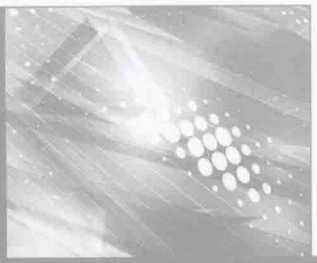
高 等 学 校 教 材

抽象代数
学习辅导



◆ 大连理工大学数学科学学院
◆ 王 颖 南基洙 编著

高等教育出版社

抽象代数
学习辅导

CHOUXIANG DAISHU XUEXI FUDAO

◆ 大连理工大学数学科学学院
◆ 王 颖 南基洙 编著

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是与《抽象代数》教材(2013年版)配套的学习辅导书。书中不仅给出了原教材各章节习题的详细解答，还概括了各章节的基本概念、主要性质、基本定理和主要结论，以加深读者对这些基本概念、定理等重要内容的理解和运用。另外，为了方便读者理解和掌握抽象代数中常用的处理问题的方法，精选了部分典型例题，并对其进行了详尽的分析与解答。

本书可供选用《抽象代数》教材的读者使用，也可供对相关内容感兴趣的读者参考。

图书在版编目(CIP)数据

抽象代数学习辅导／王颖，南基洙编著. --北京：高等教育出版社，2016.1

ISBN 978-7-04-044531-2

Ⅰ.①抽… Ⅱ.①王… ②南… Ⅲ.①抽象代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O153

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第308763号

策划编辑 李 茜　责任编辑 田 玲　特约编辑 彭雪梅　封面设计 李卫青

版式设计 杜微言　责任校对 胡美萍　责任印制 田 甜

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 北京市联华印刷厂

开　　本 787 mm×960 mm 1/16
印　　张 11.5
字　　数 200千字
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.hepmall.com.cn
http://www.hepmall.com
http://www.hepmall.cn
版　　次 2016年1月第1版
印　　次 2016年1月第1次印刷
定　　价 18.60元

物料号 44531-00

前　言

在多年讲授“抽象代数”的教学过程中，我们发现学生虽然理解了教学内容，但当他们独立做课后习题时，却时常感到困惑，不知如何着手、如何处理，而教师又不可能在课堂上面面俱到地为他们进行讲解。因而学生们迫切希望能有一本与教材相配套的学习辅导书，以便他们自学和检测自己的学习效果。故此，我们整理和编写了这本抽象代数学习辅导书。

全书共分七章。由于本书是为我们编写的《抽象代数》教材(2013 年版)配套的学习辅导书，所以我们仍按原教材的顺序，将指导书的前四章设定为预备知识、群、环和域。另外，我们在第五章配备了一些补充习题，并在第六章给出了这些习题的答案。第七章则提供了三套模拟考试题，以供读者自行检测学习效果之用。

前四章的每章之中都包括了三部分内容：概念和性质的简介、典型题的分析与解答、教材习题全解。在概念和性质的简介部分，我们给出了该章的基本概念、主要性质、基本定理和主要结论，以加深读者对这些基本概念、定理等重点内容的理解和运用；在典型题的分析与解答部分，我们精选了部分具有代表性的习题进行分析与解答，以便于读者掌握抽象代数之中常用的处理问题方法和解题技巧，加深对抽象代数整体知识的把握和理解；在教材习题全解部分，我们给出了《抽象代数》教材各章节全部习题的解答。

在编写和整理本辅导书的过程中，我们得到了大连理工大学数学科学学院很多研究生的帮助，如陈海仙、王怡洋、彭晓霞、宋晓良、郑文化和李天郎等同学帮助我们整理和校对了书稿。我们还要特别感谢卢玉峰教授对编写和出版本书所给予的支持和帮助。此外，感谢大连理工大学教改基金对出版本书的支持。最后，向高等教育出版社的各位编辑为本书出版所做的细致工作表示由衷的敬意。

由于受水平所限，书中难免有许多不足和谬误之处，恳请广大读者批评指正。

王颖　南基洙

2015 年 3 月于大连理工大学创新园

目　录

第一章　预备知识

一、概念和性质的简介

（一）集合

1. 集合的概念

一些研究对象组成的总体称为集合，构成集合的研究对象称为集合的元素.

令 A 是一个集合，若对象 a 属于 A，则用 $a\in A$ 表示；反之，若对象 a 不属于 A，则用 $a\notin A$ 表示.令 A 和 B 是两个集合.若对于任意 $a\in A$ 都有 $a\in B$，则称集合 A 是集合 B 的子集合，记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$.空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集合.若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称集合 A 和 B 相等，记为 $A=B$.

含有有限多个元素的集合称为有限集.否则，称为无限集.符号 $|A|$ 表示集合 A 所含元素的个数.

2. 集合的运算及运算规律

交集　$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}$，

并集　$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}$，

差集　$A-B=\{x\mid x\in A,x\notin B\}$.

更一般地，基于某个指标集 I，

$$\bigcap_{i\in I}A_i=\{x\mid \forall\, i\in I,x\in A_i\},\quad \bigcup_{i\in I}A_i=\{x\mid \exists\, i\in I,x\in A_i\}.$$

交换律　$A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A.$

结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C).$

分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C),$

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C).$

德摩根律　$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C),$

$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C).$

3. 集合间的笛卡儿积

设 A 和 B 是两个集合，则集合

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$$

称为 A 和 B 的笛卡儿积.并规定

$$(a,b)=(x,y)\Leftrightarrow a=x,b=y.$$

一般地,我们可以定义 n(可以是无穷大)个集合的笛卡儿积

$$\prod_{i=1}^{n}A_i=A_1\times\cdots\times A_i\times\cdots\times A_n=\{(a_1,\cdots,a_i,\cdots,a_n)\mid a_i\in A_i,1\leqslant i\leqslant n\}.$$

并且规定

$$(a_1,\cdots,a_n)=(b_1,\cdots,b_n)\Leftrightarrow a_i=b_i,i=1,\cdots,n.$$

(二) 映射

1. 映射的概念

设 A 和 B 是两个非空集合,若存在一个法则 φ 使得对任意的 $a\in A$,存在唯一的 $b\in B$ 与之对应,则称 φ 是 A 到 B 的映射,b 是 a(在 φ 下)的像,a 是 b(在 φ 下)的原像.

设 φ 是 A 到 B 的映射,A_0 是 A 的非空子集.显然,

$$\upsilon:A_0\to B$$
$$a\to\varphi(a)$$

是 A_0 到 B 的映射,称 υ 是 φ 在 A_0 上的限制,并记其为 $\upsilon=\varphi|_{A_0}$.

设 φ 是 A 到 B 的映射,若 A 中不同元素在 φ 下的像都不同,则称 φ 是单射.若 B 中的每个元素在 φ 下都有原像,则称 φ 是满射.若 φ 既是单射又是满射,则称 φ 是双射(或称 φ 是一一映射).A 到 A 自身的映射称为 A 上的变换.对于变换,同样有单变换、满变换和双变换的概念.

关于单射和满射有如下判别方法:

设 $\varphi:A\to B$ 是映射,则

(1) φ 是单射$\Leftrightarrow$对任意 $a_1,a_2\in A$,当 $\varphi(a_1)=\varphi(a_2)$ 时,必有 $a_1=a_2$;

(2) φ 是单射$\Leftrightarrow$存在映射 $\psi:B\to A$,使得 $\psi\varphi=\mathrm{id}_A$;

(3) φ 是满射$\Leftrightarrow\varphi(A)=B$;

(4) φ 是满射$\Leftrightarrow$存在映射 $\psi:B\to A$,使得 $\varphi\psi=\mathrm{id}_B$.

2. 映射的运算

设 φ 是 A 到 B 的映射,ψ 是 B 到 C 的映射,则存在映射 $\psi\varphi:A\to C$,满足对任意的 $a\in A$,有 $\psi\varphi(a)=\psi(\varphi(a))$.称映射 $\psi\varphi$ 是 φ 与 ψ 的合成.映射的合成满足结合律.

对任意映射 $\varphi:A\to B$,有 $\varphi\mathrm{id}_A=\varphi$ 和 $\mathrm{id}_B\varphi=\varphi$.

若 φ 是集合 A 上的变换,则我们可以用 φ^t 表示 t 个 φ 的合成,并规定 $\varphi^0=\mathrm{id}_A$.

3. 可逆映射

设 φ 是 A 到 B 的映射,若存在 B 到 A 的映射 ψ,使得 $\psi\varphi=\mathrm{id}_A,\varphi\psi=\mathrm{id}_B$,则称

φ 是可逆映射，ψ 是 φ 的逆映射.

若 φ 是可逆映射，则 φ 的逆映射是唯一的.φ 的逆映射记为 φ^{-1}.特别地，若 φ 是 A 到 A 的可逆映射，n 是正整数，则令 $\varphi^{-n}=(\varphi^{-1})^n$.

若 φ 是 A 到 B 的可逆映射，ψ 是 B 到 C 的可逆映射，则 $\psi\varphi$ 是可逆映射，且 $(\psi\varphi)^{-1}=\varphi^{-1}\psi^{-1}$.

（三）代数系统

1. 运算的定义

设 A 是一个非空集合，称 $A\times A$ 到 A 的映射为 A 上的一个二元运算，简称为运算.

令 $\circ$ 和 $\cdot$ 是 A 上的两个运算.对 $\forall a,b,c\in A$，若 $(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$，则称 $\circ$ 满足结合律；若 $a\circ b=b\circ a$，则称 $\circ$ 满足交换律；若 $a\cdot(b\circ c)=(a\cdot b)\circ(a\cdot c)$，则称 $\cdot$ 对 $\circ$ 满足左分配律；若 $(b\circ c)\cdot a=(b\cdot a)\circ(c\cdot a)$，则称 $\cdot$ 对 $\circ$ 满足右分配律；若 $\cdot$ 对 $\circ$ 既满足左分配律又满足右分配律，则称 $\cdot$ 对 $\circ$ 满足分配律.

设 $\circ$ 是 A 上的运算，A_0 是 A 的非空子集合，若对任意 $a,b\in A_0$，有 $a\circ b\in A_0$（称 $\circ$ 在 A_0 上封闭），则 A_0 有运算

$$A_0\times A_0\to A_0$$
$$(a,b)\to a\circ b.$$

这个运算仍然用 $\circ$ 记.即若集合上的运算在子集合上封闭，则该运算也是子集合上的运算.

若 $\circ$ 是集合 A_1 上的运算，$\cdot$ 是集合 A_2 上的运算，则容易验证

$$(a_1,a_2)(b_1,b_2)=(a_1\circ b_1,a_2\cdot b_2)$$

是集合 $A_1\times A_2$ 上的一个运算，其中 $a_i,b_i\in A_i$，$i=1,2$.

2. 代数系统的定义

令 A 是非空集合，$\circ$ 是 A 上的运算，若将 A 和 $\circ$ 作为一个整体，则称 A 是（具有一个运算的）代数系统，记为 $\{A;\circ\}$.若 A 有两个运算 $\circ$ 和 $\cdot$，且我们把 A，$\circ$ 和 $\cdot$ 作为整体，则称 A 是（具有两个运算的）代数系统，记为 $\{A;\circ,\cdot\}$.

代数系统的概念可以向有多个运算的情形进行推广.

3. 代数系统的特殊元素

若 $\{A;\circ\}$ 中有元素 e，对 A 中每个元素 a 都有 $e\circ a=a$（或 $a\circ e=a$），则称 e 是 A 的一个左（或右）单位元.若 e 既是左单位元也是右单位元，则称 e 是单位元.

设 $\{A;\circ\}$ 有左（或右）单位元 e，对 $a\in A$，若有 $a'\in A$ 使得 $a'\circ a=e$（或 $a\circ a'=e$），则称 a' 是 A 的一个左（或右）逆元.若 e 是单位元，a' 是 A 的左逆元也是右逆元，则称 a' 是 a 的一个逆元.

性质 1 若代数系统$\{A;\circ\}$有单位元,则单位元是唯一的.

性质 2 设代数系统$\{A;\circ\}$有单位元,且$\circ$满足结合律,若$a\in A$有逆元,则a的逆元是唯一的.

4. 代数系统的同态与同构

令$\{A;\circ\}$和$\{A';\cdot\}$是两个代数系统,若存在A到A'的映射f,且对任意a,$b\in A$有

$$f(a\circ b)=f(a)\cdot f(b)\ (\text{保持运算}),$$

则称f是$\{A;\circ\}$到$\{A';\cdot\}$的同态映射.若f又是单射(或满射),则称f是A到A'的单同态(或满同态)映射.若f是双射,则称f是A到A'的同构映射.

若存在A到A'的同态(或同构)映射,也称A与A'同态(或同构,记为$A\cong A'$).

类似地,可以定义具有多个代数运算的代数系统之间的同态和同构.

性质 3 设f是$\{A;\varphi,\tau\}$到$\{A';\varphi',\tau'\}$的满同态,则

(1) φ满足结合律$\Rightarrow\varphi'$满足结合律;

(2) φ满足交换律$\Rightarrow\varphi'$满足交换律;

(3) τ对φ满足分配律$\Rightarrow\tau'$对φ'满足分配律.

性质 4 设f是$\{A;\varphi,\tau\}$到$\{A';\varphi',\tau'\}$的同构映射,则

(1) φ满足结合律$\Leftrightarrow\varphi'$满足结合律;

(2) φ满足交换律$\Leftrightarrow\varphi'$满足交换律;

(3) τ对φ满足分配律$\Leftrightarrow\tau'$对φ'满足分配律.

性质 5 设f是$\{A;\circ\}$到$\{A';\cdot\}$的满同态,e是$\{A;\circ\}$的单位元,则$f(e)$是$\{A';\cdot\}$的单位元.

(四) 剩余类集合 $\mathbf{Z}_n$

设$a,b\in\mathbf{Z},n\in\mathbf{Z}^+$($\mathbf{Z}^+$表示正整数集合),若$a,b$被$n$除后余数相等,则称$a$与$b$模$n$同余,记为$a\equiv b(\mathrm{mod}\ n)$,称集合$\bar{a}=\{b\in\mathbf{Z}\mid b\equiv a(\mathrm{mod}\ n)\}$为模$n$与$a$同余的剩余类(也称为模$n$的一个剩余类),$a$称为剩余类$\bar{a}$的一个代表元素.剩余类的代表元不是唯一的.

所有模n的剩余类构成的集合记为$\mathbf{Z}_n$,$\mathbf{Z}_n=\{\bar{0},\bar{1},\cdots,\overline{n-1}\}$.

在$\mathbf{Z}_n$中$b\in\bar{a}\Leftrightarrow\bar{b}=\bar{a}\Leftrightarrow$存在整数$t$,使得$a-b=nt$.

$\mathbf{Z}_n$上有加法运算和乘法运算,分别为$\bar{a}+\bar{b}=\overline{a+b}$和$\bar{a}\cdot\bar{b}=\overline{ab}$.

注意,$\mathbf{Z}_p$(p是素数)上的乘法运算也是其子集合$\mathbf{Z}_p^*=\mathbf{Z}_p-\{\bar{0}\}$上的乘法运算,但是$\mathbf{Z}_p$上的加法运算不是$\mathbf{Z}_p^*$上的加法运算.

（五）置换集合 S_n

1. 基本概念

设 S_n 是含有 n 个元素的集合上的所有双变换集合，不妨令 $A=\{1,2,\cdots,n\}$，则任意 $\sigma\in S_n$ 可以表示成如下形式：

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n)\end{pmatrix},$$

其中 $\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(n)$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个全排列.S_n 含有 $n!$ 个元素.S_n 的元素称为 n 元置换.两个 n 元置换的合成还是 n 元置换，因此，S_n 上有乘法运算（变换的合成）.

设 $\sigma\in S_n$，若在集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中存在 t 个不同的数 $i_1,i_2,\cdots,i_t$，使得 $\sigma(i_1)=i_2,\sigma(i_2)=i_3,\cdots,\sigma(i_{t-1})=i_t,\sigma(i_t)=i_1$，并且对于 $\{i_1,i_2,\cdots,i_t\}$ 之外的 $n-t$ 个元素在 σ 的作用下都保持不变，则称 σ 是长度为 t 的轮换，记为 $\sigma=(i_1i_2\cdots i_t)$.长度为 2 的轮换称为对换.

对于两个轮换 $(i_1i_2\cdots i_t)$ 和 $(j_1j_2\cdots j_s)$，若 $\{i_1,i_2,\cdots,i_t\}\cap\{j_1,j_2,\cdots,j_s\}=\varnothing$，则称这两个轮换是不相交的.如果一个置换可写成偶数个对换合成的形式，那么称其为偶置换，否则称其为奇置换.显然，两个偶置换的合成是偶置换，两个奇置换的合成是偶置换，偶置换与奇置换的合成是奇置换.长度为偶数的轮换是奇置换，长度为奇数的轮换是偶置换.

令 $A_n(n>1)$ 表示 S_n 中所有偶置换构成的集合，则 $|A_n|=\dfrac{|S_n|}{2}=\dfrac{n!}{2}$.

2. 主要结论

性质 1 S_n 中每个轮换都可以表示成对换合成的形式：

$$(i_1i_2\cdots i_{t-1}i_t)=(i_1i_t)(i_1i_{t-1})\cdots(i_1i_3)(i_1i_2)=(i_1i_2)(i_2i_3)\cdots(i_{t-2}i_{t-1})(i_{t-1}i_t).$$

性质 2 每一个置换可以表示成不相交的轮换的合成.

性质 3 每个置换可以表示成对换合成的形式，其表达式中出现的对换个数的奇偶性保持不变.

性质 4 在 $S_n(n\geqslant 3)$ 中，任意偶置换可以表示成长度为 3 的轮换的合成.

（六）等价关系与分类

令 A 是非空集合，$\sim$ 是 A 中两个元素之间的一个条件规则.若对 A 中任意两个元素 a 和 b，总能确定 a 和 b 是否满足条件规则 $\sim$，则称 $\sim$ 是 A 的一个二元关系，简称关系.

若 $\sim$ 是集合 A 的一个二元关系，则对任意 $a,b\in A$，若 a 和 b 满足 $\sim$，则称 a

和 b 有关系，记为 $a\sim b$；否则，称 a 和 b 没有关系，记为 $a\nsim b$.

满足反身性、对称性、传递性的关系称为等价关系.若 $\sim$ 是 A 的一个等价关系且 $a\sim b$，则称 a 与 b 等价.

若 $\sim$ 是 A 的等价关系，则称 $\bar{a}=\{b\in A\mid b\sim a\}$ 是 A 的一个等价类，a 称为 $\bar{a}$ 的代表元.

设 A 是一个非空集合，如果 A 的子集族（子集构成的集合）$\{A_i\mid A_i\subseteq A, i\in I\}$ 满足

(1) $A_i\neq\varnothing, i\in I$;

(2) $A_i\cap A_j=\varnothing, i\neq j$;

(3) $A=\bigcup\limits_{i\in I}A_i$,

则称 $\{A_i\mid i\in I\}$ 是 A 的一个分类，其中的每个子集 A_i 称为一个类.

集合 A 的一个等价关系决定 A 的一个分类.集合 A 的一个分类决定 A 的一个等价关系.

集合 A 到 B 的一个映射决定 A 的一个分类.集合 A 的一个分类 $\{A_i\mid i\in I\}$ 决定 A 到分类 $\{A_i\mid i\in I\}$ 的一个满射.

二、典型题的分析与解答

习题 1 设 A,B,C 都是集合，试证明 $C-(A\cap B)=(C-A)\cup(C-B)$.

注：此题是证明两个集合相等，而证明两个集合相等的基本手法是证明两个集合互相包含，即对任意 $x\in C-(A\cap B)$，去证 $x\in(C-A)\cup(C-B)$；反之，对任意 $x\in(C-A)\cup(C-B)$，去证 $x\in C-(A\cap B)$.

证明 若 $x\in C-(A\cap B)$，则 $x\in C$ 且 $x\notin(A\cap B)$，即 $x\in C$ 且 $x\notin A$ 或 $x\notin B$. 从而 $x\in C-A$ 或 $x\in C-B$，所以 $x\in(C-A)\cup(C-B)$.

若 $x\in(C-A)\cup(C-B)$，则 $x\in C-A$ 或 $x\in C-B$，从而 $x\in C$ 且 $x\notin A$，或 $x\in C$ 且 $x\notin B$，则 $x\in C$ 且 $x\notin(A\cap B)$，所以 $x\in C-(A\cap B)$.

习题 2 判断下列规则是否是映射：

(1) $\varphi:\mathbf{Q}\to\mathbf{Q},\dfrac{m}{n}\to mn, m,n\in\mathbf{N}, n\neq 0$;

(2) $\varphi:\mathbf{N}\to\mathbf{N}, m\to m-1$;

(3) $\varphi:\mathbf{Q}\to\mathbf{R}, x\to\dfrac{1}{x}$.

解 规则 $\varphi:A\to B$ 成为映射需要三个条件：1) A 中每个元素有像；2) A 中

每个元素的像在 B 中；3）A 中每个元素的像唯一.

（1）不是映射，因为$\frac{1}{1}=\frac{2}{2}$的像不唯一.

（2）不是映射，因为 $\varphi(0)=-1\notin \mathbf{N}$.

（3）不是映射，因为 0 没有像.

习题 3 判断下列 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}^+$ 映射是否为单射、满射、双射：

（1）$x\to 2^x+1$；

（2）$x\to 2^x$；

（3）当 $x\neq 0, x\to x^2$；当 $x=0, x\to 1$；

（4）$x\to 1$.

解 （1）因为 1 没有原像，所以 $x\to 2^x+1$ 是单射，不是满射.

（2）$x\to 2^x$ 既是单射又是满射，因而是双射.

（3）0 和 1 的像相等，不是单射，但为满射.

（4）2 没有原像，1 和 2 的像又相等，所以 $x\to 1$ 不是单射也不是满射.

习题 4 设 σ,τ 是集合 A 上的变换，证明：

（1）若 σ,τ 都是单变换，则 $\sigma\tau$ 是单变换；

（2）若 σ,τ 都是满变换，则 $\sigma\tau$ 是满变换；

（3）若 σ,τ 都是双变换，则 $\sigma\tau$ 是双变换.

证明 （1）设 $\sigma\tau(a)=\sigma\tau(b)$，因为 σ 是单变换，所以 $\tau(a)=\tau(b)$，又因为 τ 也是单变换，所以 $a=b$，即 $\sigma\tau$ 是单变换.

（2）对任意 $a\in A$，由 σ 是满变换知存在 $b\in A$ 使得 $\sigma(b)=a$，对 $b\in A$，因为 τ 是满变换，所以存在 $c\in A$，使得 $\tau(c)=b$，从而 $\sigma\tau(c)=a$，a 有原像，$\sigma\tau$ 是满变换.

（3）由（1）和（2）得证.

习题 5 设 A 是 n 元有限集合，σ 是 A 的一个变换，则 σ 是可逆变换$\Leftrightarrow\sigma$ 是单变换$\Leftrightarrow\sigma$ 是满变换.

证明 若 σ 是单变换，则不同元素的像不同，共有 n 个像，这 n 个像刚好构成集合 A，因此 σ 是满变换.

若 σ 是满变换，则有 n 个不同的像，而不同原像的个数也是 n 个，所以 σ 是单变换.

习题 6 设 φ 是 $A=\{1,2,3\}$ 到 A 的满射，且 $\varphi(1)=2$，求这样 φ 的个数.

解 因为有限集合上的满变换也是单变换，所以 φ 只有如下两种：

$$\varphi: 1\to 2, 2\to 3, 3\to 1;$$

$$\varphi: 1\to 2, 2\to 1, 3\to 3.$$

习题 7 设 σ,σ' 是 A 到 B 的映射，$\tau:B\to C$ 是单射，证明若 $\tau\sigma=\tau\sigma'$，则 $\sigma=\sigma'$.

证明 对任意 $a\in A$，有 $\tau\sigma(a)=\tau\sigma'(a)$，因为 τ 是单射，所以 $\sigma(a)=\sigma'(a)$，从而 $\sigma=\sigma'$.

习题 8 设 φ 是 A 到 B 的映射，$A_0\subseteq A$，证明 $A_0\subseteq\varphi^{-1}(\varphi(A_0))$，并举例说明等号不一定成立.

解 对任意 $a\in A_0$，$\varphi(a)\in\varphi(A_0)$，从而 $a\in\varphi^{-1}(\varphi(A_0))$.

定义 $\varphi:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$，$n\to|n|$，则 $\mathbf{Z}^+\subseteq\varphi^{-1}(\varphi(\mathbf{Z}^+))$，但是 $\mathbf{Z}^+\neq\varphi^{-1}(\varphi(\mathbf{Z}^+))$.

习题 9 设 φ 是 A 到 B 的满射，$B_0\subseteq B$，证明 $\varphi(\varphi^{-1}(B_0))=B_0$.

证明 若 $b\in\varphi(\varphi^{-1}(B_0))$，则存在 $a\in\varphi^{-1}(B_0)$，使得 $b=\varphi(a)\in B_0$，即 $b\in B_0$.

若 $b\in B_0$，则存在 $a\in A$，使得 $b=\varphi(a)\in B_0$. 从而 $a\in\varphi^{-1}(B_0)$，$b\in\varphi(\varphi^{-1}(B_0))$.

综上，$\varphi(\varphi^{-1}(B_0))=B_0$.

习题 10 在 S_3 中，$\sigma=(123)$，$\varphi=(12)$，试计算 $\sigma^2\varphi$.

解 置换的乘法运算可用数表完成. 例如我们可以用下表计算 $\sigma\varphi$.

$$\sigma\varphi=\begin{pmatrix}1&2&3\\ \varphi\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 2&1&3\\ \sigma\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 3&2&1\end{pmatrix}=(13).$$

当然，为了简洁我们也可以将箭头、映射符号省略不写. 例如，

$$\sigma^2\varphi=\begin{pmatrix}1&2&3\\ 2&1&3\\ 3&2&1\\ 1&3&2\end{pmatrix}=(23).$$

习题 11 在 S_5 中，计算 $\sigma\tau,\tau^2,\sigma^{-1}\tau\sigma$，其中

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\ 3&1&4&2&5\end{pmatrix},\quad \tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\ 2&4&3&5&1\end{pmatrix}.$$

解 $$\sigma\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\ 2&4&3&5&1\\ 1&2&4&5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\ 1&2&4&5&3\end{pmatrix}=(345),$$

$$\tau^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\ 2&4&3&5&1\\ 4&5&3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\ 4&5&3&1&2\end{pmatrix}=(14)(25),$$

$$\sigma^{-1}\tau\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&4&2&5\\3&2&5&4&1\\1&4&5&3&2\end{pmatrix}=(2435).$$

习题 12 判断下列置换是否是偶置换：

$$(1536),(78249),(1536)(78249).$$

关于奇偶置换的判别，我们可以遵从定义将置换表示成对换合成的形式，再根据对换的个数确定置换的奇偶性；另外，根据长度为 t 的轮换可以表示成 $t-1$ 个对换的合成这个结论，我们仅需将置换表示为轮换的合成就可以判断置换的奇偶性.

解 (1536)是长度为 4 的轮换，因此是奇置换；(78249)是长度为 5 的轮换，因此是偶置换；$(1536)(78249)$是偶置换与奇置换的合成，因此是奇置换.

习题 13 证明在剩余类集合 $\mathbf{Z}_3$ 中，规则 $\bar{a}\sim\bar{b}\Leftrightarrow|a|>|b|$ 不是 $\mathbf{Z}_3$ 的一个关系.

证明 因为 $|2|>|1|$，$|2|<|4|$，所以 $\bar{2}\sim\bar{1}$，$\bar{2}\nsim\bar{4}$.而在 $\mathbf{Z}_3$ 中，$\bar{1}=\bar{4}$，所以 $\bar{2}\sim\bar{1}$，$\bar{2}\nsim\bar{1}$，即规则 $\bar{a}\sim\bar{b}\Leftrightarrow|a|>|b|$ 不是 $\mathbf{Z}_3$ 的一个关系.

习题 14 设 $A=\{a,b,c\}$，试在 A 中给出一个关系，满足对称性和传递性，但不满足反身性.

解 集合 A 的一个二元关系 $\sim$ 决定 $A\times A$ 的一个子集 $S=\{(a,b)\mid a,b\in A,a\sim b\}$，反之，$A\times A$ 的一个子集 S 决定 A 的一个二元关系 $\sim$：$a\sim b\Leftrightarrow(a,b)\in S$.通过 $A\times A$ 的一个子集 $S=\{(a,b),(b,a),(a,a),(b,b)\}$ 可以给出满足条件的关系.

习题 15 判断下列关系是否是等价关系：

(1) 在 $\mathbf{R}$ 中，$x\sim y\Leftrightarrow|x|\geqslant|y|$；

(2) 在 $\mathbf{R}$ 中，$x\sim y\Leftrightarrow xy\neq 0$；

(3) 在 $M_n(\mathbf{R})$ 中，$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}\Leftrightarrow\det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=0$；

(4) 在 $\mathbf{R}$ 中，$x\sim y\Leftrightarrow x>y$；

(5) 在 $M_n(\mathbf{R})$ 中，$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$；

(6) 在 $\mathbf{R}$ 中，$x\sim y\Leftrightarrow|x|+|y|>|x-y|$；

(7) 在 $\mathbf{R}$ 中，$x\sim y\Leftrightarrow|x|+|y|\geqslant|x-y|$；

(8) 在 $\mathbf{Z}$ 中，$m\sim n\Leftrightarrow m-n$ 是偶数.

解 注意，(1)，(2)，(3)都仅满足等价关系的三个条件中的两条，这说明等价关系的三个条件中的两个成立推不出第三个条件成立.

(1) 不是等价关系.满足反身性、传递性，但不满足对称性，因为 2 和 1 有关

系,但是 1 和 2 没关系.

(2) 不是等价关系.满足对称性、传递性,但不满足反身性,因为 0 和 0 没关系.

(3) 不是等价关系.满足反身性、对称性,但不满足传递性.令

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

则 $A\sim B, B\sim C, A\nsim C$.

(4) 不是等价关系.不满足反身性、对称性,因为 $1\nsim 1, 2\sim 1, 1\nsim 2$.

(5) 不是等价关系.不满足反身性,因为 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\neq A^{\mathrm{T}}$.

(6) 不是等价关系.不满足反身性,因为 $|0|+|0|=0, 0\nsim 0$.

(7) 是等价关系.

(8) 是等价关系.

习题 16　$A, B\in M_n(\mathbf{R})$,判断下列关系是否是等价关系:

(1) $A\sim B\Leftrightarrow$存在可逆矩阵 P, Q 使得 $A=PBQ$;

(2) $A\sim B\Leftrightarrow$存在可逆矩阵 P 使得 $A=P^{-1}BP$;

(3) $A\sim B\Leftrightarrow$存在可逆矩阵 P 使得 $A=P^{\mathrm{T}}BP$.

解　以上三种关系分别是矩阵的相抵关系、相似关系和相合关系,它们都是等价关系.

习题 17　给出集合 $A=\{ax^2+bx+c=0 \mid a, b, c\in\mathbf{R}, a\neq 0\}$ 的一个分类.

解　令 $b^2-4ac=\Delta$,

$$A_1=\{ax^2+bx+c=0 \mid \Delta>0\},\ A_2=\{ax^2+bx+c=0 \mid \Delta=0\},$$

$$A_3=\{ax^2+bx+c=0 \mid \Delta<0\},$$

则 $\{A_1, A_2, A_3\}$ 是 A 的一个分类.

习题 18　设 $H=\{(13), (14), (23)\}$, $K=\{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$,请说明 S_4 上的乘法运算是否是 H, K 上的乘法运算.

解　因为 $(13)(14)=(143)$ 不属于 H,即 S_4 的乘法运算在 H 上不封闭,所以 S_4 上的乘法运算不是 H 上的乘法运算.因为

$$(1)a=a=a(1), a^2=(1), a\in K,$$

$$(12)(34)(13)(24)=(14)(23),\quad (12)(34)(14)(23)=(13)(24),$$

$$(13)(24)(12)(34)=(14)(23),\quad (13)(24)(14)(23)=(12)(34),$$

$$(14)(23)(12)(34)=(13)(24),\quad (14)(23)(13)(24)=(12)(34),$$

即 S_4 的乘法运算在 K 上封闭.所以 S_4 上的乘法运算是 K 的乘法运算.

习题 19　设 $\sigma\in S_7$ 是长度为 4 的轮换,问 k 为何值时 σ^k 是轮换,并求轮换

的长度.

解 不妨设 $\sigma=(1234)$，则 $\sigma^2=(13)(24)$，$\sigma^3=(1432)$，$\sigma^4=(1)$，因此，$k=4n$ 时 σ^k 是长度为 1 的轮换，$k=4n\pm1$ 时 σ^k 是长度为 4 的轮换.

本题也说明轮换的合成不一定是轮换.

习题 20 判断下列运算$\circ$是否满足交换律、结合律：

(1) 在 $\mathbf{Z}$ 中，$x\circ y=x+y-xy$；

(2) 在 $M_n(\mathbf{R})$ 中，$\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$；

(3) 在 $\mathbf{Z}_n$ 中，$\bar{a}\circ\bar{b}=\overline{a-b}$；

(4) 在 $\mathbf{Z}_n$ 中，$\bar{a}\circ\bar{b}=\overline{2(a+b)}$.

解 (1) 两个运算规律都满足.

(2) 两个运算规律都不满足.

(3) 当 $n=2$ 时，两个运算规律都满足；当 $n\neq2$ 时，两个运算规律都不满足.

(4) 当 $n=2$ 时，两个运算规律都满足；当 $n\neq2$ 时，满足交换律，不满足结合律.

习题 21 设代数系统 $\{A;\circ\}$ 有单位元 e 且运算满足结合律，若 $a,b\in A$ 是可逆元，证明

$$(a\circ b)^{-1}=b^{-1}\circ a^{-1},\quad (a^{-1})^{-1}=a.$$

证明 因为 $(a\circ b)\circ(b^{-1}\circ a^{-1})=e=(b^{-1}\circ a^{-1})\circ(a\circ b)$，所以 $b^{-1}\circ a^{-1}$ 是 $a\circ b$ 的逆元.因为 $a\circ a^{-1}=a^{-1}\circ a=e$，所以 $(a^{-1})^{-1}=a$.

习题 22 求代数系统 $\{\mathbf{Z}_6;+\}$ 的每个元素的逆元.

解 $\bar{0}$ 是 $\{\mathbf{Z}_6;+\}$ 的单位元，所以易知 $\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5}$ 的逆元依次为 $\bar{0},\bar{5},\bar{4},\bar{3},\bar{2},\bar{1}$.

习题 23 证明集合 $\mathbf{Z}_5-\{\bar{0}\}$ 关于 $\mathbf{Z}_5$ 的乘法运算是代数系统，并求其单位元及每个元素的逆元.

证明 由于 $\mathbf{Z}_5$ 的乘法运算在子集合 $\mathbf{Z}_5-\{\bar{0}\}$ 上封闭可知第一个结论成立.单位元为 $\bar{1}$.元素 $\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}$ 的逆元依次为 $\bar{1},\bar{3},\bar{2},\bar{4}$.

习题 24 设 φ 是代数系统 $\{A;\cdot\}$ 到 $\{B;\circ\}$ 的满同态映射，e 是 A 的右单位元，证明 $\varphi(e)$ 是 B 的右单位元.

证明 对任意 $b\in B$，存在 $a\in A$ 使得 $\varphi(a)=b$.因为

$$b\circ\varphi(e)=\varphi(a)\circ\varphi(e)=\varphi(a\cdot e)=\varphi(a)=b,$$

所以 $\varphi(e)$ 是 B 的右单位元.

习题 25 设$\{M_n(\mathbf{R});\cdot\}$是实数域上 n 阶方阵关于矩阵乘法构成的代数系统，$\{\mathbf{R};\cdot\}$是实数关于数的乘法构成的代数系统，证明 $\varphi:M_n(\mathbf{R})\to\mathbf{R}$，$\varphi(\boldsymbol{A})=\det(\boldsymbol{A})$是$\{M_n(\mathbf{R});\cdot\}$到$\{\mathbf{R};\cdot\}$的满同态.

证明 因为 $\det(\boldsymbol{AB})=\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$，所以 $\varphi(\boldsymbol{AB})=\varphi(\boldsymbol{A})\varphi(\boldsymbol{B})$.对任意 $a\in\mathbf{R}$，令

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

则 $\det(\boldsymbol{A})=a$，即 φ 是$\{M_n(\mathbf{R});\cdot\}$到$\{\mathbf{R};\cdot\}$的满同态.

习题 26 证明代数系统$\{\mathbf{Z};\cdot\}$和$\{M_n(\mathbf{R});\cdot\}$不同构.

证明 两个代数系统同构，仅需要给出它们之间的一个同构映射，而要证明不同构，必须指明它们之间没有同构映射，这就需要证明任意映射都不是同构映射，要逐一验证是不可能的，因此，论证不同构可以从下面两个方面考虑：

(1) 通过看两个代数系统的运算律、特殊元素来判别.

例如$\{\mathbf{Z};\cdot\}$与$\{M_n(\mathbf{R});\cdot\}$.因为$\{\mathbf{Z};\cdot\}$的运算满足交换律，$\{M_n(\mathbf{R});\cdot\}$的运算不满足交换律，所以$\{\mathbf{Z};\cdot\}$与$\{M_n(\mathbf{R});\cdot\}$不同构.

再例如$\{\mathbf{Z};\cdot\}$与$\{2\mathbf{Z};\cdot\}$.因为$\{\mathbf{Z};\cdot\}$有单位元，$\{2\mathbf{Z};\cdot\}$没有单位元，所以$\{\mathbf{Z};\cdot\}$与$\{2\mathbf{Z};\cdot\}$不同构.

(2) 利用反证法判别.

例如$\{\mathbf{R}-\{0\};\cdot\}$与$\{\mathbf{R};+\}$.假设$\{\mathbf{R}-\{0\};\cdot\}$与$\{\mathbf{R};+\}$同构，则存在同构映射 φ，使得 $\varphi(1)=0$，设 $\varphi(-1)=a$，则 $\varphi(1)=\varphi(-1)+\varphi(-1)=2a$，从而 $a=0$，矛盾，所以二者不同构.

习题 27 证明 $\mathbf{Z}$ 的加法和乘法运算满足的运算律在 $\mathbf{Z}_n$ 中同样满足.

解 我们可以直接验证 $\mathbf{Z}_n$ 的运算规律，也可以通过给出$\{\mathbf{Z};+,\cdot\}$到$\{\mathbf{Z}_n;+,\cdot\}$的满同态映射，从而可知 $\mathbf{Z}$ 的运算规律在 $\mathbf{Z}_n$ 中都成立.

$\mathbf{Z}_n$ 是 $\mathbf{Z}$ 的一个分类方法，因此，$\mathbf{Z}$ 到 $\mathbf{Z}_n$ 有一个满射：

$$\varphi:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}_n$$

$$a\to\overline{a}.$$

事实上，这个映射也是$\{\mathbf{Z};+,\cdot\}$到$\{\mathbf{Z}_n;+,\cdot\}$的满同态映射，因为

$$\varphi(a+b)=\overline{a+b}=\overline{a}+\overline{b}=\varphi(a)\varphi(b),$$

$$\varphi(ab)=\overline{ab}=\overline{a}\,\overline{b}=\varphi(a)\varphi(b).$$