



水科学博士文库

*Integral and Fractional Order
Calculus Rheological Model
and Applications*

整数及分数阶微积分 流变模型研究及应用

黄耀英 郑宏 著

$$\sigma(t) = \eta \frac{d^\beta \varepsilon(t)}{dt^\beta}, 0 \leq \beta \leq 1$$



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

水科学博士文库

*Integral and Fractional Order
Calculus Rheological Model
and Applications*

整数及分数阶微积分 流变模型研究及应用

黄耀英 郑宏 著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书以水利水电工程为依托,以整数及分数阶微积分流变模型理论为基础,对岩石、节理岩体、混凝土、堆石料的流变性状进行了研究。全书共7章,包括绪论、岩石整数阶流变模型研究、节理岩体整数阶流变模型研究、混凝土整数阶流变模型研究、混凝土整数阶流变模型反馈研究、堆石料整数阶流变模型研究、岩体分数阶流变模型研究等内容,具有较高的学术和应用价值。

本书可供水工结构工程、岩土工程和工程力学等领域的科研和工程技术人员阅读,也可作为高等院校相关专业研究生的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

整数及分数阶微积分流变模型研究及应用 / 黄耀英, 郑宏著. — 北京: 中国水利水电出版社, 2016.4
(水科学博士文库)
ISBN 978-7-5170-4272-3

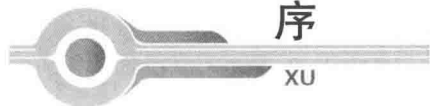
I. ①整… II. ①黄… ②郑… III. ①微积分—应用
—流变体—研究 IV. ①037

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第077317号

书 名	水科学博士文库 整数及分数阶微积分流变模型研究及应用
作 者	黄耀英 郑宏 著
出版发行	中国水利水电出版社 (北京市海淀区玉渊潭南路1号D座 100038) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: sales@waterpub.com.cn 电话: (010) 68367658 (发行部)
经 售	北京科水图书销售中心(零售) 电话: (010) 88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	中国水利水电出版社微机排版中心
印 刷	北京嘉恒彩色印刷有限责任公司
规 格	170mm×240mm 16开本 12.75印张 243千字
版 次	2016年4月第1版 2016年4月第1次印刷
定 价	60.00元

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社发行部负责调换

版权所有·侵权必究



序

XU

黄耀英、郑宏两位教授主撰的《整数及分数阶微积分流变模型研究及应用》一书，即将由中国水利水电出版社出版，我有机会事先阅读原稿，实感荣幸。著者嘱我写篇序言，我也欣然同意。

所有的工程材料都具有一定的流变特性，岩石、混凝土、堆石料等均不例外。众所周知，随着西部大开发和西电东送的深入开展，高陡边坡、高坝大库、大型地下洞室等工程，涉及大量关于复杂岩体、混凝土、堆石料等流变性能课题，例如，大量的现场量测和室内试验都表明，对于软弱岩石以及含有夹层破碎带的松散岩体，其流变特性十分显著；即使是比较坚硬的岩体，如受多组节理裂隙的切割，其剪切流变也会达到相当的量值。因此，在高陡边坡、大型地下洞室的建设中，经常遇到岩体压、剪变形的历时增长情况。而高混凝土坝在施工中会产生很大的温度应力，从浇筑第一仓混凝土开始，高混凝土坝的温度场、应力场都随着时间而不断变化，由于混凝土的徐变，尤其是早龄期的徐变，对缓解拉应力，延缓开裂方面起重要的作用，因此，在计算高混凝土坝的温度应力时，一定要考虑混凝土徐变的影响。此外，堆石体的流变对面板堆石坝应力变形的影响近来已经为工程科技界所认识和重视，特别是随着建坝高度的增加，堆石体的流变特性更为显著，稍有不慎将引起面板的脱空甚至开裂，因此，在设计混凝土面板堆石坝时，应合理计入堆石体的流变变形。虽然整数阶微积分流变模型在水利工程中得到广泛的应用，但大量的实验表明，许多黏弹塑性材料的流变特性是非指数型的，有记忆性、传统的整数阶微积分流变模型不能精确地描述它们的力学行为。近年来，分数阶微积分流变模型的引入，为黏弹塑性材料的流变特性的精确描述开辟了新的途径。因此，建立合理的流变分析模型，描述和模拟水利工程材料力学特性与时间之间的

关系，以进行水利工程的长期稳定安全评价，已成为当务之急。

针对上述问题，黄耀英、郑宏两位教授近些年采用整数阶和分数阶微积分理论对岩石、节理岩体、混凝土和堆石料的流变模型进行了较全面的分析和反分析，并在这些研究成果的基础上，撰写成《整数及分数阶微积分流变模型研究及应用》。拜读之后，我认为本书有以下一些特点：一是内容系统和全面。不仅有整数阶流变模型，还介绍了分数阶流变模型。在整数阶流变模型中，既包括岩土类材料的流变模型，还包括混凝土、堆石料的流变模型。此外，还介绍了这些流变模型的反分析问题。二是内容新颖。例如，假设工程材料的变形均存在时间效应，采用流变模型研究了岩石和混凝土的开裂、混凝土坝接缝的非线性力学特性，以及研究了堆石料的湿化变形的时变分析。另外，拉伸压缩徐变是否一致，目前尚未有定论，该书研究了拉压异性弹性徐变的数值仿真算法，以及研究了基于拉压异性徐变的实测应变转换应力的算法。三是内容具有显著的实用性。对主要方法都引举工程实例作示范，并不是纯理论说教。因此，本书不仅具有高的学术水平，更具有重要的实际意义。

当然，流变模型研究是一个复杂的课题，作者尝试将不同工程材料的流变模型研究纳入工程科技理论体系，以及试图将整数阶微积分流变模型和分数阶微积分流变模型也纳入同一体系中研究，虽然尚未做到尽如人意的程度，但作者无疑已迈出了重要的一步。我深信本书的出版必将对工程材料流变模型的研究起到良好的推动作用，我也深信作者将把流变模型的研究推向新的高度。

欣喜之余，写了个人感受，谨以为序。

中国工程院院士



2016年1月



前言

QIANYAN

流变效应广泛存在于各类水利、岩土工程中，无论是地面的边坡、大坝，还是地下的巷道、矿柱等都存在流变特性。对流变特性的研究，首先需要通过室内试验、现场试验或原型监测等获得不同工程材料流变的内在规律；然后依据内在演变规律，建立预报模型，这样就可以对工程异常演变现象进行物理成因解析，以及对工程将来的演变进行预测与控制。由此可见，对流变问题进行研究以建立合理的流变分析模型十分重要。英国科学家开尔文曾说：“我的目标就是要证明，如何建造一个力学模型，这个模型在我们所思考的无论什么物理现象中，都将满足所要求的条件。在我没有给一种事物建立起一个力学模型之前，我是永远也不会满足的。如果我能够成功地建立起一个模型，我就能理解它，否则我就不能理解。”为此，本书试图采用整数和分数阶微积分理论建立岩石、节理岩体、混凝土、堆石料的流变模型。

相对于其他专著分别对岩石、节理岩体、混凝土、堆石料的流变模型进行阐述，本书尝试将不同工程材料的流变模型研究纳入同一理论体系。本书认为工程材料的变形均存在时间效应，瞬时变形是时变效应的特例，由此本书尝试采用弹-黏塑性模型研究混凝土、岩石的开裂以及混凝土坝接缝的非线性力学特性等，并探讨了位移直接法是否适用于流变断裂问题分析；在节理岩体、混凝土、堆石料的流变特性方面，本书尝试将加锚节理岩体等效弹黏塑性模型改进为等效黏弹塑性模型、将常用的混凝土弹性徐变模型改进为弹塑性徐变模型，以及类比混凝土热学力学性能变化规律的组合指数式，从唯象角度建议了一种组合指数型堆石料流变模型；与此同时，本书还基于理论自治的原则研究了不同应力分量下黏性系数之间的关系、应变计组测值转化三维空间应力理论严谨的计算公式，以及以

三参数指数流变模型为例对堆石料理论严谨的三维流变速率公式进行了研究,而且由推导的三维流变速率计算公式研究了轴向应变、体积应变和广义剪切应变的合理关系式;此外,本书试图将整数阶微积分流变模型和分数阶微积分流变模型纳入同一体系中研究,尝试将分数阶微积分的黏弹性模型和黏塑性模型的一维本构关系推广为三维本构关系,推导了流变应变增量计算公式,并应用于不同岩体结构的加速流变分析;另外,本书还探讨了考虑塑性徐变的实测应变转化应力的算法,以及基于实测应变反馈大坝混凝土实际徐变度的算法;至于拉伸压缩徐变是否一致,目前尚未有定论,但本书尝试研究了拉压异性弹性徐变的数值分析算法,以及研究了基于拉压异性徐变的实测应变转换为应力的算法;这或许正是学术研究之魅力所在。

本书是在黄耀英博士后出站报告和博士论文的基础上,对作者近年从事整数及分数阶微积分流变模型研究的总结。其中,黄耀英博士论文和博士后工作报告分别由吴中如院士和郑宏研究员指导完成。本书中关于混凝土徐变的理论研究得到国家自然科学基金项目(批准号 51209124)资助。在研究过程中,河海大学沈振中教授等给予作者许多指导和建议,在此谨表谢忱。

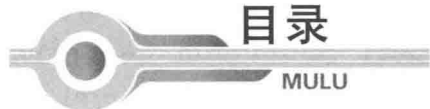
本书承蒙中国工程院院士吴中如教授在百忙中审读并撰写序,作者对此表示衷心感谢!

本书的出版得到三峡大学学科建设经费的资助。

由于整数和分数阶微积分流变模型是一个正在迅速发展的研究方向,在理论和实践上都有很大的拓展和完善空间,每年有大量的文献发表,本书无意写成一本教科书类的专著,而是试图以作者自身研究及应用成果为主干进行写作。主要目的是与同行交流心得体会。限于作者的水平,书中难免存在一孔之见的不妥之处,恳请并期待同行们的批评指正。

作者

2015 年 12 月



目录

MULU

序

前言

第 1 章 绪论	1
1.1 模型研究服从的基本假设	1
1.2 模型研究遵循的推理规则	1
1.3 模型研究的目的	2
1.4 本书研究的内容	2
第 2 章 岩石整数阶流变模型研究	6
2.1 概述	6
2.2 黏弹性本构模型分析	7
2.3 黏塑性本构模型	13
2.4 岩石流变模型的数值分析方法	16
2.5 算例分析	23
2.6 弹-黏塑本构模型优选及参数识别分析方法	27
2.7 本章小结	31
第 3 章 节理岩体整数阶流变模型研究	33
3.1 概述	33
3.2 软弱岩石和不连续结构面的流变模型	33
3.3 软弱岩石和不连续结构面的流变增量形式	36
3.4 薄层单元基本假设和简化讨论	40
3.5 加锚节理岩体等效流变模型	45
3.6 节理岩体等效损伤流变模型	54
3.7 岩体结构加速流变破坏和信息熵理论	61
3.8 基于实测变形的典型滑坡体弹黏塑性参数反馈	68
第 4 章 混凝土整数阶流变模型研究	77
4.1 概述	77

4.2	弹塑性徐变模型	77
4.3	拉压异性弹性徐变数值分析	87
4.4	基于弹-黏塑性模型分析混凝土材料的受拉开裂	96
4.5	基于弹-黏塑性模型分析混凝土大坝接缝	102
4.6	基于信息熵理论分析混凝土黏弹性流变断裂	107
4.7	基于弹-黏塑性模型分析钝裂缝带模型的裂缝扩展单元 能量演变	111
第5章	混凝土整数阶流变模型反馈研究	116
5.1	概述	116
5.2	基于弹性徐变模型的实测应变转换应力	116
5.3	考虑塑性徐变的实测应变转换应力	119
5.4	考虑拉压异性徐变的实测应变转为应力	126
5.5	基于实测应变反馈大坝混凝土徐变度	133
第6章	堆石料整数阶流变模型研究	143
6.1	概述	143
6.2	堆石坝流变分析	143
6.3	基于工程类比法反馈堆石坝流变	151
6.4	基于组合指数型流变模型分析堆石坝流变	159
6.5	面板堆石坝三维湿化变形的时变分析	169
第7章	岩体分数阶流变模型研究	178
7.1	引言	178
7.2	分数阶微积分流变模型基本原理	179
7.3	算例分析	182
7.4	本章小结	185
	参考文献	186

第 1 章 绪 论

1.1 模型研究服从的基本假设

在本书中，除个别内容外，都要服从以下假设。

(1) 连续性假设。假定整个物体的体积都被组成这个物体的介质所填满，不留下任何空隙。这样，物体内的一些物理量（例如应力、应变、位移、温度、能量等）才可能是连续的，因而才可能用坐标的连续函数来表示它们的变化规律。

本书采用薄层单元模型或接触面单元模型来模拟结构物中的接缝以及岩基中的节理、裂隙等，这些模型仍然归属于连续介质模型的范畴。

(2) 小变形假设。这就是说，假定物体受力以后，整个物体所有各点的位移都远远小于物体原来的尺寸，因而应变和转角都远小于 1。这样，在建立物体变形以后的平衡方程时，就可以用变形以前的尺寸来代替变形以后的尺寸，而不致引起显著的误差，并且，在考察物体的应变及位移时，转角和应变的二次幂或乘积都可以略去不计。

本书进行结构加速流变破坏的分析时，仍然采用的是小变形假设。

(3) 无初始应力假设。假设物体处于自然状态，即在力和温度变化等外界因素作用之前，物体内部是没有应力的。

本书进行岩体结构分析时，没有考虑初始地应力的影响。

1.2 模型研究遵循的推理规则

哲学中的推理规则如下。

规则 I：寻求自然事物的原因，不得超出真实和足以解释其现象者。

为达此目的，哲学家们说，自然不做徒劳的事，解释多了白费口舌，言简意赅才见真谛；因为自然喜欢简单性，不会响应多余原因的侈谈。

规则 II：因此对于相同的自然现象，必须尽可能地寻求相同的原因。

例如：人与野兽的呼吸、欧洲与美洲的石头下落、炊事用火的光亮与阳光、地球反光和行星反光。

规则 III：物体的特性，若其程度既不能增加也不能减少，且在实验所及范



围内为所有物体所共有，则应视为一切物体的普遍属性。

因为，物体的特性只能通过实验所了解，普适的属性只能是实验上普适的，只能是既不会减少又绝不会消失的。不会因为梦幻和凭空臆想而放弃实验证据，也不会背弃自然的相似性，这种相似性应是简单的，首尾一致的。人们无法逾越感官而了解物体的广延，也无法由此深入物体内部；但是，因为假设所有物体的广延是可感知的，所以也把这一属性普遍地赋予所有物体。

规则Ⅳ：在实验哲学中，必须将由现象所归纳出的命题视为完全正确的或基本正确的，而不管想象所可能得到的与之相反的种种假说，直到出现了其他的或可排除这些命题、或可使之变得更加精确的现象之时。必须遵循这一规则，以不脱离假说归纳出的结论。

由推理规则来看，本书采取的研究方法遵循因果论、还原论和决定论，将水利、岩土工程中存在的各种不确定性，采用确定性的理论进行分析，没有引入不确定性的数学理论分析水利、岩土工程中存在的各种不确定性。

1.3 模型研究的目的

目的Ⅰ：发现事物演变的内在规律。

目的Ⅱ：依据事物演变的内在规律，建立预报模型，对事物异常演变现象进行物理成因解析，以及对事物将来的演变进行预测和控制。

1.4 本书研究的内容

在工程实践中，混凝土、黏土、堆石料、岩石以及在高温作用下的金属等，都具有明显的流变特性。其中，混凝土的流变还与施加荷载时混凝土的龄期等因素有关，堆石料的材料参数与应力状态有关。

整数阶微积分是描述欧几里得（Euclid）空间的有力工具。经典流变模型理论就是用整数阶微积分这个工具得到整数阶微分型本构方程。例如将弹簧元件、阻尼器元件和圣维南元件进行串联或并联，组成元件模型来模拟复杂材料的应力-应变关系，调整模型的参数和组合元件的个数，使得模型的应力-应变曲线和试验结果相一致。为了很好地拟合试验结果，有的模型使用了多个元件，这样的做法虽然达到了较好的拟合效果，但却增加了参数的个数。

分数阶微积分被发现是一个解决物理力学建模难题的有力数学工具。分数阶微积分建模仅需要由试验直接拟合的几个物理意义明确的参数，方程简明。

例如理想固体的应力-应变关系满足胡克 (Hooke) 定律: $\sigma(t) - \epsilon(t)$, 理想流体满足牛顿 (Newton) 定律: $\sigma(t) - d^1\epsilon(t)/dt^1$, 如果将 $\sigma(t) - \epsilon(t)$ 改写为 $\sigma(t) - d^0\epsilon(t)/dt^0$, 则有充分的理由认为介于理想固体和理想流体之间的材料应该满足 $\sigma(t) - d^\beta\epsilon(t)/dt^\beta$ ($0 \leq \beta \leq 1$), 它不仅仅简单地包含了理想固体和理想流体, 而且刻画了处于它们之间的其他材料。显然, 分数阶微积分流变模型的引入, 仅仅需要少数几个参数就可以模拟复杂的应力-应变关系, 这是整数阶微积分流变模型难以比拟的。

本书在 1.1 节所述的基本假设的前提下, 采用 1.2 节所述的推理规则, 以 1.3 节所述的研究目的, 采用整数和分数阶微积分流变模型对节理岩体、混凝土和堆石料进行研究。全书共 7 章: 第 2 章和第 3 章叙述岩体的整数阶流变模型正反分析, 第 4 章和第 5 章叙述混凝土的整数阶流变模型的正反分析, 第 6 章叙述堆石料的整数阶流变模型的正反分析, 第 7 章叙述岩体分数阶流变模型。

第 2 章介绍岩石整数阶流变模型的正反分析。在正分析部分, 针对线性黏弹性模型, 介绍了应力张量、应力偏量和球应力状态下黏性系数之间的关系的分析; 然后采用数值算例验证当计算时间足够长时, 弹-黏塑性模型计算位移和弹塑性模型计算位移之间的关系; 最后介绍反分析部分, 针对弹-黏塑性本构模型中塑性势、屈服函数的函数具有不确定性, 进行弹-黏塑性模型优选研究。

第 3 章介绍节理岩体整数阶流变模型的正反分析。薄层单元是一种常用的模拟岩体结构面的模型, 本章首先论述了薄层单元基本假设和简化; 然后将加锚节理岩体等效弹黏塑性模型改进为等效黏弹塑性模型, 并采用数值试验方法研究系统锚杆对节理岩体等效凝聚力的影响; 接着基于应变等效性假设对节理岩体等效损伤流变模型进行研究; 与此同时, 将信息熵理论应用于黏弹性及黏塑性问题分析, 对比单元弹性应变能和单元总应变能对应的信息熵, 并将信息熵应用于不同岩体结构的加速流变破坏分析; 最后介绍反问题, 即针对由室内试验或现场原位试验确定的弹黏塑性参数一般为“点参数”, 与实际参数有较大差别, 基于实测位移, 采用正交设计法和优化算法, 反馈典型滑坡体的弹黏塑性参数。

第 4 章介绍混凝土整数阶流变模型正分析。混凝土是一种徐变体材料, 在计算混凝土温度应力时, 需要考虑加载龄期对混凝土徐变的影响。但现有的混凝土温度应力仿真计算是以弹性徐变理论为基础, 导致计算应力与实际应力不符。在这一章中, 首先将常用的混凝土弹性徐变模型改进为弹塑性徐变模型; 然后探讨变应力作用下的拉压异性徐变的弹性徐变方程的求解; 接着假设开裂变形存在时间过程, 研究采用弹-黏塑性模型分析混凝土材料的受拉开裂的算

法；与此同时，研究基于弹塑性徐变模型进行混凝土接缝仿真计算；最后基于信息熵理论对黏弹性材料的断裂问题进行研究，以及采用弹-黏塑性模型研究钝裂缝带模型裂缝扩展单元能量演变规律。

第5章介绍混凝土整数阶流变模型反分析。由于室内试验的局限性（小试件、湿筛、理想养护条件等），通过室内徐变试验获得的徐变参数难免与实际情况存在一定差异，埋设在混凝土内的应变计组和无应力计实测应变是评价混凝土应力状态的有效途径。但将实测应变转换为应力的计算方法落后于数值计算方法，为此，本章首先针对当前采用应变计组实测应变计算三维空间实际应力的公式不够完善，研究理论严谨的应变计组测值转化三维空间实际应力计算公式；然后探讨考虑塑性徐变的高混凝土坝实测应变转换应力的算法；接着探讨考虑拉伸压缩异性徐变的实测应变转换应力计算公式；最后探讨基于实测应变的大坝混凝土实际徐变度的反演方法。这些计算方法的研究旨在提高混凝土应力状态评价的可靠性。

第6章介绍堆石料整数阶流变模型正反分析。原型监测表明面板堆石坝一般存在比较显著的流变现象，而且堆石料浸水饱和后将产生湿化变形。目前国内学者对堆石料流变和湿化的计算模型、方法开展了大量研究，但不同文献给出的堆石料三维剪切流变速率计算式存在差异，以及轴向应变、体积应变和广义剪切应变的关系式也存在差异，此外，现有的堆石料流变模型一般只有一个指数式，难以同时合理地反映蓄水初期和蓄水后期的堆石坝沉降变化规律。为此，在这一章中，首先以三参数指数流变模型为例对堆石料三维流变速率进行研究，以甄别这些差异；接着类比混凝土热力学性能变化规律的组合指数式，从唯象角度建议一种既能较好反映堆石坝流变变形规律，又便于数学运算的组合指数型流变模型；与此同时，针对面板堆石坝蓄水后，渗流饱和存在时间过程，即堆石料浸水后的湿化变形并不是瞬时产生，而是一个渐进发展过程，为此探讨湿化变形的时变分析方法以及研究三维湿化应变计算公式。与之相反，建立了堆石料流变模型，还需要确定流变参数，因此，本章针对室内试验参数一般与堆石坝实际参数差异较大，对于待建的面板堆石坝不能及时获得实测变形进行堆石坝参数反馈的问题，介绍了一种采用工程类比法，结合堆石坝流变数值计算反馈面板堆石坝材料参数的方法。

第7章介绍岩体分数阶流变模型。针对采用常用的元件模型较好地拟合试验结果时需要的参数较多的缺点，将分数阶微积分理论应用于岩体结构的流变分析，并将分数阶微积分的黏弹性模型和黏塑性模型的一维本构关系推广为三维本构关系，推导了流变应变增量计算公式；然后将分数阶微积分流变模型应用于不同岩体结构的加速流变分析。

本书的内容框图见图1.4.1。

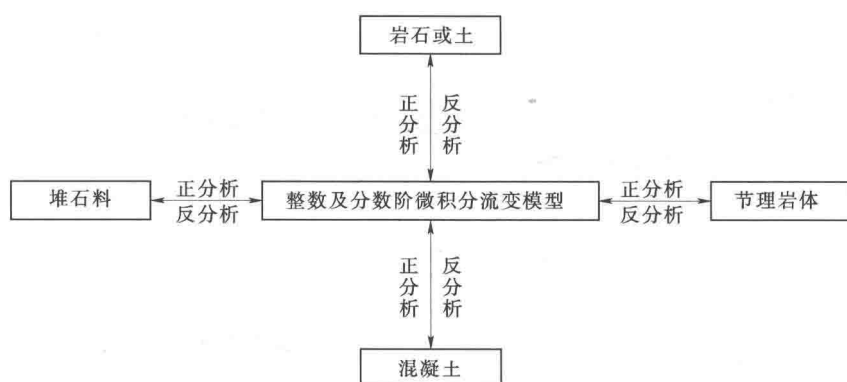


图 1.4.1 本书内容框图

第 2 章 岩石整数阶流变模型研究

2.1 概 述

在恒定应力作用下，对不同岩石进行蠕变试验可知，岩石蠕变曲线（即应变历时曲线 $\epsilon-t$ ）具有 3 种典型形式：①硬岩（如花岗岩等）的蠕变变形很小，荷载施加后不久就趋于稳定，此为稳定蠕变。这类蠕变对工程不会造成后患，可以忽略不计。②亚硬岩（如砂岩等）的蠕变变形在开始阶段，变形增长较快，以后也会趋于稳定，稳定后的变形量可能比初始变形量（即 $t=0$ 的瞬时弹性变形量）增大 30%~40%，但由于这种蠕变最终仍是稳定的，一般也不会对工程酿成危害。③而软岩（如页岩等）的蠕变曲线却与上述两例有所不同，其蠕变变形达到一定值后，就以一等速无限地增长，直到岩石破坏，此属不稳定蠕变，对工程的安全很不利。具有不稳定蠕变特性的岩石并不太多，主要是一些软弱岩石和具有特殊不连续结构面的岩石。

岩石蠕变的时变性表现在以下几个方面：①蠕变特性：在常荷载作用下，应变（ ϵ ）随时间（ t ）逐渐增长的现象。②松弛特性，当应变一定时，应力（ σ ）随时间（ t ）逐渐衰减的现象。③长期强度，强度随时间降低或增加。

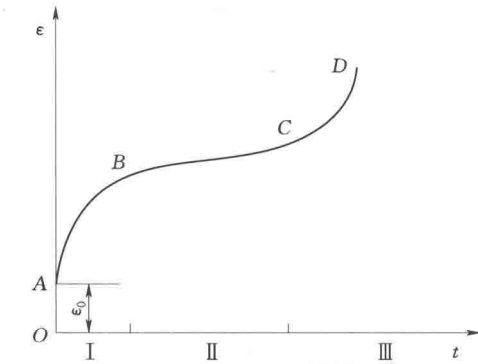


图 2.1.1 典型的岩石蠕变曲线

④弹性后效和滞后效应，加荷时，继产生瞬时的弹性变形之后，仍有部分变形随时间增长，由于这部分变形是可恢复的，且在恢复时也需要一定的时间，因此，这部分变形仍属于弹性变形范畴，对于这种现象，加荷过程中变形随时间的增长称为滞后效应，卸荷后变形随时间的逐渐恢复称为弹性后效。

图 2.1.1 所示为一条典型的岩石蠕变曲线。该曲线反映的是在普通室温和大气压下，作用恒定应力时，岩石的应变 ϵ 随时间 t 的变化过程。加载后，岩石的瞬时变形为 OA ，随时间 t 的增长一般可能经历下列 3 个阶段。

(1) OAB 段。蠕变的第 I 阶段，这是蠕变的开始阶段， OA 是瞬时变形，



视加载大小不同可能为弹性变形也可能为弹塑性变形，之后的 AB 段反映应变率逐渐降低和应变值缓慢增大的特征。

(2) BC 段。蠕变的第Ⅱ阶段，这是蠕变的稳定增长阶段，此段内应变率保持为最小，且近乎于常数，BC 近似视为斜直线。

(3) CD 段。蠕变的第Ⅲ阶段，这是岩石蠕变的不稳定发展阶段，应变率陡增，意味着材料破坏的来临。(或是脆性断裂或是韧性破坏)。

上述蠕变的 3 个阶段，也称为过渡蠕变、等速蠕变和加速蠕变。

研究表明，对同一类岩石的蠕变试验，其蠕变曲线 $\epsilon-t$ 的路径与所加应力的很大关系。在低应力时，蠕变可以渐趋稳定，材料不会破坏；当应力等于或超过某一数值时才出现加速蠕变阶段而导致材料破坏。应力愈大，则蠕变速率愈大。通常把出现蠕变破坏的最低应力值，称为长期强度。显然硬岩的长期强度大于亚硬岩的长期强度，而软岩和具有结构面岩石的长期强度最小。

本章首先研究应力张量、应力偏量和球应力状态下的黏弹性本构模型，针对线性黏弹性模型，探讨不同应力分量下黏性系数之间的关系；然后研究弹-黏塑性本构模型，并采用算例分析弹-黏塑性模型计算位移和弹塑性模型计算位移之间的关系；最后进行弹-黏塑性本构模型优选研究及参数识别分析。

2.2 黏弹性本构模型分析

为了反映工程材料的时变性（如基岩所具有的蠕变特性），可以采用弹簧（胡克体）、黏壶（牛顿体）和滑块（圣维南体）等 3 种基本元件相互组合来描述。利用这些基本元件的相互“并联”或“串联”可以建立不同属性的时变模型和相应的理论。例如：黏弹性模型，黏塑性模型，弹-黏塑性模型和黏-弹塑性模型等。以下对黏弹性模型进行分析。

黏弹性理论只描述材料同时出现的弹性和黏性行为（简称黏弹性），不涉及材料的塑性效应。如果在本构关系中假定变形与荷载保持线性关系，但依赖于时间，则称为线性黏弹性本构关系。线性黏弹性本构关系目前在工程中使用较广泛，本书在进行黏弹性模型分析时，如不加说明，均是指线性黏弹性本构模型。

众所周知，黏弹性模型的本构关系可分为两部分：①球应力分量下的本构关系；②应力偏量下的本构关系。研究认为剪切变形（由应力偏量引起）和体积变形（由球应力引起）可以具有相同的流变规律，也可以具有不同的流变规律，甚至认为球应力不引起黏性变形。显然，为了合理地考察工程材料在荷载作用下的黏性变形性态，有必要分别对球应力和应力偏量进行考察。当假设剪

切变形和体积变形具有相同的流变规律时,应力偏量下的黏性系数和球应力下的黏性系数之间存在何种关系,是工程科技理论中一个重要的问题。据此,以下对两种常用的黏弹性模型——广义开尔文模型和伯格模型进行研究,分别给出应力张量、偏应力、球应力下的黏性应变增量计算式,然后对它们之间的关系进行分析。

2.2.1 广义开尔文模型

广义开尔文模型是一种黏弹性体模型,它由一个胡克体和 n 个开尔文元件组成。不同应力分量下的广义开尔文模型 ($n=2$) 见图 2.2.1~图 2.2.3。以下分析时,若不加说明,均认为黏性变形的泊松比等于瞬时弹性变形的泊松比。

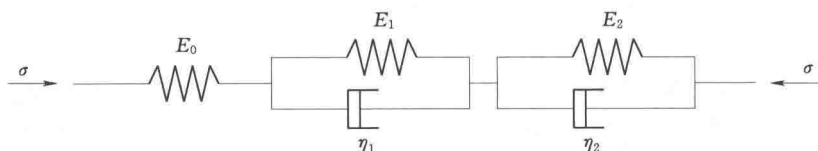


图 2.2.1 对应于应力张量的广义开尔文模型

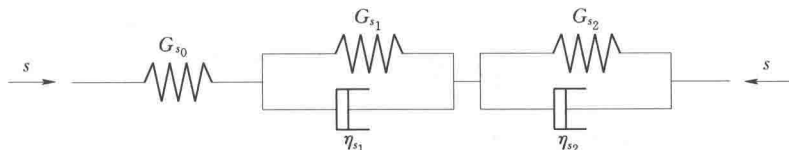


图 2.2.2 对应于应力偏量的广义开尔文模型

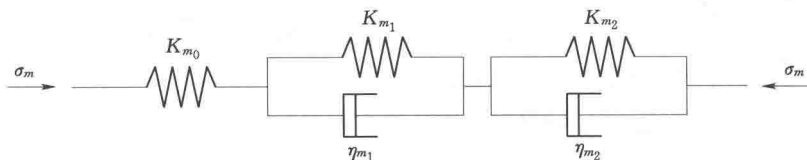


图 2.2.3 对应于球应力的广义开尔文模型

2.2.1.1 应力张量

图 2.2.1 中,假定应力偏量和球应力均产生黏性变形,且变形规律相同。由于串联,该模型的应变是初始弹性应变和各个开尔文模型的应变之和,于是可得到广义开尔文模型的应变

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E_0} + \sum_{k=1}^2 \left\{ \epsilon_{0k} + \frac{1}{\eta_k} \int_{t_0}^t \sigma \exp \left[\frac{E_k}{\eta_k} (t - t_0) \right] dt \right\} \exp \left[-\frac{E_k}{\eta_k} (t - t_0) \right] \quad (2.2.1)$$