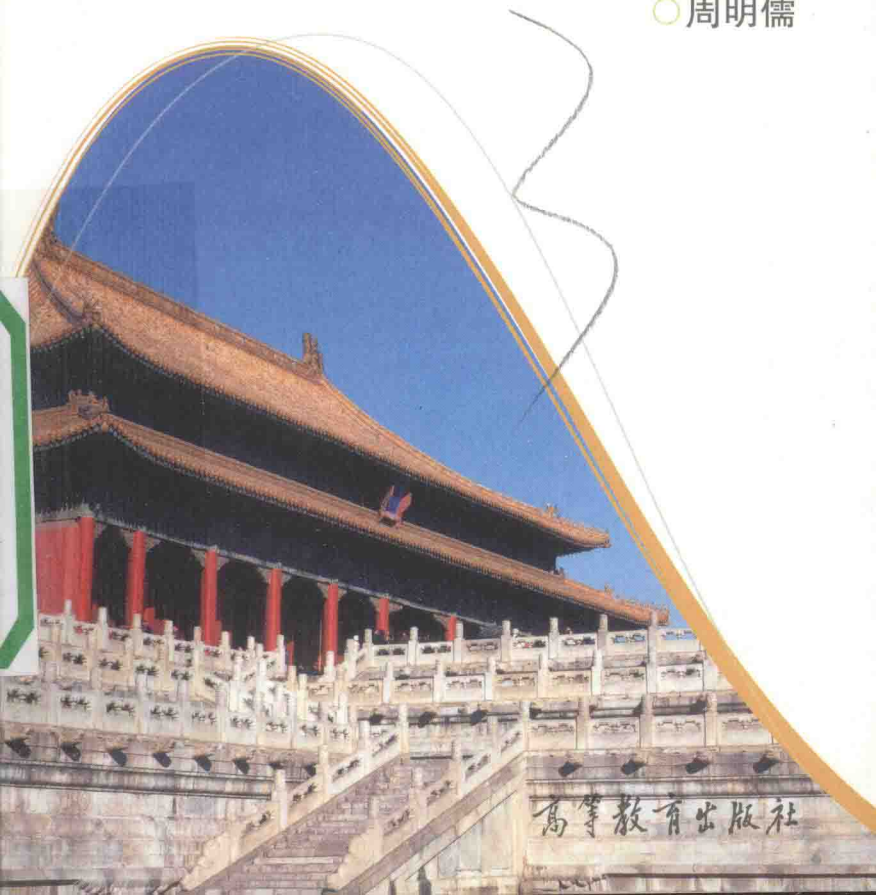
27

□ 数学文化小丛书

李大潜 主编

数学与音乐

○ 周明儒



高等教育出版社

“十二五”国家重点图书出版规划项目

数学文化小丛书

李大潜 主编

藏书

数学与音乐

Shuxue yu Yinyue

周明儒

高等教育出版社·北京

图书在版编目(CIP)数据

数学与音乐 / 周明儒编. -- 北京: 高等教育出版社, 2015. 2

(数学文化小丛书 / 李大潜主编. 第3辑)

ISBN 978-7-04-041856-9

I. ①数… II. ①周… III. ①数学-普及读物②音乐-普及读物 IV. ①O1-49 ②J6-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第015185号

策划编辑	李蕊	责任编辑	蒋青	封面设计	张楠
版式设计	余杨	插图绘制	宗小梅	责任校对	陈杨
责任印制	毛斯璐				

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社址	北京市西城区德外大街4号	网址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印刷	北京中科印刷有限公司	网上订购	http://www.landracom.com
开本	787 mm × 1092 mm 1/32		http://www.landracom.com.cn
印张	4.5	版次	2015年2月第1版
字数	80千字	印次	2015年2月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定价	12.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物料号 41856-00

数学文化小丛书编委会

- 顾 问：谷超豪（复旦大学）
项武义（美国加州大学伯克利分校）
姜伯驹（北京大学）
齐民友（武汉大学）
王梓坤（北京师范大学）
- 主 编：李大潜（复旦大学）
- 副主编：王培甫（河北师范大学）
周明儒（江苏师范大学）
李文林（中国科学院数学与系统科学研究院）
- 编辑工作室成员：赵秀恒（河北经贸大学）
王彦英（河北师范大学）
张惠英（石家庄市教育科学研究所）
杨桂华（河北经贸大学）
周春莲（复旦大学）
- 本书责任编委：赵秀恒

数学文化小丛书总序

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的。数学不仅是一种精确的语言和工具、一门博大精深并应用广泛的科学，而且更是一种先进的文化。它在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，是人类文明的一个重要支柱。

要学好数学，不等于拼命做习题、背公式，而是要着重领会数学的思想方法和精神实质，了解数学在人类文明发展中所起的关键作用，自觉地接受数学文化的熏陶。只有这样，才能从根本上体现素质教育的要求，并为全民族思想文化素质的提高夯实基础。

鉴于目前充分认识到这一点的人还不多，更远未引起各方面足够的重视，很有必要在较大的范围内大力进行宣传、引导工作。本丛书正是在这样的背景下，本着弘扬和普及数学文化的宗旨而编辑出版的。

为了使包括中学生在内的广大读者都能有所收益，本丛书将着力精选那些对人类文明的发展起过重要作用、在深化人类对世界的认识或推动人类对世界的改造方面有某种里程碑意义的主题，由学有

专长的学者执笔,抓住主要的线索和本质的内容,由浅入深并简明生动地向读者介绍数学文化的丰富内涵、数学文化史诗中一些重要的篇章以及古今中外一些著名数学家的优秀品质及历史功绩等内容。每个专题篇幅不长,并相对独立,以易于阅读、便于携带且尽可能降低书价为原则,有的专题单独成册,有些专题则联合成册。

希望广大读者能通过阅读这套丛书,走近数学、品味数学和理解数学,充分感受数学文化的魅力和作用,进一步打开视野、启迪心智,在今后的学习与工作中取得更出色的成绩。

李大潜

2005年12月

前 言

在人们的印象中，数学与音乐学是截然不同的两个学科。数学研究现实世界和数学的抽象世界中的数量关系、空间形式、运动变化、思维模式、社会行为等，音乐学研究音乐的本质及其规律；数学严谨、冷峻，音乐浪漫、激情；数学是科学、理性的，音乐是艺术、感性的；数学家求真，音乐家求美；数学定理是确定的，音乐形态是多变的。但只要作深入一点的了解和思考，人们就会发现，数学与音乐有着太多的联系。

音乐和数学有不同特点的时代印记，但相互促进、脉络相通；

对美的追求是数学和音乐共有的特征；

逻辑性、严密性、抽象性、符号化不仅是数学理论的特点，也是音乐理论的特点；

形象思维不仅是音乐家创造性工作的特色，也在数学家的创造性工作中必不可少；

数学语言没有国界，音乐也没有国界。

数学与音乐有着太多的联系，值得关注，值得研究。中国传统音乐博大精深，成就巨大，值得自豪，值得传承。但中国传统音乐没有能够像西方音乐一样在科学理论上更上一层楼的历史事实，也值得反思。

我是一个数学工作者和教师，音乐是业余兴趣之一，这本小册子，是我自学音乐理论结合数学的一些思考，抛砖引玉，不当之处请音乐界、数学界的专家和读者们指正；也期望通过本书的介绍能有更多的人喜欢数学和音乐，研究数学和音乐。

周明儒

2014年7月

目 录

一、历史视角下的数学与音乐	1
二、基础乐理简介与数学解读	17
三、音律学的发展及数学原理	34
(一) 6 世纪之前的中国音律学	34
(二) 18 世纪前的西方音律学	44
(三) 三分损益与五度相生实质相同	50
(四) 为世界认可的十二平均律	56
四、朱载堉: 十二平均律的创立者	63
五、数学阐明了声学的基础	81
六、数学揭示了乐音的本质	89
七、数学给音乐插上了翅膀	102
八、理念和思维视域中的数学与音乐	110
参考文献	127

一、历史视角下的数学与音乐

在人类文明发展史上，数学和音乐都属于最早形成的学科，一个国家和地区数学和音乐的发展水平，与该国家和地区的社会生产发展及文明进步水平有着密切的关系；而音乐和数学之间又是密切关联的，音乐实践提出了大量的数学问题，诸如乐器设计、管口校正、音律制定、数制换算、声学原理等，促进了数学的研究，数学的成果又指导了音乐的实践，帮助了音乐理论的发展，二者互相促进，水涨船高。

古代中国音乐和数学领先世界

据已发掘的古代遗存证明，中国的音乐文化距今已有 9000 年。中国最早的乐器是 1984 年至 1987 年在河南舞阳县贾湖新石器时代遗址的墓葬群中出土的骨笛，它们是用鹤类动物的尺骨锯去两端关节钻孔而制成的。其中早期的 2 支骨笛，距今约 8600 年至 9000 年，一支开有 5 孔，另一支开有 6 孔，能奏出四声和完备的五声音阶；中期的 14 支骨笛，距

今约 8200 年至 8600 年,未残损的 12 支骨笛均为 7 孔,能奏出六声和七声音阶;晚期的 7 支骨笛,距今约 7800 年至 8200 年,完好的 3 支骨笛 2 支为 7 孔,1 支为 8 孔,能奏出完整的七声音阶和七声之外的一些变化音(图 1)。

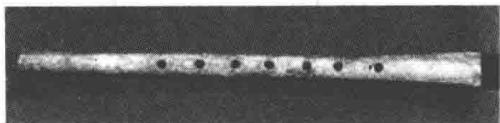


图 1 舞阳贾湖骨笛

1987 年 11 月,音乐家黄翔鹏(1927—1997)等借助闪光频谱测音仪对贾湖骨笛进行了测音研究。他们选定了最完整、无裂纹的一支 7 孔骨笛进行了检测,发现这支骨笛的音阶结构至少是六声音阶,也有可能是七声齐备的、古老的下徵^①调音阶,发音清润柔美。音乐家萧兴华、徐桃英先生还利用这支骨笛吹奏了我国传统名曲——《小白菜》,悠扬的音乐,令在场的人激动不已。

1953 年发现的西安半坡仰韶文化遗址,出土了一枚距今 6700 年左右的一音孔陶埙,音乐家吕骥对此陶埙进行了测音研究,用音叉测得的音和用闪光测音机测定的结果证明,当时的音阶与我们现在的五声音阶中的小三度音程接近;此后,甘肃等地出土的新石器时期的三音孔埙,已有了宫、角、徵、羽四

^① 徵(zhǐ)为古代五音宫、商、角、徵、羽之一,相当于 sol。

音列, 接近了五声音阶, 为商、周时期的五声、七声音阶和十二律的建立奠定了基础; 1976 年从河南安阳殷墟妇好^①墓出土的五音孔埙, 则显示至少在晚商期间, 中国已经出现了完整的七声音阶。已经在 11 个音间构成了半音关系, 只差一个音就能凑全“十二律”。

1978 年, 在湖北省随县发掘了一座墓葬, 主人是 2400 年前战国初期曾国一位名乙的诸侯国君。在曾侯乙墓葬中出土了 7000 多件文物, 其中有钟、磬、琴、瑟、笙、箫、篪(chí)、鼓等八种乐器。特别是共出土制作于公元前 433 年的编钟 64 件, 按大小和音高为序编成 8 组悬挂在 3 层钟架上。上层 19 件为 3 组钮钟, 中下两层共 45 件为甬钟, 中层 3 组, 下层 2 组。在下层甬钟的中间另有一件特钟(图 2)。



图 2 曾侯乙编钟

在古代, 其他国家的钟, 截面都是圆形的。由于圆钟周边曲率相等, 无论敲击何处只会发出一个声

^① 妇好为商朝国王武丁之妻, 武丁在位时间是公元前 1250 — 前 1192 年。

音,特别是由于圆钟会将声音不断反射,敲击后声音衰减得慢,后一个音发出了,前一个音还在响,因而无法作为乐器演奏,通常在教堂和寺庙中用来发出活动信号,因此也就有了“晨钟暮鼓”之说和“夜半钟声到客船”的诗作。中国古代的编钟,绝大多数为椭圆形,即古人所说的“合瓦形”,这在世界上是独一无二的。

曾侯乙编钟的截面就是合瓦形,且边角有棱,声音衰减较快,所以能编列成组,作为旋律乐器使用。而且敲击曾侯乙编钟每个钟的正鼓和侧鼓部位,均可发出两个音,且每钟的两音构成三度音程关系,其中小三度的有 42 种,大三度的有 22 种。曾侯乙编钟的音色优美,音质纯正,基调与现代的 C 大调相同。音域宽达五个八度,中声部约占三个八度,由于有音列结构大致相同的编钟,形成了三个重叠的声部,几乎能奏出完整的十二个半音,可以奏出五声、六声或七声音阶的音乐作品,是世界上已知的最早具有十二个半音关系的乐器。

钟上共有音律和音乐术语铭文 2800 余字。除上层一组六件散钟只有音名外,其余各件均有律名共 28 个,分属曾、楚等六国。这些律名大都是十二律的不同名称,其中楚国已有全部十二个律名。由此可见,春秋时期十二律名应已产生,到战国早期已经形成完整体系。

更令世人惊讶的是,实测曾侯乙编钟得到的频率,与美籍德国著名音乐家欣德米特 (P. Hindemith, 1895—1963)《作曲指南》一书中“音序 I”的频率数

据竟十分相近，“音序 I”是根据泛音原理计算得到的，为世界公认（参看 [1] 103—105）。

1978年8月1日，沉寂了2400多年的曾侯乙编钟，重新向世人发出了它的千古绝响。编钟演奏从《东方红》开始，接着是中国古曲《楚殇》、外国名曲《一路平安》和中国民歌《草原上升起不落的太阳》，最后是《国际歌》。1984年新中国成立35周年时，编钟进京，在中南海怀仁堂为各国驻华大使演奏了中国古曲《春江花月夜》《楚殇》以及《欢乐颂》等中外名曲。1997年7月1日，在中英政府举行的香港政权交接仪式现场，来自世界各地的数千嘉宾，欣赏了由音乐家谭盾创作并指挥、用曾侯乙编钟复制件演奏的《交响曲1997：天·地·人》，雄浑深沉的乐声，激荡人心，震撼寰宇。2008年北京奥运会的颁奖音乐，是由曾侯乙编钟原声和玉磬声音交融产生的“金玉齐声”，中外观众在“金声玉振”的天籁之音中，见证了一枚枚奥运金牌的颁发。2010年曾侯乙编钟又在上海世界城市博览会城市足迹馆展出，湖北编钟队演奏了世博会的主题曲《城市，让生活更美好》。

曾侯乙编钟的铸就，充分反映了在2400年前的战国初期，我国数学、物理学、声学 and 铸造学均具有世界领先的水平。

琴、瑟、琵琶和箏是中国古代四大弦乐器，先秦典籍记载的琴都是五弦，战国时期到西汉初年，古琴逐步演变，到汉魏之际已经定型为性能卓越的七弦琴，其史实有：曾侯乙墓出土的十弦、无徽琴，1993

年湖北荆门市郭店 1 号墓出土的战国中期的七弦琴以及 1973 年湖南长沙市马王堆三号墓出土的公元前 178 年西汉七弦琴。三国时魏末文学家、思想家与音乐家嵇康 (223—263) 在《琴赋》中有“徽以钟山之玉”、“弦长故徽鸣”之句,说明琴上已经有了标志音位的“徽”。

中国古代的定型七弦琴,有七根弦,十三个徽。七根弦早期分别称为“宫、商、角、徵、羽、少宫、少商”或“宫、商、角、徵、羽、文、武”;至隋、唐时期,逐渐改为“一、二、三、四、五、六、七”(参看图 3)。一弦外侧的面板上所嵌的十三个圆点的标志,称为徽。徽多用螺钿制成,也有用金、银、玉、石等质地的材料精制而成。以右端岳山为 0,左端龙龈为 1,七徽位于中点 $\frac{1}{2}$ 处,一至六徽和八至十三徽关于七徽对称:一至六徽分别位于 $\frac{1}{8}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}$ 处;八至十三徽分别位于 $\frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}$ 处。因此,徽的点位实为弦的泛音振动节点,自然而然成,其音律为

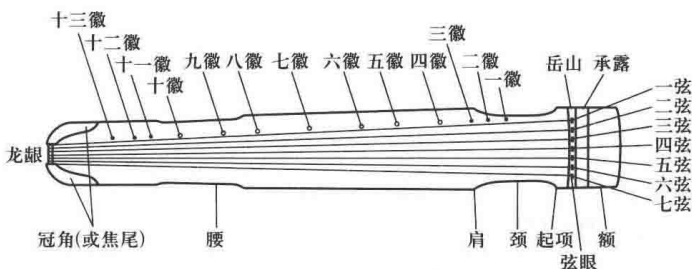


图 3 中国古琴琴面结构示意图

纯律。在按音弹奏时徽则作为按音音准的参考，徽不仅是为了便于演奏和调弦，更重要的是作为音位的坐标用于记谱。由此可见，在公元 4 世纪之前，中国古琴已经正式应用了纯律音阶。

骨笛和埙开孔位置的确定、编钟的铸造、古琴的设计等，既须经验的积累，也应有数学的考量。中国至少在公元前 1250 年左右的商朝晚期就已经出现了完整的七声音阶；收编、记录春秋时期齐相管仲（公元前？—前 645）及其学派思想言行的《管子》一书中，则阐明了确定音律的三分损益法；公元前 500 年左右，中国已有了严格的十进位值制筹算记数，使精细计算成为可能；现存中国古代最早的数学著作《周髀算经》和《九章算术》分别成书于公元前 2 世纪和公元前 1 世纪，而京房六十律与何承天新律分别制定在公元前 1 世纪和公元 1 世纪；宋元时期中国传统数学达到了世界领先的水平，珠算研究与应用在明代达到巅峰，朱载堉（1536—1611）则在 1581 年创立了当今世界通用的十二平均律。音乐和数学在几千年的发展中，一直互相促进内在关联。

近代欧洲数学和音乐后来居上

西方音乐源于古希腊文明，现存的古希腊音乐史料极少。最先以理论的方式来解释音乐现象的古希腊哲学家和数学家毕达哥拉斯（约公元前 580 年—前 500 年），创立了音律的五度相生法。从公元前 1 世纪罗马帝国建立到 14 世纪，欧洲主要是宗教音乐。6 世纪末，罗马天主教皇格里高利一世为了

宗教利益,着手统一各地教会的仪式和圣歌演唱,8世纪欧洲成了无伴奏单声部格里高利圣咏的一统天下。9世纪开始,圣咏逐步发展为多声部复调音乐,13世纪得到广泛使用,同时管风琴成为教堂唯一的伴奏乐器;15、16世纪文艺复兴,世俗音乐突破宗教音乐的垄断蓬勃发展,1517年德国马丁·路德领导宗教改革,新教^①音乐用母语代替了拉丁语演唱圣歌;从歌剧在意大利诞生的1600年到巴赫(S. Bach, 1685—1750)去世的1750年史称“巴洛克时期”^②,复调音乐全盛发展并向主调音乐^③转型,数字低音创作方法^④导致了和声学的诞生,进而促使了大小调体系的产生和教会调式的结束。

文艺复兴大大推动了文学艺术、数学和自然科学的发展,到16世纪,五线谱记谱法得以完善;1665年法国天主教神父 J. J. Souhaitty 首创数字简谱^⑤,促进了音乐在民间的推广;音乐实践中提出的和声、和弦等众多理论问题,推动了数学家、物理学家们的科学研究。17世纪初意大利科学家伽利略(Galileo Galilei, 1564—1642)首先开始运用科学的方法研究

① 我国称为基督教。

② 音乐风格的时间划分参考[8]。

③ 主调音乐是多声部音乐的一种,整部作品的进行以其中某个声部,多数是以高音部的旋律为主,其他声部以和声或节奏等陪衬、伴奏。

④ 作曲时只写旋律和低音并在低音旁用数字标明该音在和弦中的位置。

⑤ 数字简谱后经数学教师 P. Galin 等整理,19世纪在欧洲流行,传到日本后经李叔同(弘一大师,1880—1942)引进我国。