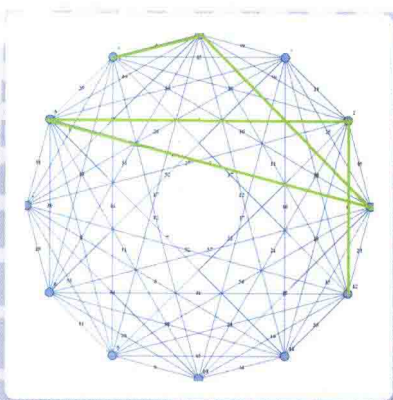


普通高等学校“十三五”规划教材

离散数学

L I S A N S H U X U E

邹丽娜 丁茜 罗旭 主编



中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

普通高等学校“十三五”规划教材

离散数学

邹丽娜 丁茜 罗旭 主编
刘哲 刘冰 周颖 副主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

离散数学是现代数学的重要分支,通过离散数学的学习,学生能够得到严格的逻辑推理与抽象思维能力的训练,能够掌握数理逻辑、集合论、图论等知识。

本书主要分为三部分:数理逻辑、集合论和图论。其中数理逻辑部分包括命题逻辑、谓词逻辑两章;集合论部分包括集合论和二元关系两章。

本书适合作为普通高等学校计算机科学与技术、网络工程及信息管理等专业教材,也可作为高职高专、成人高校相关专业教材。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/邹丽娜,丁茜,罗旭主编. —北京:
中国铁道出版社,2016.2
普通高等学校“十三五”规划教材
ISBN 978-7-113-21317-6

I. ①离… II. ①邹… ②丁… ③罗… III. ①离散数
学—高等学校—教材 IV. ①O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 011599 号

书 名: 离散数学
作 者: 邹丽娜 丁 茜 罗 旭 主编

策 划: 李小军
责任编辑: 李小军 徐盼欣
封面设计: 付 魏
封面制作: 白 雪
责任校对: 汤淑梅
责任印制: 郭向伟

读者热线: (010)63550836

出版发行: 中国铁道出版社(100054,北京市西城区右安门西街8号)

网 址: <http://www.51eds.com>

印 刷: 三河市兴达印务有限公司

版 次: 2016年2月第1版 2016年2月第1次印刷

开 本: 720 mm×960 mm 1/16 印张: 9 字数: 166 千

书 号: ISBN 978-7-113-21317-6

定 价: 22.00 元

版权所有 侵权必究

凡购买铁道版图书,如有印制质量问题,请与本社教材图书营销部联系调换。电话:(010)63550836

打击盗版举报电话:(010)51873659

前 言

离散数学是现代数学的重要分支,是计算机相关学科的基础理论课之一。它为计算机相关专业的后续课程(如数字逻辑、程序设计、编译原理、数据库系统、人工智能等)的学习奠定基础。因此,离散数学是计算机科学与技术、网络工程及信息管理与信息系统专业本科生的必修专业基础课之一。

通过离散数学课程的学习,学生能够得到严格的逻辑推理与抽象思维能力的训练,能够掌握数理逻辑、集合论、图论等知识,并运用其理论、思想和方法来学习和研究计算机各学科,为深入学习计算机科学打下坚实的基础。离散数学的先行课是数学的一些基础学科,如高等数学和线性代数等。同时,离散数学是学习计算机科学中某些学科的先行课程,即它是学习数字逻辑、程序设计、数据结构、编译方法、形式语言等学科的基础。

本书内容除第一章绪论外分为三部分:数理逻辑(第2章,第3章)、集合论(第4章,第5章)和图论(第6章)。由于离散数学具有知识不连续的特点,因此在教学时可以选择性地安排教学顺序。

本书由邹丽娜、丁茜、罗旭任主编,由刘哲、刘冰、周颖任副主编。

由于编者水平有限,经验不够丰富,书中难免存在不足之处,敬请广大读者批评指正。

编 者

2015年11月

目 录

第1章 绪论	1
§ 1.1 什么是离散数学	1
§ 1.2 离散数学的地位与作用	2
第2章 命题逻辑	4
§ 2.1 命题与联结词	4
2.1.1 命题的概念(4)	2.1.2 命题联结词(5)
2.1.3 描述实际问题(7)	
§ 2.2 命题公式及其赋值	11
2.2.1 命题公式(11)	2.2.2 公式的解释与真值表(13)
2.2.3 命题公式的分类(15)	
§ 2.3 等值演算	16
2.3.1 常用等值式(16)	2.3.2 等值演算的应用(18)
§ 2.4 范式	21
2.4.1 范式的基本概念(21)	2.4.2 主析取范式(23)
2.4.3 主合取范式(26)	2.4.4 主析取范式与主合取范式的意义(29)
§ 2.5 命题逻辑推理	31
2.5.1 命题逻辑推理的基本概念(31)	2.5.2 命题逻辑推理规则(32)
2.5.3 形式证明方法(34)	2.5.4 命题逻辑推理应用(36)
小结	37
习题	38
第3章 谓词逻辑	46
§ 3.1 谓词逻辑概述	46
3.1.1 谓词逻辑基本概念(47)	3.1.2 描述实际问题(49)
§ 3.2 谓词公式与解释	52
3.2.1 谓词的合式公式(52)	3.2.2 自由变元和约束变元(53)
3.2.3 谓词公式的解释(53)	3.2.4 谓词公式的分类(55)
§ 3.3 谓词公式的等值演算	56
3.3.1 谓词公式置换规则(57)	3.3.2 变元换名规则(57)
3.3.3 量词等值式(58)	3.3.4 谓词公式的范式(60)
§ 3.4 谓词推理	62

2 | 离散数学

3.4.1 谓词逻辑推理规则(62)	3.4.2 谓词逻辑推理常见问题(64)
3.4.3 谓词逻辑推理的应用(65)	
小结.....	65
习题.....	66
第4章 集合论.....	71
§4.1 集合的表示和基本概念	71
4.1.1 集合与元素(71)	4.1.2 集合的表示(71)
4.1.3 集合的基本概念(73)	
§4.2 集合的运算	74
§4.3 集合的计数	76
4.3.1 有限集中元素的数量(76)	4.3.2 容斥原理(76)
4.3.3 鸽笼原理(79)	
小结.....	79
习题.....	80
第5章 二元关系.....	82
§5.1 二元关系的基本概念	82
5.1.1 有序对与有序 n 元组(82)	5.1.2 笛卡儿积(82)
5.1.3 二元关系的定义(83)	5.1.4 二元关系的表示(84)
§5.2 关系运算	84
5.2.1 关系的基本运算(85)	5.2.2 关系运算相关定理(86)
§5.3 关系的性质	89
5.3.1 关系的基本性质(89)	5.3.2 性质的判断方法(90)
5.3.3 关系运算与关系的性质(92)	
§5.4 关系的闭包	92
5.4.1 关系闭包的概念(92)	5.4.2 闭包运算方法(93)
§5.5 等价关系	96
5.5.1 等价关系的概念(96)	5.5.2 等价类(96)
5.5.3 集合的划分(97)	
§5.6 偏序关系	98
5.6.1 偏序关系的概念(98)	5.6.2 哈斯图(99)
小结	102
习题	102
第6章 图论	104
§6.1 图的基本概念.....	104

6.1.1 无向图(105)	6.1.2 有向图(107)	
6.1.3 图的矩阵表示(108)		
§ 6.2 图的连通性.....		110
6.2.1 无向图的通路与回路(110)	6.2.2 有向图的通路与回路(112)	
§ 6.3 特殊图.....		117
6.3.1 欧拉图(117)	6.3.2 哈密顿图(119)	
小结		121
习题		121
习题参考答案		124
参考文献		136

第 1 章 绪 论

§ 1.1 什么是离散数学

1. 离散数学的概念

离散数学是包含数理逻辑、数论、代数、图论等多个数学分支内容的一门学科,它的研究对象是离散量及其结构和相互关系。

离散数学是在计算机科学与技术的发展过程中派生出来的一门学科,而不是在数学的研究过程中从某个数学领域(或数学专题)分离出来的一个数学分支。

离散数学以离散量的结构和相互关系等作为主要研究目标,其研究对象一般是有限个元素。离散数学所涉及的数学分支主要包括:集合论、逻辑演算、递归论、数论、线性代数、抽象代数、布尔代数、组合论、图论、概率论、近似计算、离散化方法等。

2. 离散数学的发展过程

构成计算机科学的核心是数据结构、算法和程序设计,这些核心内容都是建立在离散结构的基础上的。离散结构主要指离散对象之间的数学结构,所以又称离散数学。这个名称是 1974 年由美国 IEEE 计算机协会典型课程分委员会正式提出的。

离散数学正式形成于 20 世纪 70 年代初期,但组成离散数学的主要内容都有一定的发展历史。数理逻辑的创始者是 17 世纪德国数学家兼哲学家莱布尼茨,他最先提出要建立“通用语言”和“推理演算”两种工具。集合论的起源可以追溯到 16 世纪末期,开始是为了寻求微积分的坚实基础,人们引进了有关数集的研究。近代代数产生于 19 世纪初期,它研究数字、文字和一般元素的代数运算规律以及各种代数结构的性质。图论的研究最早起源于一些数学难题的研究,如 1736 年欧拉所提出的哥尼斯堡七桥问题、汉密尔顿的环路问题、地图着色的四色猜想等。上述这些近代数学分支,开始是各自独立发展的,随着它们的应用范围不断拓展,其理论进展逐步互相渗透统一。这些综合理论的出现,大部分与计算机科学的发展有关。

离散数学是随着计算机的迅速发展而逐渐形成的。最早包含离散数学中一些主要内容的著作当推 1963 年出版的罗伯特所著的《集合论与逻辑》一书。直到 1973 年才第一次出现了两本以离散数学结构命名的代表著作,这就是斯通所著的《离散数学结构

及其应用》，以及泼里帕拉特等所著的《离散结构导论》。1975年，出现了一本全面阐述离散数学基本理论、紧密结合计算机科学中数据结构和算法的离散数学教材，这就是特伦布莱等所著的《离散数学结构及其对于计算机科学的应用》。1975年左右，离散数学的内容已经基本形成，成为一门独立的课程。1976年，美国 IEEE 计算机协会典型课程分委员会在各设置计算机专业的院校中已普遍开设“离散数学”这一课程。

§ 1.2 离散数学的地位与作用

离散数学课程所涉及的概念、方法和理论，大量地应用在数据结构、数据库系统、编译原理、数字逻辑、人工智能、信息安全等计算机课程。

(1) 数据结构描述的对象有四种，分别是线形结构、集合、树形结构和图结构。线形结构中的线性表、栈、队列等都是根据数据元素之间关系的不同而建立的对象，离散数学中的关系研究有关元素之间不同关系的内容；集合对象及集合的各种运算都是离散数学中集合论研究的内容；离散数学中的树和图论的内容为树形结构对象和图结构对象的研究提供了很好的知识基础。

(2) 数据库系统目前主要研究的数据库类型是关系数据库。关系数据库的关系演算和关系模型需要用到离散数学中谓词逻辑的知识；关系数据库的逻辑结构是由行和列构成的二维表，表之间的连接操作需要用到离散数学中笛卡儿积的知识，表数据的查询、插入、删除和修改等操作需要用到离散数学中关系代数和数理逻辑的知识。

(3) 编译原理和技术是软件工程技术人员的很重要的基础知识，编译程序是非常复杂的系统程序，包括词法分析、语法分析、语义分析、中间代码生成、代码优化、目标代码生成、依赖机器的代码优化七个阶段。离散数学中计算模型中的语言和文化、有限状态机、语言的识别和图灵机等知识为编译程序中的词法分析和语法分析提供了基础。

(4) 数字逻辑为计算机硬件中的电路设计提供了重要理论，而离散数学中命题逻辑中的联结词运算可以解决电路设计中由高低电平表示的各信号之间的运算以及二进制的位运算等问题。

(5) 离散数学中数学推理和布尔代数的知识为早期人工智能研究领域打下了良好的数学基础。谓词逻辑演算为人工智能学科提供了一种重要的知识表示方法和推理方法。另外，模糊逻辑的概念也可以用于人工智能。

(6) 信息安全与离散数学也关系密切，离散数学中的代数系统和初等数论为密码学提供了重要的数学基础。例如，恺撒密码的本质就是使用了代数系统中群的知识，初等数论中欧拉定理和费马小定理为著名的 RSA 公钥密码体系提供了最直接的数学基础。

(7) 计算机图形学用到离散数学中图论的知识；计算机网络用到离散数学中图论

和树的知识;软件工程用到离散数学中数理逻辑和图论的知识;计算机体系结构用到离散数学中代数系统和哈夫曼编码的知识。

离散数学不但为后续课程提供了必需的理论基础,还可以培养学生的抽象思维能力和解决问题的能力,因此,离散数学已经成为计算机专业学生必须掌握的理论基础和数学工具。

第2章 命题逻辑

数理逻辑是用数学方法研究推理的形式结构和推理的规律的数学学科. 所谓数学方法, 就是用一套有严格定义的符号, 即建立一套形式语言来研究, 因此数理逻辑也称为符号逻辑. 数理逻辑的基础部分是命题逻辑和谓词逻辑. 本章主要讲述命题逻辑.

§ 2.1 命题与联结词

2.1.1 命题的概念

数理逻辑研究的中心问题是推理, 而推理就必然包含前提和结论, 前提和结论都是表达判断的陈述句, 因而表达判断的陈述句就成为推理的基本要素. 在数理逻辑中, 将能够判断真假的陈述句称为命题. 因此命题就成为推理的基本单位.

定义 2-1 能够判断真假的陈述句称为**命题**. 命题的判断结果称为命题的“真值”. “真值”取值为“真”的命题称为**真命题**, “真值”取值为“假”的命题称为**假命题**. 常用 $T(\text{True})$ 或 1 表示真, 用 $F(\text{False})$ 或 0 表示假.

从上述的定义可知, 判定一个句子是否为命题要分为两步: 一是判定是否为陈述句, 二是判定能否判定真假, 二者缺一不可.

例 2-1 判断下列句子是否为命题.

- (1) 北京是中国的首都.
- (2) 请勿吸烟!
- (3) 雪是黑的.
- (4) 猪八戒是猪吗?
- (5) $x+y=5$.
- (6) 我正在说谎.
- (7) 如果温度为 0°C 以下, 则水会结成冰.
- (8) 3 能被 2 整除.
- (9) 火星上有生命.
- (10) 张三是个胖子.

解 在上述的 10 个句子中, (2)、(4) 不是陈述句; (5)、(6)、(10) 虽然是陈述句, 但

(5)没有确定的真值,当 $x=2, y=3$ 时, $x+y=5$ 正确,当 $x=4, y=3$ 时, $x+y=5$ 不正确,其真值随 x, y 取值的不同而改变,(6)是悖论(即由真能推出假,由假也能推出真),(10)中的“胖子”是一个模糊的概念,不能判断真假,因而(2)、(4)、(5)、(6)、(10)均不是命题。(1)、(3)、(7)、(8)、(9)都是命题,其中(9)虽然现在无法判断真假,但随着科技的进步是可以判定真假的。

根据命题的结构形式,命题分为原子命题和复合命题。

定义 2-2 不能被分解为更简单的陈述语句的命题称为原子命题(也称为简单命题)。

定义 2-3 由两个或两个以上原子命题组合而成的命题称为复合命题。

例如,例 2-1 中的命题“雪是黑的”为原子命题,而命题“如果温度为 0°C 以下,则水会结成冰”是复合命题,是由“温度为 0°C 以下”与“水会结成冰”两个原子命题组成的。

定义 2-4 表示原子命题的符号称为命题标识符。命题标识符依据表示命题的情况,分为命题常元和命题变元。一个有确定真值的命题的标识符称为命题常元(或命题常项);没有指定具体内容的命题标识符称为命题变元(或命题变项)。本书中用小写字母 $a, b, c, \dots, p, q, r, \dots$ (可带下标)等表示命题。将表示命题的符号放在该命题的前面,称为命题的符号化。例如:

p :2 是素数。

q :雪是黑的。

此时, p 是真命题, q 是假命题。

注 命题变元不是命题,只有当命题取一个确定的值时才是命题。例如,对于原子命题 $p:x=3$ 来说,命题变元的真值情况不确定,因而命题变元不是命题,只有给命题变元 p 一个具体的命题取代时, p 有了确定的真值, p 才成为命题。

2.1.2 命题联结词

描述一个问题时,往往要用多个命题或复杂的命题形式才能表达一个完整的内容。用于把一个或多个命题联结起来构成复杂命题形式的词语称为命题联结词。

下面主要介绍五种常用的联结词的性质与用途,分别是“非”(否定联结词)、“与”(合取联结词)、“或”(析取联结词)、“若……,则……”(蕴涵联结词)、“当且仅当”(同真假联结词)。

1. 否定联结词

设 p 为一个命题,复合命题“非 p ”(或 p 的否定)称为 p 的否定式,记为 $\neg p$,读作“非 p ”。 $\neg$ 为否定联结词。

规定 p 的真值与 $\neg p$ 的真值有如下关系:

(1) 若 p 的真值为 1, 则 $\neg p$ 的真值为 0;

(2) 若 p 的真值为 0, 则 $\neg p$ 的真值为 1.

例 2-2 $p: 4$ 能被 2 整除, $\neg p: 4$ 不能被 2 整除.

解 p 是真命题, $\neg p$ 是假命题.

2. 合取联结词

设 p, q 为两个命题, p 和 q 的合取是一个复合命题, 表示两个命题的合取关系, 记为 $p \wedge q$, 读作“ p 并且 q ”, 称为 p 与 q 的合取式, $\wedge$ 为合取联结词.

例 2-3 将下列命题符号化.

(1) 今天既下雨又刮风.

(2) 李燕不但聪明, 而且用功.

(3) 张三虽然聪明, 但不用功.

解 (1) 设 p : 今天下雨, q : 今天刮风. 则(1)可表示为 $p \wedge q$.

(2) 设 p : 李燕聪明, q : 李燕用功. 则(2)可表示为 $p \wedge q$.

(3) 设 p : 张三聪明, q : 张三用功. 则(3)可表示为 $p \wedge \neg q$.

规定命题 p, q 和 $p \wedge q$ 三者的真值有如下关系:

(1) 若 p 的真值为 0 且 q 的真值为 0, 则 $p \wedge q$ 的真值为 0;

(2) 若 p 的真值为 0 且 q 的真值为 1, 则 $p \wedge q$ 的真值为 0;

(3) 若 p 的真值为 1 且 q 的真值为 0, 则 $p \wedge q$ 的真值为 0;

(4) 若 p 的真值为 1 且 q 的真值为 1, 则 $p \wedge q$ 的真值为 1.

当 p 与 q 的真值都为 1 时, $p \wedge q$ 的真值为 1; 其他三种情况, $p \wedge q$ 的真值都为 0.

3. 析取联结词

设 p, q 为两个命题, p 和 q 的析取是一个复合命题, 表示两个命题的析取关系, 记为 $p \vee q$, 读作“ p 或者 q ”, 称为 p 与 q 的析取式, $\vee$ 为析取联结词.

例 2-4 将下列命题符号化.

(1) 小王爱打球或跑步.

(2) 他身高 1.8 m 或体重 65 kg.

解 (1) 设 p : 小王爱打球, q : 小王爱跑步. 则(1)可表示为 $p \vee q$.

(2) 设 r : 他身高 1.8 m, s : 他体重 65 kg. 则(2)可表示为 $r \vee s$.

规定命题 p, q 和 $p \vee q$ 三者的真值有如下关系:

(1) 若 p 的真值为 0 且 q 的真值为 0, 则 $p \vee q$ 的真值为 0;

(2) 若 p 的真值为 0 且 q 的真值为 1, 则 $p \vee q$ 的真值为 1;

(3) 若 p 的真值为 1 且 q 的真值为 0, 则 $p \vee q$ 的真值为 1;

(4) 若 p 的真值为 1 且 q 的真值为 1, 则 $p \vee q$ 的真值为 1.

当 p 与 q 的真值都为 0 时, 则 $p \vee q$ 的真值为 0; 其他三种情况, $p \vee q$ 的真值都为 1.

4. 蕴涵联结词

设 p, q 为两个命题, p 和 q 的蕴涵是一个复合命题, 表示两个命题的蕴涵关系, 记为 $p \rightarrow q$, 读作“如果 p , 则 q ”, 称为 p 与 q 的蕴涵式, $\rightarrow$ 为蕴涵联结词. 其中 p 为 $p \rightarrow q$ 的前件, q 为 $p \rightarrow q$ 的后件.

例 2-5 将下列命题符号化.

(1) 如果今天是星期三, 则今天有英语课.

(2) 若 $2+2=4$, 则太阳从西方升起.

解 (1) 设 p : 今天是星期三. q : 今天有英语课. 则(1)可表示为 $p \rightarrow q$.

(2) 设 $r: 2+2=4$. s : 太阳从西方升起. 则(2)可表示为 $r \rightarrow s$.

需要注意的是, 在自然语言中, 命题(2)是没有实际意义的, 因为 r 与 s 两个命题是互不相干的, 但在数理逻辑中是允许的, 数理逻辑中只关注复合命题的真值情况, 并不关心原子命题之间是否存在内在联系.

规定命题 p, q 和 $p \rightarrow q$ 三者的真值有如下关系:

(1) 若 p 的真值为 0 且 q 的真值为 0, 则 $p \rightarrow q$ 的真值为 1;

(2) 若 p 的真值为 0 且 q 的真值为 1, 则 $p \rightarrow q$ 的真值为 1;

(3) 若 p 的真值为 1 且 q 的真值为 0, 则 $p \rightarrow q$ 的真值为 0;

(4) 若 p 的真值为 1 且 q 的真值为 1, 则 $p \rightarrow q$ 的真值为 1.

当 p 的真值为 1 且 q 的真值为 0 时, $p \rightarrow q$ 的真值为 0; 其他三种情况, $p \rightarrow q$ 的真值都为 1.

5. 同真假联结词

设 p, q 为两个命题, p 和 q 的同真假是一个复合命题, 表示两个命题的同真假关系, 记为 $p \leftrightarrow q$, 读作“ p 与 q 同真假”, 称为 p 与 q 的同真式, $\leftrightarrow$ 为同真假联结词.

例 2-6 两个圆面积相等当且仅当它们的半径相等.

解 设 p : 两个圆面积相等. q : 半径相等. 则原命题表示为 $p \leftrightarrow q$.

规定命题 p, q 和 $p \leftrightarrow q$ 三者的真值有如下关系:

(1) 若 p 的真值为 0 且 q 的真值为 0, 则 $p \leftrightarrow q$ 的真值为 1;

(2) 若 p 的真值为 0 且 q 的真值为 1, 则 $p \leftrightarrow q$ 的真值为 0;

(3) 若 p 的真值为 1 且 q 的真值为 0, 则 $p \leftrightarrow q$ 的真值为 0;

(4) 若 p 的真值为 1 且 q 的真值为 1, 则 $p \leftrightarrow q$ 的真值为 1.

当 p 与 q 的真值都为 1(同真)或都为 0(同假)时, $p \leftrightarrow q$ 的真值为 1; 其他情况为 0.

2.1.3 描述实际问题

上节介绍的五种联结词也称为谓词联结词, 在命题逻辑中, 可以用这些联结词将各种各样的复合命题符号化. 用命题公式描述实际问题就是把用自然语言描述的命题

转化为命题公式,俗称命题符号化.

命题符号化的步骤:

- (1)明确给定命题的含义;
- (2)找出命题中的各原子命题,分别符号化;
- (3)使用合适的逻辑联结词,将原子命题分别连接起来,组成复合命题的符号化形式.

命题符号化是不管具体内容而突出思维形式的一种方法.注意在命题符号化时,要正确地分析和理解自然语言命题,不能仅凭文字的字面意思进行翻译.

例 2-7 将下列命题符号化.

- (1)李明这学期选修了三门计算机课和一门英语课.
- (2)如果明天不下雨,我就上街买书.

解 (1)原命题包含两个简单命题:李明这学期选修了三门计算机课;李明这学期选修了一门英语课.原命题等价于“李明这学期选修了三门计算机课并且李明这学期选修了一门英语课”.

令 p 表示:李明这学期选修了三门计算机课; q 表示:李明这学期选修了一门英语课,则原命题可表示为 $p \wedge q$.

(2)原命题包含两个简单命题:明天下雨;我上街买书.原命题等价于:“如果明天不下雨,则我上街买书”.

令 p 表示:明天下雨; q 表示:我上街买书,则原命题可表示为 $(\neg p) \rightarrow q$.

在自然语言中有许多同义词、近义词,有时在联结词的选用上会遇到一些困难,为此,下面介绍一些常见的自然语言词语与逻辑联结词之间的对应关系.

与 $\neg$ 对应的词语 汉语中表示否定的词语有不、非、没、无、否等.

例 2-8 将下列命题符号化.

- (1)安娜是一个女生.
- (2)玛丽不是男生.

解 (1)令 p 表示:安娜是一个女生,则原命题可表示为 p .

(2)令 q 表示:玛丽是男生,则原命题可表示为 $\neg q$.

与 $\wedge$ 对应的词语 汉语中表示同时并存性判断的联结词有并且、也、不但……而且……、既……又……、不仅……而且……、虽然……但是……等,逗号“,”也可以用来表示同时并存的判断.

例 2-9 将下列命题符号化.

- (1)李平既聪明又用功.
- (2)李平虽然聪明,但不用功.
- (3)李平不但聪明,而且用功.

(4)李平不是不聪明,而是不用功.

解 令 p 表示:李平聪明; q 表示:李平用功. 则(1)、(2)、(3)、(4)命题可分别表示为 $p \wedge q$ 、 $p \wedge \neg q$ 、 $p \wedge q$ 和 $\neg(\neg p) \wedge \neg q$.

注 用命题公式描述实际问题,要尽量“忠于原文”,例 2-9 中的(4)不能解答为 $p \wedge \neg q$. 虽然公式 p 和 $\neg(\neg p)$ 有相同的真值,但它们是不同的公式.

与 $\vee$ 对应的词语 汉语中表示选择性判断的联结词有或者……或者……、可能……也可能……、要么……要么……、不是……就是……等. 选择性判断有两种:一是相容选择,二是不相容选择. 相容选择是指在列出的几种选择中至少有一种选择成立,也可以有多个选择成立;不相容选择是指在列出的几种选择中有且只有一种选择成立,不能有多种选择同时成立. 相容选择对应的命题公式是 $p \vee q$,不相容选择对应的命题公式是 $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$.

例 2-10 将下列命题符号化.

(1)考试答题可用钢笔或圆珠笔.

(2)格林是北京大学 2015 届本科生或清华大学 2015 届本科生.

(3)小王现在在宿舍或在图书馆里.

解 (1)令 p 表示:考试答题可用钢笔; q 表示:考试答题可用圆珠笔,则原命题可表示为 $p \vee q$.

(2)令 p 表示:格林是北京大学 2015 届本科生; q 表示:格林是清华大学 2015 届本科生,则原命题可表示为 $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$. 这里的“或”是不相容选择,所以不能用 $p \vee q$.

(3)令 p 表示:小王在宿舍, q 表示:小王在图书馆,这里的“或”是不相容选择,小王在宿舍和在图书馆不能同时发生,因而原命题可以表示为 $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$.

与 $\rightarrow$ 对应的词语 汉语中表示蕴涵关系判断的联结词有如果……则……、只要……就……、有……就……、一旦……就……、只有……才……、除非……才……等. 蕴涵关系判断有两类:一是充分条件型蕴涵,对应的命题公式类型是 $p \rightarrow q$,汉语中常见的联结词有如果……则……、只要……就……、有……就……、一旦……就……;二是必要条件型蕴涵,对应的命题公式类型是 $\neg p \rightarrow \neg q$,汉语中常见的联结词有只有……才……、除非……才……等.

例 2-11 将下列命题符号化.

(1)只要不下雨,我就骑自行车上班.

(2)只有不下雨,我才骑自行车上班.

(3)只有你走,我才留下.

解 在(1)、(2)中令 p 表示:天下雨; q 表示:我骑自行车上班. 在(1)中, $\neg p$ 是充分条件,因而符号化为 $\neg p \rightarrow q$. 在(2)中, $\neg p$ 是 q 的必要条件,因而应符号化为 $q \rightarrow \neg p$.

(3)这个命题的意义也可以理解为:如果我留下了,那么你一定走了. 设 p : 你走, q : 我留下, 则命题符号化为 $q \rightarrow p$.

与原命题类似的命题如: 仅当你走我才留下. 我留下仅当你走. 当我留下你得走.

与 $\leftrightarrow$ 对应的词语 汉语中表示同真同假判断的联结词有当且仅当、充分必要条件等.

例 2-12 将下列命题符号化.

(1) $a^2 > 0$ 的充分必要条件是 $a \neq 0$.

(2) $3+3=6$ 当且仅当石头会走路.

解 (1) 令 p 表示: $a^2 > 0$; q 表示: $a \neq 0$, 则原命题可表示为 $p \leftrightarrow q$.

(2) 令 p 表示: $3+3=6$; q 表示: 石头会走路, 则原命题可表示为 $p \leftrightarrow q$.

注 用命题公式表示一个命题时, 只是把原命题写成公式的形式, 不必分析命题是真的还是假的, 也不必分析命题是否有实用意义.

例 2-13 将下列命题符号化.

(1) 如果明天早上下雨或下雪, 则我不去学校.

(2) 如果明天早上不下雨且不下雪, 则我去学校.

(3) 如果明天早上不是雨夹雪, 则我去学校.

(4) 当且仅当明天早上不下雨且不下雪时, 我才去学校.

解 设 p : 明天早上下雨, q : 明天早上下雪, r : 我去学校.

(1) 符号化为 $(p \vee q) \rightarrow \neg r$.

(2) 符号化为 $(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow r$.

(3) 符号化为 $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$.

(4) 符号化为 $(\neg p \wedge \neg q) \leftrightarrow r$.

例 2-14 将下列命题符号化.

(1) 如果小王和小张都不去, 则小李去.

(2) 如果小王和小张不都去, 则小李去.

解 设 p : 小王去, q : 小张去, r : 小李去.

(1) 符号化为 $(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow r$.

(2) 符号化为 $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow r$ 或 $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$.

例 2-15 将下列命题符号化.

(1) 说离散数学无用且枯燥无味是不对的.

(2) 若天不下雨, 我就上街; 否则在家.

解 对于(1) 设 p : 离散数学是有用的. q : 离散数学是枯燥无味的. 则命题符号化为 $\neg(\neg p \wedge q)$.

对于(2) 设 p : 天下雨. q : 我上街. r : 我在家. 则命题符号化为 $(\neg p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$.