数学与哲学

张景中 ◎ 著

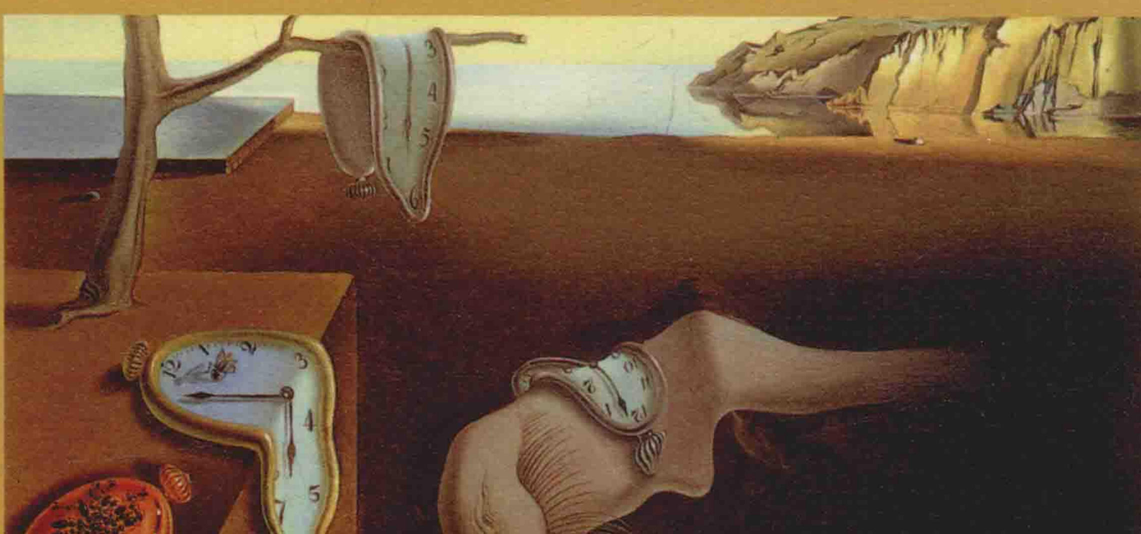
SCIENCE & HUMANITIES

06

（珍藏版）

数学科学文化理念传播丛书（第二辑）

Mathematics and Philosophy



大连理工大学出版社
Dalian University of Technology Press

数学与哲学

张景中◎著

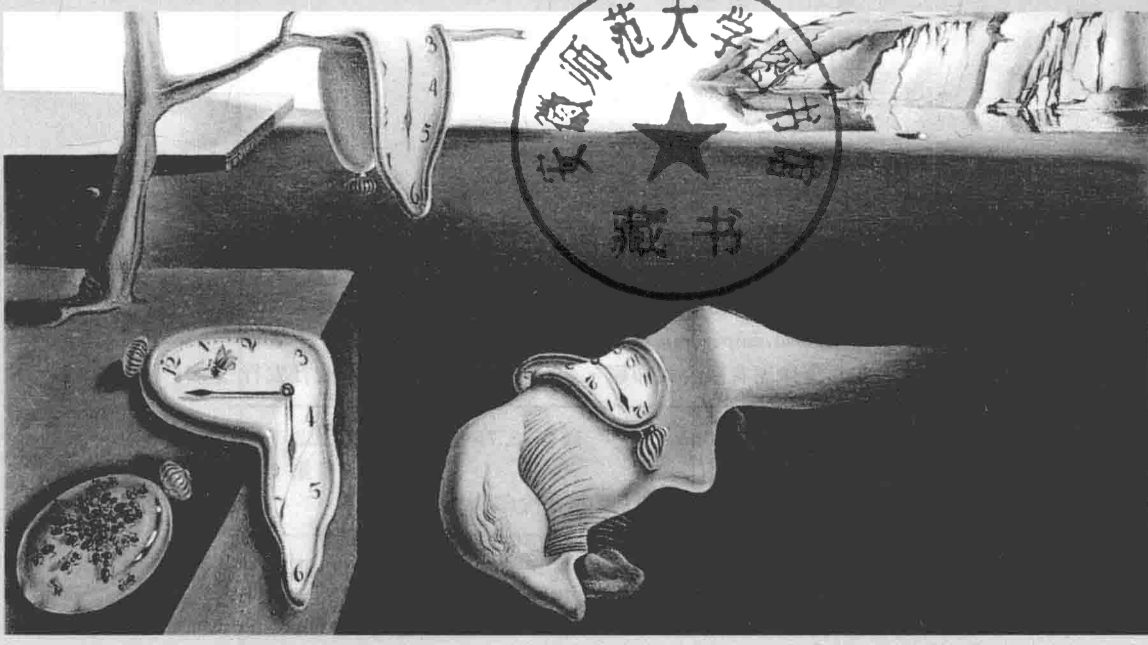
SCIENCE & HUMANITIES

06

（珍藏版）

数学科学文化理念传播丛书（第二辑）

Mathematics and Philosophy



大连理工大学出版社
Dalian University of Technology Press

图书在版编目(CIP)数据

数学与哲学 ：珍藏版 / 张景中著. — 2 版. —大连 ：大连理工大学出版社，2016.1
(数学科学文化理念传播丛书)
ISBN 978-7-5611-9821-6

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①数学哲学问题—研究 Ⅳ. ①O1-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 088020 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023
发行:0411-84708842 传真:0411-84701466 邮购:0411-84708943
E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn
大连住友彩色印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:188mm×260mm 印张:8.75 字数:122 千字
2008 年 7 月第 1 版 2016 年 1 月第 2 版
2016 年 1 月第 1 次印刷

责任编辑:刘新彦 王 伟 责任校对:田中原
封面设计:冀贵收

ISBN 978-7-5611-9821-6 定价:39.00 元

SCIENCE & HUMANITIES

数学科学文化理念传播丛书·第二辑

编写委员会

写在前面*

一

20 世纪 80 年代，钱学森同志曾在一封信中提出了一个观点，他认为数学应该与自然科学和社会科学并列，他建议称之为数学科学. 当然，这里问题并不在于是用"数学"还是用"数学科学"，他认为在人类整个知识系统中，数学不应该被看成是自然科学的一个分支，而应提高到与自然科学和社会科学同等重要的地位.

我基本上同意钱学森同志的这个意见. 数学不仅在自然科学的各个分支中有用，同时在社会科学的很多分支中也有用. 随着科学的飞速发展，不仅数学的应用范围日益广泛，同时数学在有些学科中的作用也愈来愈深刻. 事实上，数学的重要性不只在于它与科学的各个分支有着广泛而密切的联系，而且数学自身的发展水平也在影响着人们的思维方式，影响着人文科学的进步. 总之，数学作为一门科学有其特殊的重要性. 为了使更多人能认识到这一点，我们决定编辑出版《数学・我们・数学》这套小丛书. 与数学有联系的学科非常多，有些是传统的，即那些长期以来被人们公认与数学分不开的学科，如力学、物理学以及天文学等. 化学虽然在历史上用数学不多，不过它离不开数学是大家都看到的. 对这些学科，我们的丛书不打算多讲，我们选择的题目较多的是那些与数学的关系虽然密切，但又不大被大家注意的学科，或者是那些直到近些年才与数学发生较为密切关系的学科. 我们这套丛书并不想写成学术性的专著，而是力图让更大范

* "一"为丁石孙先生于 1989 年 4 月为《数学・我们・数学》丛书出版所写，此处略有改动；"二"为丁先生为本丛书此次出版而写.

围的读者能够读懂，并且能够从中得到新的启发. 换句话说，我们希望每本书的论述是通俗的，但思想又是深刻的. 这是我们的目的.

我们清楚地知道，我们追求的目标不容易达到. 应该承认，我们很难做到每一本书都写得很好，更难保证书中的每个论点都是正确的. 不过，我们在努力. 我们恳切希望广大读者在读过我们的书后能给我们提出批评意见，甚至就某些问题展开辩论. 我们相信，通过讨论与辩论，问题会变得愈来愈清楚，认识也会愈来愈明确.

二

大连理工大学出版社的同志看了《数学・我们・数学》这套丛书，认为本套丛书的立意与该社目前正在策划的《数学科学文化理念传播丛书》的主旨非常吻合，因此出版社在征得每位作者的同意之后，表示打算重新出版这套书. 作者经过慎重考虑，决定除去原版中个别的部分在出版前要做文字上的修饰，并对诸如文中提到的相关人物的生卒年月等信息做必要的更新之外，其他基本保持不动.

在我们正准备重新出版的时候，我们悲痛地发现我们的合作者之一史树中同志因病于上月离开了我们. 为了纪念史树中同志，我们建议在丛书中仍然保留他所做的工作.

最后，请允许我代表丛书的全体作者向大连理工大学出版社表示由衷的感谢！

丁石孙

2008 年 6 月

目 录

一 “万物皆数”观点的破灭与再生
——第一次数学危机与实数理论

古代的哲学家们往往是博学多才的人.他们不但能滔滔不绝地讲他们的哲学道理,也能讲自然科学、社会科学,特别是数学.你不要以为这是因为古人特别聪明,或是后来哲学家们退化了.那时,各门科学还没有分家,哲学是包罗万象的知识部门.而且那时人类的知识比现在贫乏得多.所谓博学,是相对于当时多数人知识贫乏而言的.实际上,古代所谓精通数学的哲学家,他的数学知识未必赶得上今天的一般中学生.

在古希腊,哲学家大都格外重视数学.最早的唯物主义哲学家泰勒斯,提出了原子唯物论的德谟克里特,最早的唯心主义哲学家毕达哥拉斯,都曾到埃及学习几何知识.创立理念论唯心主义体系的柏拉图,也特别推崇数学知识.在这些人当中,最强调数学的,在数学上成就最大的,当推毕达哥拉斯.

1.1 毕达哥拉斯学派的信条——万物皆数

毕达哥拉斯曾游历埃及、波斯学习几何、语言和宗教知识.回意大利后在一个名叫克罗顿的沿海城市定居.他招收了三百门徒,建立了一个带有神秘色彩的团体,被称为毕达哥拉斯学派.

毕达哥拉斯被他的门徒们奉为圣贤.凡是该学派的发明、创见,一律归功于毕达哥拉斯.这个学派传授知识,研究数学,还很重视音乐.“数”与“和谐”,是他们的主要哲学思想.

他们沉醉于数学知识带给他们的快慰,产生了一种幻觉:数是万物的本原.数产生万物,数的规律统治万物.

他们认为:1 是最神圣的数字.1 生 2,2 生诸数,数生点,点生线,线生面,面生体,体生万物.首先生出水、火、气、土四大元素,四大元素又转化出天、地、人及万事万物.

现在看来,“万物皆数”的说法当然是荒唐可笑的.但是,毕达哥拉斯在古代哲学中最早指出事物间数量关系所起的重要作用,这在人类认识史上是一个进步.

与此类似,中国古代有“一生二、二生三、三生万物”的说法.这也是万物皆数的哲学思想.但不像毕达哥拉斯那么认真,那么明确,那么系统.

有趣的是,正是毕达哥拉斯自己的发现,导致“万物皆数”观点的破灭.

1.2 第一个无理数

毕达哥拉斯在欧洲是第一个发现了勾股定理并给出了证明的人.据说,他是观察地板上的方形图案时,发现直角三角形斜边上正方形的面积恰好是两条直角边上正方形面积之和,于是受到启发,进一步找出了一般证明的.(图 1)

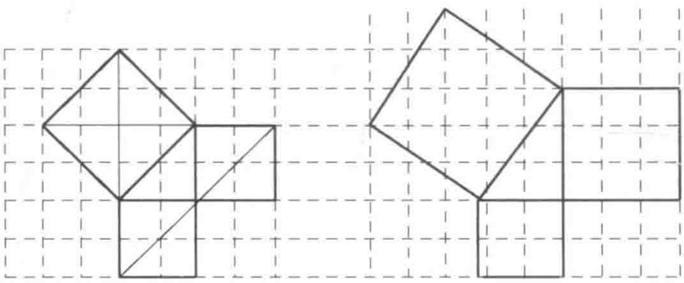


图 1

根据勾股定理,边长为 1 的正方形,其对角线的长度应当是$\sqrt{2}$.毕达哥拉斯(也许是他的门徒)发现,$\sqrt{2}$既不是自然数,也不是分数.因为,如果有两个自然数 m 和 n 使

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m} \quad (\frac{n}{m}\text{既约}) \tag{1.1}$$

则两端平方以后便可得

$$2m^2 = n^2 \tag{1.2}$$

从(1.2)可见 n 是偶数,因为$\frac{n}{m}$既约,所以 m 是奇数.于是(1.2)左端不能被 4 整除,右端可以被 4 整除.这是个矛盾.

这个事实的发现,是毕达哥拉斯学派的一大成就.因为它不能从经验与观察得出,只能靠抽象的思考证明.它标志着人类的思维有了更高的抽象能力.

关于勾股定理,在中国、巴比伦,有数学家比毕达哥拉斯知道得早得多.但东方数学家始终没有发现$\sqrt{2}$不能表为分数这一矛盾.这也许与东方数学仅着重于解决实际问题,忽视抽象思维有关.这一现象颇有趣.也许数学史与哲学史的研究者能从社会、政治、文化的角度做更好的说明.

但这一发现引起了毕达哥拉斯学派的惶恐不安.因为他们心目中的数只有自然数与自然数之比——分数.万物皆数,就是万物皆可用自然数或分数表示.如今发现边长为 1 的正方形的对角线这个明明白白地摆在那里的东西竟不能用"数"表示,岂不证明自己学派的信条不是真理吗?

毕达哥拉斯学派千方百计封锁,不让这一发现传出去.甚至把泄露了这一秘密的一位青年门徒抛入大海(另一说法是这一门徒发现了$\sqrt{2}$,因而对"万物皆数"有异议,被抛入海),但这个发现最后终于被传播开来.

当时研究数学的希腊学者们,虽然不一定赞同"万物皆数"的观点,但却仍认为在数学当中,算术比几何更基本,更重要.现在知道了有些几何线段不能用数表示,便对数的重要性有了怀疑,转而把几何看成更基本的数学了.于是,几何学的研究便繁荣昌盛起来.直到非欧几何被发现,几何在数学中的基础地位才又让位于算术.

1.3 无理数之谜

本来,哲学家们认为世界上的量都可以用数表示.因为分数可以描述极小极小的量.在一根长度为 1 的线上,中点可以用$\frac{1}{2}$表示,把线分成 3 段,分点可以用$\frac{1}{3}$和$\frac{2}{3}$表示,分成 5 段,分点可用$\frac{1}{5}$、$\frac{2}{5}$、$\frac{3}{5}$、$\frac{4}{5}$

表示. 这样,用分数可以表示的点是密密麻麻的. 任何两个分数,无论多么近,它们之间还有无穷多个分数. 这么多的数,居然还不能表示出线段上某些点的长度,这一事实当时的哲学家感到难以理解. 数的万能的力量被否定了. 这便是所谓第一次数学危机.

还有,边长为 1 的正方形的对角线的长度是什么呢? 是$\sqrt{2}$. $\sqrt{2}$又是什么呢? 它是不是数? 不是数,它为什么能表示确定的几何量? 是数,为什么求不出它的准确值? 在这个问题上,欧洲哲学家与数学家在两千多年中一直陷在迷雾之中. 数学家们一方面为了解题不得不使用根式,另一方面又说不清带根号而得不出准确值的东西是不是数. 直到 17 世纪,还有一些数学家坚决不承认无理数是数.

无理数之谜与连续性的概念密切相关.

1.4 连续性的奥秘

世界上有些平平常常的事,仔细想想又有点怪. 比如说,两个朋友几天不见了,偶然在街上碰见,彼此马上就能认出来,打招呼. 能认出来,似乎是当然的事. 但细追究起来,这又很怪. 几天之内,两人的模样变了没有呢? 当然变了. 要是几天之内不变,那几年、几十年也不会变,人怎么能由小到大,到老呢. 既然变了,又为什么能认出来呢? 只能说,变化很小. 变化小到什么程度呢? 时间越短,变得越小. 如果你盯着一个婴儿不停地看,你简直不可能说他在变. 但几年之后,他确实明显变大了. 这变化是逐渐地,不间断地.

世界上的事物在不停地变化. 但我们仍能知道甲是甲,乙是乙,这就是因为事物的变化大多是一点一点改变的,通常不会一下子突然变个样. 这就给我们一个感觉:许多变化是连续的.

事物变化的连续性是我们的感觉. 感觉不一定准确. 电影实际上是由许多不同的画面构成的,它不是连续变化的. 但因为相继的两个画面相差甚微,我们便以为它是连续的了. 我们的直觉告诉我们,世界上许多事物的变化是真正连续的,不是像电影那样由微小的跃变所组成的. 测量技术永远不可能证实这种直觉. 事实上,如果物质由分子、原子组成,事物的成长是不可能连续进行的. 但这仍不妨碍我们形成"连续"的概念. 我们可以想:时间的变化是连续的. 运动是连续的. 一

个点从一条线段的这一端达到另一端，它应当经过线段上的一切点！

经过一切点又是什么意思呢？设线段长度是1，我们来考察运动的点与出发点的距离.在运动中，这个距离从0渐渐地变为1.它经过线段上的一切点，就是这个距离的数值取遍0到1之间的一切数.

那么，0到1之间的一切数又是哪些数呢？当初，人们还不知道$\sqrt{2}$这种无理数，这一切数就指的是比0大比1小的分数.有了无理数，就麻烦了.在0与1之间有无穷多无理数，$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{3}$，$\frac{\sqrt{2}}{4}$，…，要多少有多少.是不是把这些带根号的怪物添上就够了呢？很难说.说不定什么时候又发现了新的无理数.

连续性的问题是自古以来哲学家们都谈论过的问题，它与无穷问题密切相关.因为连续变化必然经过无穷个不同的阶段.毕达哥拉斯，芝诺，亚里士多德，莱布尼兹……都讨论过连续性.但如何建立"连续性"概念，却始终是哲学家面前的难题.

这困难不可能在哲学中解决.因为它已转化为数学上的困难：在0与1之间，除了有理数之外究竟还有哪些数？更进一步："全体实数"是哪些东西？

在哲学上对连续性的看法是说不清楚的.对于数学家与物理学家，在弄清实数是什么之前，也总是说不清的.例如：

亚里士多德认为，当两个互相接触的物体各自的端点成为两者的共同端点时，就会出现连续的连接.他不承认连续直线由无穷多点组成的说法.

伽利略反对亚里士多德的看法，认为连续的东西可以由无限个元素组成，好比一种可以研成极细粉末的固体.

莱布尼兹提出"连续性定律"，认为世界上的一切都是连续变化的.他和牛顿大体上有相同的看法：数学上的连续性是用无穷小量来定义的一个理想概念.这个无穷小量，似乎类似于伽利略的"极细粉末".

这里有一个困难：一粒粉末有没有体积？如果体积是0，加起来岂不还是0？如果体积不是0，无穷粒粉末加起来体积又怎能有限呢？可能亚里士多德已经看到了这个困难，所以坚决反对直线（或物体）由

无穷多个点组成. 但是,正如伽利略指出的那样,有穷个不可分的东西组成的东西,又怎能连续变化呢?

1.5 戴德金分割

直到19世纪末,即两千多年的探索之后,数学上严格的实数理论建立了,连续统的公认概念才出现.

戴德金与康托几乎同时地提出了实数理论. 这里是按戴德金的方法陈述的.

设想一条连续的直线,它由无穷多点组成. 取定原点和单位尺度,直线上的许多点都可以用分数表示. 这是我们已经知道了的. 我们又知道一些不能用分数表示的点,比如$\sqrt{2}$代表的点. 我们不知道的是,为了使直线是连续的、天衣无缝的东西,还需要添上些什么.

设想用一把锋利无比的刀,猛地砍向直线,会发生什么情况呢?

这一刀,应当砍在直线的某一点 P 上. 如果不然,砍在空隙里,直线它还能叫天衣无缝吗? 于是,如此细的直线被从 P 处斩为两截. 问题是:点 P 在哪一段上呢? 左边,右边?

我们只能说:不在左边,就在右边.(图 2)

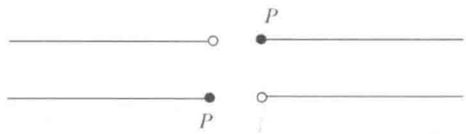


图 2

这样一想,直线的连续性就归结为一个直观而简单的事实:不论从什么地方折断,折断的地方总有一个点.

但这会不会成为同语反复呢? "地方",不就是点吗?

我们可以设法消除这个同语反复的潜在危险,不用点来规定"地方".

直线上已经有了很多用有理数表示的点. 直线一断,就把这些有理点分成较大的和较小的两个集合,两集合之间就确定了一个位置,这就是"折断"了直线之处.

用数学语言说,就是把有理数分成两个集合 A、B. 如果 A 中每个数都比 B 中每个数小,这一对集合$\{A,B\}$就叫作有理数的一个分割.

A 叫作分割的下集，B 叫作分割的上集. 有理数的分割确定了上下两集之间的位置.

有时这个位置已经被有理数占据了. 比如，A 是所有的负分数之集，B 是其余的有理数，则 B 中有最小数 0，0 就是直线折断之处. 因此，要是 A 有最大数或 B 有最小数，就说分割$\{A,B\}$确定了一个有理数——即 A 的最大数或 B 的最小数.

如果 A 中没有最大数、B 中也没有最小数呢？这是可能发生的. 比如，所有那些平方大于 2 的正有理数（如$\frac{8}{5}$，$\frac{5}{3}$，2，…）组成 B 集，其余的有理数组成 A 集. 这个分割的下集无最大数，上集也无最小数. 它留出了一个空隙，这个空隙就应当请一个无理数填补. 这个无理数正是$\sqrt{2}$.

结论有了：有理数的一个分割确定一个实数. 这个实数也许是有理数（如果分割不产生空隙），也许是无理数（如果有空隙）.

这种分割叫作“戴德金分割”. 说得干脆一点，实数就是有理数的分割.

利用有理数的＋、－、×、÷可以规定分割的四则运算；用有理数的大小可以定义分割的大小. 也就是定义了实数的＋、－、×、÷与大小.

回头再想，问题很简单. 把有理数之间的缝隙都填上，直线不就连续了吗？问题本身就提供了解答！这么“简单”的答案，世界上一些最善于思考的脑袋里也居然要两千年才产生出来！

科学的发展，重大概念的产生，是举步维艰的. 任何一个创造，在实现之前，都是困难的. 因为人们是在无知中摸索. 摸到之后，就成为简单的了.

实数说清了，一切事物的量变又可以用数刻画了.

1.6　连续归纳原理

第一次数学危机被克服了. 各种各样的彼此实质上等价的实数理论建立起来了. 数学家建立了一系列的定理来刻画实数的性质.

有趣的是，有一条十分简单、十分便于应用和掌握的定理，直到 20 世纪 80 年代才被发现.

这就是连续归纳原理，或者叫连续归纳法. 它与熟知的数学归纳法十分相似：

关于实数的连续归纳法①

设 P_x 是关于实数 x 的一个命题. 如果——

(1) 有某个实数 x_0，使对一切实数 $x<x_0$，有 P_x 成立；

(2) 若对一切实数 $x<y$ 有 P_x 成立，则有 $\delta_y>0$，使 P_x 对一切实数 $x<y+\delta_y$ 成立. 那么，对一切实数 x 有 P_x 成立.

关于自然数的数学归纳法

设 P_n 是关于自然数 n 的一个命题. 如果——

(1*) 有某个自然数 n_0，使对一切自然数 $n<n_0$，有 P_n 成立；

(2*) 若对一切自然数 $n<m$ 有 P_n 成立，则 P_n 对一切自然数 $n<m+1$ 也成立. 那么，对一切自然数 n 有 P_n 成立.

这两种归纳法极为相似. 这在某种程度上说明了连续的实数系与离散的自然数系在一定条件下的统一性.

那么，连续归纳法在实数理论中有什么地位呢？

已经弄清：

(1) 它可以作为刻画连续性的公理，以替代目前实数理论中的有关公理.

(2) 从它可以用统一的模式推出已知的一系列关于实数的定理.

(3) 从它可以用统一的模式证明微积分中涉及连续性的各个命题.

连续归纳法的发现，有可能使实数理论变得更加简明而易于掌握. 因而它也许会进入微积分的基础教程.

对于连续性的认识，数学上是越来越清楚了. 但哲学上的问题依然存在：数学连续性与人的感性上认识的连续性是不是一回事呢？它是不是与人的经验一定符合呢？

有各种看法.

有人认为，数学连续性是精神的实在，而经验是对精神实在的认识.（柏拉图主义）

有人认为，数学连续性是不能用于经验的，它是为了增强初等数学力量的辅助概念. 我们只知道它不与初等数学矛盾.（希尔伯特）

---

① 张景中：《连续归纳法与一般归纳原理》，四川教育学院学报，1986，1.