

高中数学典型例题 和解题思路分析 (立体几何)

仇炳生 主编

南京大学出版社

高中数学

典型例题和解题思路分析

(立 体 几 何)

仇炳生 编著

南京大学出版社

1993 • 南京

(苏)新登字第011号

高中数学
典型例题和解题思路分析
(立体几何)
仇炳生 编著

*

南京大学出版社出版发行

(南京大学校内)

江苏省丹徒县印刷厂印刷

*

开本: 787×1092 1/32 印张: 5.75 字数: 129千

1993年5月第1版 1993年5月第1次印刷

印数 1—6000

ISBN 7-305-01580-6/O · 84

定价: 2.70 元

前 言

本丛书根据国家教委颁发的《全日制中学 数学 教学大纲》，按高级中学数学课本的章节顺序，编写的题解辅导读物。共分代数上册、下册，立体几何，解析几何，综合复习五册，与高中数学课本同步对应。

丛书撷取典型的例题进行分析评述，着重阐明思维过程，分析思维受阻的原因，探究解题的思想与方法，制定解题的策略与方案，提高解题的技能技巧，加强基础知识和基本技能的训练，并对课本内容进行适当引伸。旨在不断提高读者解题的主动性、科学性、简捷性、实用性，以期形成良好的思维习惯与解题习惯。章节后附有习题、复习题或自测题及解答，供读者练习。

丛书既是高中学生的课外读物，也是家长辅导用书、教师的题解教学参考书，还适合作为高中毕业生的迎考复习指导书。

编 者

1992年3月于南师大附中

目 录

第一章 直线与平面	(1)
一、平面	(1)
二、空间两条直线	(13)
三、空间直线和平面	(26)
四、空间两个平面	(47)
第二章 多面体和旋转体	(76)
一、多面体	(76)
二、旋转体	(105)
三、多面体和旋转体的体积	(133)
答案和提示	(173)

第一章 直线和平面

立体几何是研究空间图形的性质及其位置关系的一门初等数学分科。初中平面几何所研究的图形，是在同一个平面内的图形，可以看作空间图形的特例。因此，立体几何是平面几何在三维空间的推广，平面几何则是立体几何的基础。

熟悉空间图形的特点，并能善于将空间图形问题转化为平面图形问题，应用平面几何知识加以解决，对于学好立体几何，提高解立体几何题的能力是十分重要的。空间图形的特点，包括构成空间图形的基本元素间的相关位置以及空间图形的性质。在将空间图形问题转化为平面图形问题的方法中，常用的有类比法和隔离法等。这些方法将在本章及以后的各章节中，逐步进行介绍。

一、平面

空间图形的基本元素，由平面图形中的点、线，扩充为点、线和面。特别是平面的性质及平面与其它基本元素间的相关位置，构成空间图形的基本特点。平面的性质，也是画简单空间图形的直观图及解有关平面问题的基础。

例1 直线 a 和 b 分别在平面 α 和平面 β 内，若直线 a 和 b 相交于 P 点，求证：点 P 在平面 α 与平面 β 的交线上。

分析 立体几何中，直线和平面均被看作空间点的集合。 $\alpha \cap \beta$ ，既表示平面 α 和平面 β 交线的记号，也是点集 α 和点集 β 的交集。因此，原题即要证明，点 P 既在平面 α 内，又在平面 β 内。下面分别应用语言叙述和集合符号给出证明的两种书写方法。

证明一 $\because$ 点 P 是直线 a 和 b 的交点,

$\therefore P$ 在直线 a 上, 也在直线 b 上.

$\therefore$ 直线 a 和 b 分别在平面 α 和 β 内,

$$\therefore P \text{ 在平面 } \alpha \text{ 内, 也在平面 } \beta \text{ 内,}$$

$\therefore P$ 在平面 α 与平面 β 的交线上.

证明二

$$P = a \cap b \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \subset \alpha \\ P \in a \\ P \in b \\ b \subset \beta \end{array} \right\} \Rightarrow P \in \alpha \cap \beta$$

即 P 点在平面 α 与平面 β 的交线上.

说明 (1) 在今后的解题中, 例 1 的结论可以作为定理应用;

(2) 两种证明的书写方法,各有特点。其中,应用集合符号证明,便于应用集合的性质,证明过程简捷、清晰。但必须注意,在立体几何中,只采用集合的符号,而对这些记号不采用集合中的读法。

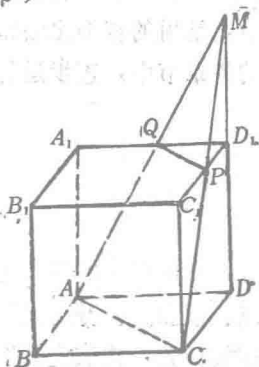


图 1-1

例2 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P 为 C_1D_1 的中点(图1-1).

(1) 若正方体棱长为 a ，求 $\triangle ACP$ 所在平面 α 与 DD_1 所在直线的公共点的位置；

(2) 作出平面 α 截正方体所得的截面图形。

分析 (1) 显然，直线 DD_1 不在平面 α 内。由公理1（如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内），直线 DD_1 与平面 α 至多有一个公共点。在平面 C_1D 中， CP 与 DD_1 不平行。由平面几何知识易知，在平面 C_1D 中，延长 CP 与 DD_1 相交于一点 M 。则点 M 就是平面 α 与直线 DD_1 的公共点。由 P 为 C_1D_1 中点得， $PD_1 \parallel \frac{1}{2}CD$ ，所以， $MD_1 = D_1D = a$ 。

(2) 所求的截面图形是，由平面 α 与正方体 AC_1 的各个面（指围成正方体的六个正方形）的交线所围成的平面图形。由公理2（如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线），要作出这些交线，只需作出平面 α 与各个面的两个公共点。由过两个不同的点的直线有且只有一条，则过这两个公共点的直线，就是所求的平面 α 与正方体各面的交线。

由题意， AC 、 CP 分别是平面 α 与面 BD 及平面 α 与面 C_1D 的交线。点 M 是直线 DD_1 与平面 α 的公共点，因而 M 和 A 既在平面 α 内，又在平面 AD_1 内。所以，连结 MA 交 A_1D_1 于 Q ，则 AQ 是平面 α 与面 AD_1 的交线。又 P 、 Q 在平面 α 内，又在面 A_1C_1 内，连结 PQ ，则 PQ 是平面 α 与面 A_1C_1 的交线。所以，四边形 $ACPQ$ 为所求的截面图形。

解略。

说明 (1) 立体几何中的作图问题，教材要求不高。空间作图的基本思路是把它转化为平面作图。上述作截面图

形的过程中，每一个作图步骤都是在平面内完成的。因此，立体几何中，阐明作图步骤时，一般应指出在哪一个平面内作图；

(2) 在空间图形中，经常需要作简单截面图形或作两个平面的交线，此类作法应比较熟悉。

例3 已知正方体中，交于一点的三条棱为 PM 、 PN 、 PQ 。在这三条棱上分别取点 A 、 B 、 C (图 1-2)。试分析 $\triangle ABC$ 的形状并证明你的结论。

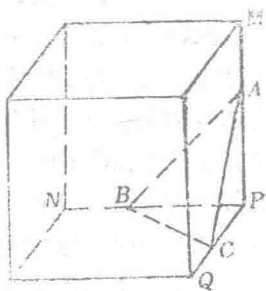


图 1-2

分析 研究三角形的形状，一般是指三角形是否为等边三角形、等腰三角形、直角三角形、锐角三角形或钝角三角形等。由观察可知，等边或等腰都不可能是 $\triangle ABC$ 的特点。事实上，若取 $PA = PB = PC$ ，则 $\triangle ABC$ 为等边三角形；若取 PA 、 PB 、 PC 中有两个相等，则 $\triangle ABC$ 为等腰三角形；若 PA 、 PB 、 PC 互不相等，则 $\triangle ABC$ 为三边互不相等的三角形。由此，猜想 $\triangle ABC$ 的形状与角的特征有关。判断一个角是钝角、直角或锐角，通常应用余弦定理。因而有如下解法。

解 设 $PA = a$ ， $PB = b$ ， $PC = c$ ， $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ 。

在 $\text{Rt}\triangle PAB$ 中， $AB^2 = a^2 + b^2$ 。

同理 $BC^2 = b^2 + c^2$ ， $CA^2 = c^2 + a^2$ 。

$$\therefore AB^2 + AC^2 - BC^2 = 2a^2 > 0,$$

$\therefore \angle A$ 为锐角。

同理， $\angle B$ 、 $\angle C$ 亦为锐角。

$\therefore \triangle ABC$ 必定是锐角三角形。

说明 (1) 此类问题属于探索性问题。它的特点是问题的结论没有明确给出, 需解题者自己寻找并加以证明。解探索性问题, 首先要猜想问题的结论。本题通过分析, 应用“排除法”缩小了猜想的范围, 找到了解题的途径。猜想是一种非逻辑推理, 它仅是根据一些条件(并不要求充分), 对问题结论所作的一种估计。结论猜错了, 还可以重新分析条件特点, 对所猜的结论加以修正。猜想虽不能作为严密的逻辑论证, 但通过猜想可以帮助我们发现问题和寻求解题的思路。

(2) 本题所涉及的空间图形 $P-ABC$, 是由四个三角形 $\triangle PAB$ 、 $\triangle PBC$ 、 $\triangle PCA$ 和 $\triangle ABC$ 所组成。在解题过程中, 我们把这一空间图形问题, 通过“隔离”的办法, 分解为四个三角形的计算问题, 应用简单的平面几何知识解决。这是解决空间图形问题的常用方法。

例4 证明: 经过两条相交直线, 有且只有一个平面(公理3推论2)。

分析 “有且只有”即存在且唯一。因此, 本题应分存在性和唯一性两方面证明。

证明 设两条相交直线为 a 和 b , 它们的交点为 P 。

(1) 存在性 在直线 a 上任取不同于 P 的点 A 。由公理3推论1, 过点 A 和直线 b 可以作一个平面 α 。因为点 P 、 A 在平面 α 内, 根据公理1, 直线 a 在平面 α 内。即平面 α 是过相交直线 a 和 b 的平面。

(2) 唯一性 反设经过两条相交直线 a 和 b 的平面多于一个。设不同的平面 α 和 β 都经过相交直线 a 和 b , 则平面 α 和 β 都经过直线 b 和直线 b 外的一点 A 。由此, 经过一条直线及直线外一点有两个不同的平面, 这与公理3推论1

矛盾。所以，经过两条相交直线的平面只有一个。

根据(1)、(2)，命题得证。

说明 (1) 本题也可以直接应用公理3证明，方法与上述证法类似。证明公理3推论3时，由于平行直线的定义是：在同一平面内，两条不相交的直线。因此，存在性根据平行直线的定义可直接得证；

(2) 唯一性的证明，通常应用反证法。反证法实际上是证明原命题的逆否命题。它的证明模式是：结论不成立 $\Rightarrow$ 条件不成立（也可以是某一公理或某一定理不成立）。本题中，由“经过两条相交直线的平面多于一个”推出公理3推论1不成立，使唯一性得到证明。

例5 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， E 、 F 、 G 、 H 分别是棱 AB 、 AD 、 BB_1 、 B_1C_1 的中点，求证： EF 与 GH 共面（图1-3）。

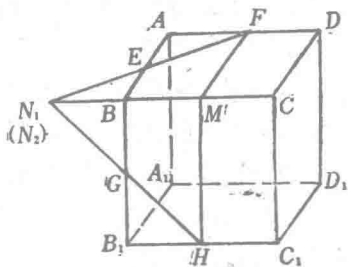


图 1 - 3

分析 由公理3的推论可知，要证明 EF 与 GH 共面，只要证明直线 EF 与 GH 或者是两条相交直线，或者是两条平行直线。由图形得， EF 与 GH 不可能平行，故应设法证明 EF 与 GH 是两条相交直线。如果 EF 与 GH 相交，由例1可知，它们的交点一定在平面 AC 和平面 B_1C 的交线 BC 上。注意到题设条件中， E 、 F 、 G 、 H 分别是棱 AB 、 AD 、 BB_1 、 B_1C_1 的中点，可以猜想解题途径是通过计算，求出 EF 、 GH 分别与 BC 的交点位置。由两个交点重合证明直线 EF 与 GH 是相交两直线，得 EF 与 GH 共面。

证明 在平面 AC 内, 延长 FE 和 CB 交于点 N_1 。在平面 B_1C 内, 延长 HG 和 CB 交于点 N_2 。取 BC 的中点 M , 连接 FM 、 HM 。

$\because E、F、M$ 分别是 $AB、AD、BC$ 中点,

又 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore BE$ 是 $\triangle MFN_1$ 的中位线。

$\therefore N_1B = BM$ 。

同理 $N_2B = BM$ 。

$\therefore N_1$ 与 N_2 重合, 即直线 EF 和 GH 是相交两直线。

由公理3推论2, EF 与 GH 共面。

说明 本题的证明及例3的解法, 都体现了化空间图形问题为平面图形问题的数学思想。这也是解立体几何问题的重要解题思想。初学者在今后的学习中, 应注意分析和理解它, 并逐步应用这一思想解题。

例6 交于点 P 的三条直线 $a、b、c$ 与直线 d 都相交, 且直线 d 不过 P 点, 求证

直线 $a、b、c、d$ 共面

(图1-4)

分析 要证明四条直线共面, 可以先选择两条直线, 证明它们在同一个平面内。再证明其余两条直线也在此平面内。

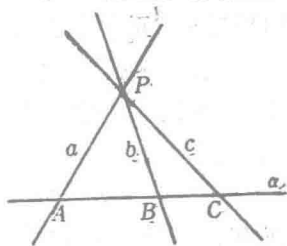


图1-4

证明 设 d 与 $a、b、c$ 分别交于 $A、B、C$ 。

$\because$ 直线 d 和 a 相交于 A ,

$\therefore$ 过 d 和 a 可以确定平面 α 。

$\because P \in a, B \in d$,

$\therefore P \in \alpha, B \in \alpha.$

$\therefore$ 过 P 、 B 的直线 b 在平面 α 内。

同理，直线 c 在平面 α 内。

$\therefore$ 直线 a 、 b 、 c 、 d 共面。

说明 例 6 中，条件“直线 d 不过 P 点”是必需的。否则，四条直线交于一点 P ，那么这四条直线不一定共面。

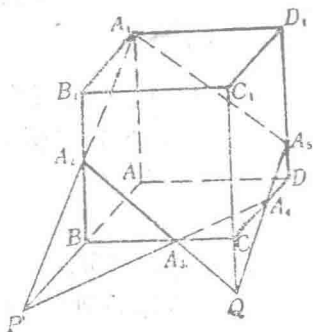


图 1-5

例 7 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， A_2 、 A_3 分别是棱 BB_1 和 BC 上的点（图 1-5），过 A_1 、 A_2 、 A_3 作平面 α ，求作平面 α 截正方体所得的截面图形。

分析 要作出平面 α 截正方体所得的截面图形，只要作出平面 α 与正方体各面的交线。

A_1 、 A_2 既在平面 α 内，又在面 AB_1 内，连结 A_1A_2 ，则 A_1A_2 是平面 α 与面 AB_1 的交线。同理， A_2A_3 是平面 α 与面 B_1C 的交线。

A_3 是平面 α 与平面 AC 的一个公共点，为作出平面 α 与面 AC 的交线，还需找出它们的第二个公共点。由于平面 α 过 A_1 、 A_2 、 A_3 ，因此第二个公共点必需借助 A_1 、 A_2 才能作出。注意到， AB 是平面 AB_1 和平面 AC 的交线，在平面 AB_1 内，延长 A_1A_2 和 AB 交于 P 点，则 P 是平面 α 与平面 AC 的公共点。在平面 AC 内，过 P 、 A_3 的直线交 CD 于 A_4 ，则 A_3A_4 是平面 α 与面 AC 的交线。同理，在平面 B_1C 内，延长 A_2A_3 与 C_1C 交于 Q 点。在平面 CD_1 内，过 Q 、 A_4 的直线交

DD_1 于 A_5 ，则 A_4A_5 是平面 α 与面 CD_1 的交线。

A_1 和 A_5 同在平面 α 和面 AD_1 内，连结 A_1A_5 ，则 A_1A_5 是平面 α 与面 AD_1 的交线。

因此，所求的截面图形为五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 。

解略。

例8 空间有三条直线和四个点，最多可以确定几个平面。

分析 由公理3及其推论，确定平面共有四种不同的情况。在有三条直线和四个点的条件下，这四种确定平面的情况都有可能出现。为使复杂的问题简单化，我们对确定平面的方式进行分类。

由题意和公理3及其推论，将确定平面的方式分为三类：仅通过点确定平面；仅通过直线确定平面；通过点和直线联合确定平面。第一类方式，由公理3，四个点最多可以确定4个平面；第二类方式，由公理3的推论2和推论3，三条直线最多可以确定3个平面；第三类方式，由公理3推论1，三条直线和四个点中，每次取出一条直线和一个点确定平面，最多可以确定 $3 \times 4 = 12$ 个平面。

所以，经过三条直线和四个点最多可以确定 $4 + 3 + 12 = 19$ 个平面。

解略。

说明 (1) 分类思想是数学的基本思想之一。它使复杂的问题转化为简单的问题，使“大”问题转化为一系列“小”问题，便于求解。分类的原则可以简述为“不重复、不遗漏”。分类的方法应用集合知识可以表述为：如果集合 $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ ，且 $A_i \cap A_j = \phi$ (其中， $i, j = 1, 2, \cdots, n, i \neq j$)，那么 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是由 A 分成

的 n 类。分类的关键在于选择分类的标准。例8选择确定平面的方式(其中,把相交两直线和平行两直线确定平面的情况合并为一种方式)分类,即按确定平面的条件中是否含有直线,首先分为仅通过点确定平面与不全为点确定平面。对于后者又按确定平面的条件中是否含有点,又分为仅通过直线确定平面及通过点和直线联合确定平面两类。经过两次“二分法”将确定平面的方式分为三类;

(2)学习要善于深入。对于例8还可以作如下深入的思索;这三条直线和四个点满足何种条件时,确定19个平面。

解答这一问题也可以参照例8的分类。由第一类确定平面的方式,要求已知四点不共面;由第二类确定平面的方式,要求已知的三条直线不共面,且两两确定平面,即不共面的三条直线或者两两平行、或者相交于一点(不共面的三条直线中,两条直线平行且另一条与它们相交是不可能的!);由第三类确定平面的方式,要求已知的四点都不在已知的三条直线上,且过任意两点的直线均不与这三条直线平行或相交。最后还要求这三类分别确定的平面不重复,即要求已知四点中,任意一点都不在已知的三条直线中任意两条所确定的平面内。虽然这一分析比较繁琐,但通过上述深入研究,有利于空间想象能力的提高。

习题1-1

1. 判断题(如命题正确可在括号内打“+”,否则打“-”)

(1) 经过一条直线及直线外两点, 确定两个平面。

()

(2) 两条平行线及线外一点, 最多可以确定三个平面。

()

(3) 四边形一定是平面图形。

()

(4) 两个平面有两条公共直线(不重合), 则这两个平面重合。

()

(5) 一条直线与两条平行线都相交, 则这三条直线共面。

()

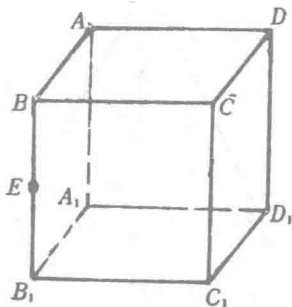
(6) 一条直线与两条相交直线都相交, 则这三条直线共面。

()

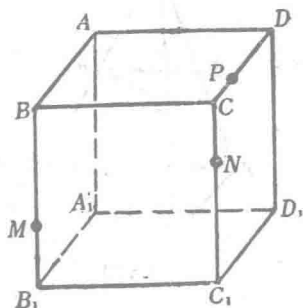
2. 三个平面 α 、 β 、 γ 两两相交于三条直线 a 、 b 、 c , 若直线 a 与 b 相交, 求证: 三条直线 a 、 b 、 c 必交于一点。

3. 证明: 平行四边形是平面图形。

4. 如题4图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为棱 BB_1 的中点, 过 A 、 E 、 C_1 三点作平面 α , 试作出平面 α 与平面 A_1C_1 的交线。



题4图



题5图

5. 如题5图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M 、 N 、 P 分别在棱 BB_1 、 CC_1 、 CD 上, 且 $B_1M : MB = CN : NC_1 = CP : PD = 1 : 2$, 过 M 、 N 、 P 三点的平面为 α , 试作出平面 α 截正方体所得截面图形。
6. 直线 a 和 b 不在同一个平面内, 直线 a 上有三个点, 直线 b 上有四个点. 过这七个点能确定多少个平面?
7. 在平面 α 内有四条直线, 平面 α 外有四个点, 通过这四条直线和四个点最多能确定多少个平面?
8. 作底面两邻边长分别为3cm和5cm, 高为4cm的长方体。

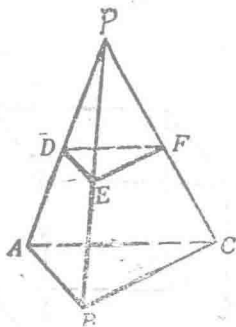
9. 如题9图, 四面体 $PABC$ 中,

(1) D 、 E 、 F 分别是 PA 、 PB 、 PC 的中点, 求证:

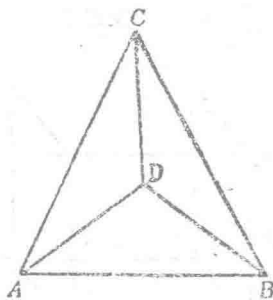
$$S_{DEF} = \frac{1}{4} S_{ABC}.$$

(2) 若 $PD : DA = PE : EB = PF : FC = m : n$,

求 $S_{DEF} : S_{ABC}$ 的值. (S_{DEF} 和 S_{ABC} 分别表示 $\triangle DEF$ 和 $\triangle ABC$ 的面积)



题9图



题10图

10. 等腰直角三角形 ABC 中, 斜边 $AB = 12\text{cm}$, 以斜边上的