数学可以很好玩，数学就在你身边

生活中的数学

思路新颖：给你耳目一新的感觉体验

涉猎广泛：从5大方面诠释数学之美

受众面广：50多个精彩实例，适合于广大数学爱好者

启迪思维：帮你学会用数学思维解决实际问题

杨峰
吴波 ◎编著

清華大學出版社

生活中的数学

杨峰
吴波 ◎编著

清華大學出版社
北京

图书在版编目(CIP)数据

生活中的数学 / 杨峰，吴波编著. -- 北京 ：清华大学出版社，2015
ISBN 978-7-302-41321-9

Ⅰ. ①生… Ⅱ. ①杨… ②吴… Ⅲ. ①数学—普及读物 Ⅳ. ①O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 195415 号

责任编辑：张立红
封面设计：杨 丹
版式设计：方加青
责任校对：杨静琳
责任印制：杨 艳

出版发行：清华大学出版社
网 址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地 址：北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编：100084
社总机：010-62770175 邮 购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：三河市君旺印务有限公司
装 订 者：三河市新茂装订有限公司
经 销：全国新华书店
开 本：170mm×240mm 印 张：14.75 字 数：221 千字
版 次：2015 年 9 月第 1 版 印 次：2015 年 9 月第1 次印刷
定 价：35.00 元

产品编号：065753-01

前言

在2002年国际数学大会上，著名的美藉华裔数学家陈省身先生为少年儿童题词——“数学好玩”。这是一位世界级数学大师对数学这门学科的感悟和总结，也承载着先生对晚生后辈的无限期许。数学究竟是什么？数学真的好玩吗？本书又是怎样的一本数学书呢？

数学是一切科学的基础，是研究各门科学和技术的工具。与此同时，数学又渗透在我们生活的点点滴滴中。所以，人们历来对数学都很重视，尤其是在中国，数学是每一个学生的必修课。从小学到大学，甚至读到硕士、博士，每一个阶段都需要学习数学，每一个阶段也都要用到数学。在中国，各类数学竞赛也比比皆是——华数、奥数，很多人从小就开始学习数学，参加各类比赛，所以，数学在中国是很有群众基础的！

但是，可能正因为我们有这样的传统，对数学的学习过于看重，才导致许多人对数学望而生畏，敬而远之，有的学生甚至对数学产生了抵触的心理。这样，不但不利于个人数学素质的培养，同时还可能给人们造成心理障碍，对数学产生厌烦和恐惧。

其实数学一点都不可怕，正如陈省身先生为少年儿童的题词“数学好玩”，数学的魅力在于它能帮助我们解决许多实际生活中的问题，数学蕴藏在我们生活的每一个角落。数学从来不是冷冰冰的公式和定理，也绝非是拒人于千里之外的证明和推导，数学本身蕴藏着智慧的巧思和灵感的光芒。我们日常生活中的许多方面都有数学的身影，小到个人的投资理财、交易买卖，大到一个工厂的生产计划、一个项目的进度管理，甚至一项宏观的经济政策，哪一个也离不开数学，所以，数学是活生生的学问。

然而传统的数学书往往把数学搞得过于阳春白雪、“高大上”了，例

如，从头至尾都是公式、定理、公理和一堆莫名其妙的与实际毫无关系的习题，这样读者阅读起来一定会感到枯燥乏味，提不起兴趣。所以，本书的创作初衷就是写一本生动有趣、大家都能读得懂、都能从中学到知识的数学书。书中将生活中遇到的问题和一些趣味性较强且蕴含着深刻数学道理的问题进行归纳总结，然后分类讲解。这样，本书就更“接地气”，既有实用性又有趣味性。

总结起来，本书具有以下特点：

1. **思路新颖，生动有趣**：本书既包括投资理财、彩票中奖率、偿还房贷等与我们生活息息相关的现实问题，又还包括概率统计、排列组合、博弈论、逻辑、计算机数学、中国古算等内容，形式多种多样，内容丰富多彩，生动有趣，覆盖的知识点也极为丰富。

2. **讲解清晰，简单明了**：本书在写作上力求做到深入浅出，清晰明了，没有复杂的逻辑推理和证明，开门见山，直击问题核心。这样使读者阅读起来更加得心应手，易于读者理解和深入学习。

3. **古今相映，兼容并蓄**：本书中既编有蕴藏着中国古代劳动人民智慧结晶的中国古算趣题，同时还包含了与人类现代生活紧密相连的计算机数学。一古一新相映成趣，体现了数学的博大精深，也带领读者从多个维度感知数学之美，同时涉猎不同领域的数学知识。

希望本书可以为读者打开一扇重新认识数学的大门，让普通的读者（非专业从事数学研究的人）也能在这些妙趣横生的问题中体会数学的乐趣，感悟数学之美，学到应用数学解决实际问题的方法。

本书由杨峰、吴波组织编写，同时参与编写的还有黄维、金宝花、李阳、程斌、胡亚丽、焦帅伟、马新原、能永霞、王雅琼、于健、周洋、谢国瑞、朱珊珊、李亚杰、王小龙、张彦梅、李楠、黄丹华、夏军芳、武浩然、武晓兰、张宇微、毛春艳、张敏敏、吕梦琪，在此一并表示感谢！

由于本书作者水平有限，不足之处在所难免，真诚希望读者朋友批评斧正。

目录

第3章　囚徒的困局——逻辑推理、决策、斗争与对策

第4章　中国古代趣题拾零

第5章 当数学遇到计算机

数学无处不在，它蕴藏在我们生活中的每一个角落。小到日常生活中的柴米油盐，大到个人投资理财、置业经商，无处不渗透着数学，很多问题需要我们使用数学工具对其加以解决。本章我们将日常生活中经常遇到的问题予以抽象，归纳总结出了几类问题，并用数学的方法给予分析和解答。希望读者能从中体会出生活中的数学之美，并学会应用数学的方法处理和解决实际问题。

第1章

生活中美丽的数学

1.1 怎样储蓄最划算

在这个“你不理财，财不理你”的时代，大家都愿意把自己的积蓄拿出来进行投资，例如定期储蓄、理财产品、股票基金、期货期权、贵金属、房地产、艺术品等，希望从中获取收益。投资理财绝不是一两节内容可以讲清楚的，它里面不仅牵扯到数学，还可能牵扯到诸如投资者风险偏好、当前宏观经济形势、各项经济方针政策以及个人对未来中国经济的预期等许多方面，所以，这是一个很大、很复杂的课题。我们今天要讨论的是一个相对单纯简单的问题，帮你算一算以下几种储蓄方式哪种最划算。

假设定期储蓄利率如表1-1所示。

表1-1 定期储蓄利率

年限	利率
一年期	3.25%
二年期	3.75%
三年期	4.25%
五年期	4.75%

注：此表仅作为本题参考使用，不代表真实的利率值。

如果A先生有10万元人民币用于定期储蓄，打算在银行储蓄5年，他有以

下几种储蓄方案：

- 直接采用5年期定期储蓄
- 采用2年期+3年期定期储蓄方式
- 采用2年期+2年期+1年期定期储蓄方式
- 采用5个1年期定期储蓄方案

请帮A先生计算一下，哪种储蓄方案收益最大？

分析

在计算该题目之前，我们首先要理清几个常识性的概念。表1-1中所示的利率实际上是年利率，也就是按照相应的年限储蓄，每年可得到的利息率，这里的基本原则是：储蓄的期限越长，年利息率就越高，如果中途取钱，则会被视为违约，那么就会按照活期储蓄的利率（大约0.35%，仅供参考）计算利息。举个例子，如果有100元钱，在银行进行一年期定期存储，1年后则会拿到3.25元的利息；如果是二年期定期存储，2年后则会拿到100×3.75%×2=7.5元的利息；如果是三年期定期存储，3年后则会拿到100×4.25%×3=12.75元的利息；如果是五年期定期存储，5年后则会拿到100×4.75%×5=23.75元的利息。

下面我们分别来计算一下，按照以上四种储蓄方案，10万元存储5年，哪一种储蓄方案得到的总利息最多？

1. 直接采用5年期定期储蓄方案

这种储蓄方案最容易计算，5年后得到的利息总额为：100 000×4.75%×5=23 750元。

2. 采用2年期+3年期定期储蓄方案

头两年的利息总额为：100 000×3.75%×2=7 500元，从第三年开始转为一个3年期的定期储蓄，因此本金总额变为100 000+7 500=107 500元。

这里就有了一个复利的概念。一般情况下，银行的单期定期存款中是不算复利的，这也就是为什么我们在计算三年期或五年期等定期储蓄的利息时，只是将本金乘以年利率再乘以储蓄期限，而不将头一年的利息加到第二年（复

利，或叫做利滚利）的原因。但是，如果定期存款约转到第二个存储期限，则要将上一期的利息添加到本期储蓄的本金当中（如果是定期约转则会自动加上上一期的利息，我们这里假设都是计算复利的）。

其实很简单，100 000元人民币，在第一个2年期的储蓄期限中共得到了7 500元的利息，那么在下一个3年期的储蓄期限中，就要在储蓄的本金中加入上一期的利息7 500元，因此这样本金总额变为107 500元。

在下一个3年期的定期储蓄中，A先生又会得到107 500×4.25%×3=13 706.25元的利息。这样5年后A先生拿到的钱为107 500+13 706.25=121 206.25元，所以，5年中的总利息为121 206.25-100 000=21 206.25元。可见还是小于直接定期储蓄5年所得到的利息。

有些读者可能会想到一个很有意思的问题：采用2年期+3年期的定期储蓄方案与采用3年期+2年期的定期储蓄方案相比，哪种方案在五年之后获得的利息更多呢？通过简单的计算不难发现，两种储蓄方案在收益上没有任何区别，在5年之后获得的总利息相同，都为21 206.25元。

3. 采用2年期+2年期+1年期定期储蓄方案

头两年的利息总额为：100 000×3.75%×2=7 500元，从第三年起，下一个2年期定期储蓄的本金包含了复利，变为100 000+7 500=107 500元。

在第二个2年期储蓄中得到的利息总额为：107 500×3.75%×2=8 062.5元。

从第4年开始转入了下一个1年期的定期储蓄阶段，新的本金包含的复利变为107 500+8 062.5=115 562.5元。1年后得到利息为115 562.5×3.25%=3 755.781 25元。

因此按照这种储蓄方案，A先生在5年中获得的总利息为7 500+8 062.5+3 755.781 25=19 318.281 25元。可见还是小于直接定期储蓄5年所得到的利息。

4. 采用5个1年期定期储蓄方案

这种情况计算比较简单，只要把每年得到的利息都加到下一年的本金中再计算利息即可。

第一年的利息：100 000×3.25%=3 250元；

第二年的利息：103 250×3.25%=3 355.625元；

第三年的利息：106 605.625×3.25%=3 464.682 812 5元

第四年的利息：110 070.307 812 5×3.25%=3 577.285 003 906 25元

第五年的利息：113 647.592 816 406 25×3.25%=3 693.546 766 533 203 125元

因此5年中A先生共可获得利息约为：3 250+3 355.6+3 464.7+3 577.3+3 693.5=17 341.1元。

其实有一种更为简便的方法计算这种储蓄方案的总利息，我们先来计算一下采用5个1年期定期储蓄方案的第5年的本息金额：

$$100\,000\times\underbrace{(1+3.25\%)\times(1+3.25\%)\times\cdots\times(1+3.25\%)}_{5\text{个}}$$

每年的本息额都是上年本息额的(1+3.25%)倍，因此第5年的本息金额如下式计算所得

$$=100\,000\times(1+3.25\%)^5=117\,341.139\,582\,939\,453\,125$$

将第5年的本息金额减去本金100 000元，这样便得到了5年的总利息为117 341.139 582 939 453 125−100 000=17 341.139 582 939 453 125≈17 341.1元

可见这种储蓄方案还是小于直接定期储蓄5年所得到的利息。

从上面的计算中，我们可以得出结论：A先生直接采用5年期定期储蓄方案在5年后得到的利息最多，而采用5个1年期定期储蓄方案（尽管将复利也计算进去）得到的利息最少。

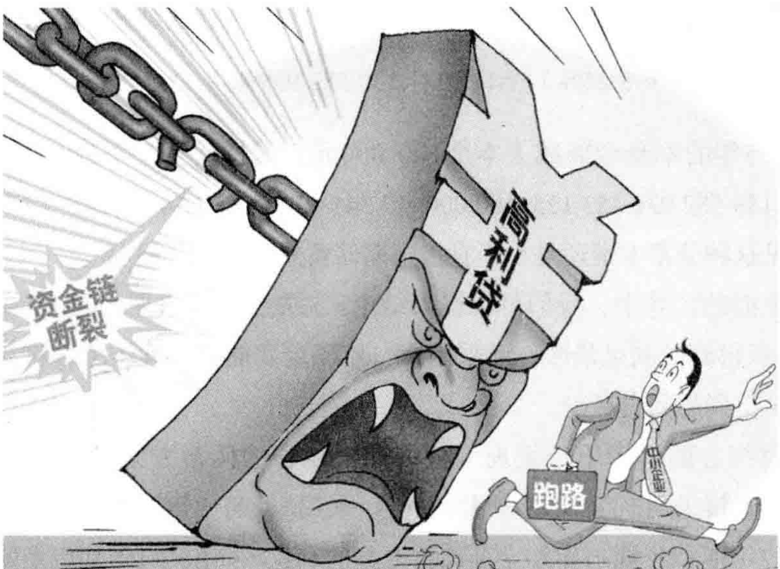
同时细心的读者不难发现，整存期限越长的储蓄方案得到的总利息越多。即：直接采用5年期定期储蓄的利息>采用2年期+3年期定期储蓄方案的利息>采用2年期+2年期+1年期定期储蓄方案的利息>采用5个1年期定期储蓄方案的利息。这说明银行还是鼓励客户尽量把钱长期地储存在银行当中，这样银行一方就有更多的资金储备，以便资金的流动（例如发放贷款），银行发放贷款的利息一定大于付给客户存款的利息，两者之间的差额叫做息差，赚取息差是银行最重要的盈利模式之一。

从投资者（储户）的角度来看，究竟选择哪种储蓄方案还需根据个人需求而定。虽然5年期的总利息最多，但是前提是要保证这笔资金5年都存在银行

中，这样无形中就降低了货币的使用率和流动性，从而失掉了一些其他的投资机会，在通胀率很高的时期就只能待在银行里贬值。因此，如何选择储蓄方案并无一定之规，要根据客户的实际情况做出判断。

1.2 高利贷中的暴利

高利贷是一种民间借贷形式，在我国自古有之。由于高利贷利息过高，侵犯了借贷人的利益，因此这种借贷形式是不受法律保护的，大家都应该通过正规渠道进行贷款。



在我国最常见的一种高利贷形式叫做“驴打滚”。这个名字很形象，意思就是本金逐月增加，利息逐月成倍增长，像驴打滚一样。“驴打滚”的借贷期限一般为一个月，月息一般为3～5分（3%～5%），如果到期不还，则将利息计入下月本金（复利）。这样累计下来本金越来越高，利息越来越多，往往使借贷者损失惨重。

假设A先生急需用钱，向一家私人钱庄借高利贷20万元，双方约定采用

“驴打滚”的借贷方式，月息定为5分。如果A先生借款一年，那么最终A先生要还给这家钱庄多少钱呢？

分析

如果明白了“驴打滚”的高利贷方式就不难算出本题了。对于20万元，一个月的利息为5分，也就是5%，那么一个月后应支付的利息额为20万×5%＝1万。这1万元利息会加到下个月的本金中继续计算。这样，一个月后连本带息的总金额为20万×（1+5%）＝21万，这21万元就是第二个月的本金。依此类推，如果A先生借款一年，那么，最终A先生连本带利需要还给钱庄

$$20万\times\underbrace{(1+5\%)\times(1+5\%)\times\cdots\times(1+5\%)}_{12个月}=20万\times(1+5\%)^{12}\approx 35.9万$$

A先生借款20万元，一年后要还35.9万元，这样算来年贷款利率大约为

$$(35.9-20)/20\times100\%=79.5\%$$

这可要比任何一家银行的贷款利率都高得多（银行的年贷款利率约为6%～8%）。所以足见高利贷是何等的暴利了。

知识扩展　巧算高次幂

在上面的题目中，我们要计算 $(1+5\%)^{12}$，这个算式计算起来不是很容易的。当然我们可以用计算器或者一些计算软件轻易地得到答案。但是在早些年还没有计算机和计算器，我们如何方便、快捷地得到结果？难道要用笔一步一步地计算吗？方法当然比这要简单得多了。

我们可以借助自然对数表进行查表求值。设 $x=(1+5\%)^{12}$，等式两边求自然对数：

$$\ln x=\ln(1+5\%)^{12}$$

$$\ln x=12\ln(1+5\%)$$

$$\ln x=12\ln 1.05$$

我们可以通过查自然对数表计算ln1.05，自然对数表入下图所示：

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0.000 0	0.010 0	0.019 8	0.029 6	0.039 2	0.048 8	0.058 3	0.067 7	0.077 0	0.086 2
1.1	0.095 3	0.104 4	0.113 3	0.122 2	0.131 0	0.139 8	0.148 4	0.157 0	0.165 5	0.174 0
1.2	0.182 3	0.190 6	0.198 9	0.207 0	0.215 1	0.223 1	0.231 1	0.239 0	0.246 9	0.254 6
1.3	0.262 4	0.270 0	0.277 6	0.285 2	0.292 7	0.300 1	0.307 5	0.314 8	0.322 1	0.329 3
1.4	0.336 5	0.343 6	0.350 7	0.357 7	0.364 6	0.371 6	0.378 4	0.385 3	0.392 0	0.398 8
1.5	0.405 5	0.412 1	0.418 7	0.425 3	0.431 8	0.438 3	0.444 7	0.451 1	0.457 4	0.463 7
1.6	0.470 0	0.476 2	0.482 4	0.488 6	0.494 7	0.500 8	0.506 8	0.512 8	0.518 8	0.524 7
1.7	0.530 6	0.536 5	0.542 3	0.548 1	0.553 9	0.559 6	0.565 3	0.571 0	0.576 6	0.582 2
1.8	0.587 8	0.593 3	0.598 8	0.604 3	0.609 8	0.615 2	0.620 6	0.625 9	0.631 3	0.636 6
1.9	0.641 9	0.647 1	0.652 3	0.657 5	0.662 7	0.667 8	0.672 9	0.678 0	0.683 1	0.688 1

图1-1　自然对数表片断

该表中最左边的纵向一列表示$\ln N$中N的个位和十分位，最上边横向一行表示N的百分位。例如要计算ln1.08，这要找到纵向1.0这一行，横向为8这一列，如图1-2所示

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0.000 0	0.010 0	0.019 8	0.029 6	0.039 2	0.048 8	0.058 3	0.067 7	0.077 0	0.086 2
1.1	0.095 3	0.104 4	0.113 3	0.122 2	0.131 0	0.139 8	0.148 4	0.157 0	0.165 5	0.174 0

图1-2　查表计算ln1.08

因此$\ln 1.08 \approx 0.077$。

那么通过查表，我们很容易就计算出$\ln 1.05 \approx 0.048\ 8$。

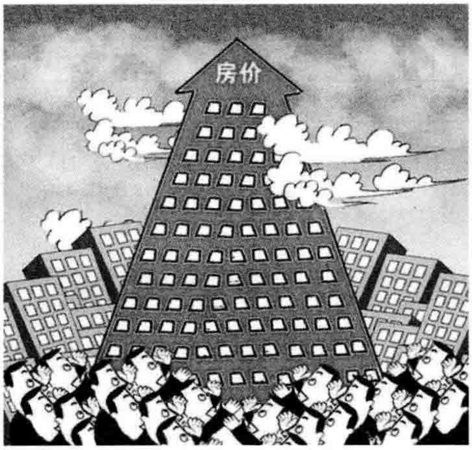
这样$\ln x = 12\ln 1.05 \approx 0.585\ 6$。下面我们继续通过查表计算$x$。

在自然对数表中我们可以近似地查到$\ln 1.79 = 0.582\ 2$，所以$x \approx 1.79$，即$(1+5\%)^{12} \approx 1.79$。虽然查表法没有计算器得到的结果精确，但是如果对精度的要求不高，还是可以采用这个方法进行估算的。

1.3　如何偿还房贷

买房已成为当下年轻人所面临的严峻现实。在中国传统的“成家立业”思想的影响下，买房已成为人们的一项刚性需求。可是节节攀升的房价又令人

望而却步，少则一百多万，多则几百上千万的房价实在不是一般上班族所能负担得起的，于是向银行贷款几乎成为年轻人实现买房梦的唯一渠道。也正因为此，还贷一族在都市年轻人中的比例越来越高，每个月领完薪水的第一件事就是向还贷的账户里打钱……



目前银行规定的还款方式可分为两种：等额本息还款法和等额本金还款法。等额本息还款法是在贷款期内每个月以相等的额度平均偿还银行的贷款本息，其计算公式为：

$$每月还款额=\frac{贷款本金\times月利率\times(1+月利率)^{还款月数}}{(1+月利率)^{还款月数}-1}$$

等额本金还款法是在贷款期内，每个月等额偿还贷款本金，贷款利息随本金逐月递减，其计算公式为：

$$每月还款额贷=\frac{贷款本金}{贷款期月数}+(贷款本金-已还本金累计额)\times月利率$$

假设银行的贷款利率如表1–2所示。

表1–2　银行贷款利率

贷款年限（年）	年利率	月利率
1	5.31%	4.42‰
2	5.40%	4.50‰
3	5.40%	4.50‰
4	5.76%	4.80‰