



勾

股方圆之妙

——中国数学史话

丛书主编：严文科

本册主编：刘芳



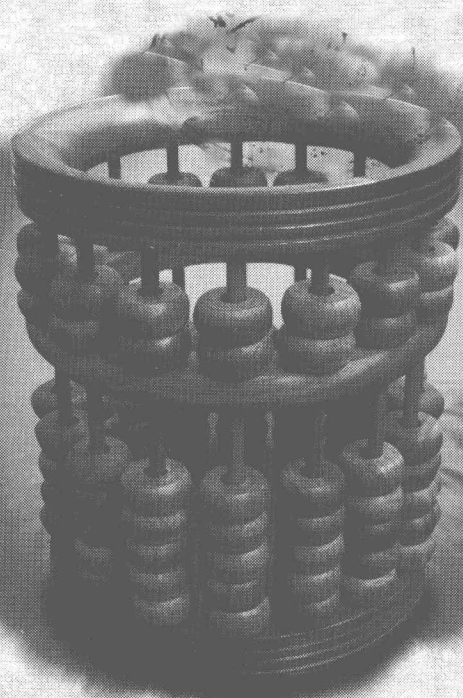
贵州出版集团
贵州教育出版社

勾股方圆之妙

——中国数学史话

丛书主编：严文科

本册主编：刘芳



贵州出版集团
贵州教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

勾股方圆之妙:中国数学史话/刘芳主编. —贵阳:
贵州教育出版社,2013. 11
(华夏历史文化丛书/严文科主编)
ISBN 978-7-5456-0502-0

I. ①勾… II. ①刘… III. ①数学史—中国—古代—青年读物②数学史—中国—古代—少年读物
IV. ①O112-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 264622 号

丛书主编:严文科
本册主编:刘 芳
副 主 编:颜素容 缪素芬
编 委:陶 欧 王 丽 李砚池
图片拍摄:刘 芳

勾股方圆之妙:中国数学史话
刘 芳 主编

出版发行 贵州出版集团
贵州教育出版社
地 址 贵阳市黄山冲路 18 号 A 栋
(电话 0851-8654672 邮编 550004)
印 刷 贵州新华印务有限责任公司
开 本 710mm×1000mm 1/16
印 张 8 印张
字 数 150 千字
版次印次 2013 年 11 月第 1 版 2014 年 2 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5456-0502-0
定 价 15.00 元

如发现印、装质量问题,影响阅读,请与印刷厂联系调换。

厂址:贵阳市友谊路 186 号 电话:0851-6784181-2127 邮编:550001

华夏——科技创造的文明

我们一直以为是文人墨客创造了古老而优雅的华夏文明。手工业者和技术工人为社会生产必需品和奢侈品,但历来不被社会所重视。比如发明了活字印刷术的毕昇,世界级的伟大发明家,除了他是一介平民,是活字印刷术的发明者,其他生平事迹之类的在史籍上只字全无。

实际上,推动社会不断进步和发展的,就是这个社会整体的科技能力。

在农业社会,人类的科技能力较低,个人的力量有限,所以,在尽可能大的社会范围内减少社会冲突,有序地生产并领取每个人所需的生活资料,提倡勤劳和节俭,才是最好的社会形态和最佳的社会选择。通过战国时代的努力,中国建立了统一的中央集权制度,中国人在世界范围内最早地集体进入在特定条件下这一最好的社会形态当中。此后一段时间里,稳定的价值观和道德观,相对安定的社会环境,优秀的科技水平和出色的生产能力,使得中国人一直是世界的领跑者。

时至今日,勇于求索的中国人早已告别了积贫积弱、任人宰割的时代,作为世界第二大经济体,中国已是世界大家庭中举足轻重的一员。但我们的科技创新能力却仍然落后,近代以来几乎所有影响现代人类生活的科技发明,极少出自中国人的创造。

那么,中国古代的科技发展状态如何?对今天中国的科技创新有无借鉴意义呢?

我们选择了六类与人类生活关联最为密切的科技领域,包括农业、医药、手工业、天文、图书出版、数学,从它们的历史发展脉络、专业思想、工作

对象与工具、成果积累、文化现象、杰出人物、对人类的贡献等方面进行探索，希望能从科技层面发现古代中国不一样的历史和文化。

比如中国古代的农业，如何有效保证全社会的粮食安全，尤其在大规模的自然灾害不断侵袭的时期，如何扩大食品来源，如何解决干旱和河水泛滥？

比如中医药科技，在过去的几千年里，中国人在疾病、瘟疫、严寒酷暑的交替中，不断创新医学理论与技术，不断丰富中药，他们又经历了什么样的历程？

比如手工业科技，几乎任何一样流传下来的文物，都有手工业的影子，都包含了艺术的审美，他们经历了什么样的过程，在不同的朝代，手工业是如何展现自己魅力的？

比如中国古代天文学，这是一门更有意思的科学，神秘、简单，无论是皇帝，还是平民，都相信冥冥之中的主宰，并希望这一主宰来帮助自己，天文学顺势把自然界中的现象加以解释的同时，也赋予了其神秘色彩，但作为科学的天文学，我们能否从这门科学的内部揭开长久以来的神秘面纱？

比如图书出版，这在人类的文明发展中绝对是最有突破性的一步，在刀耕火种的时期，人类是如何记录思想并加以传播的，在所谓的两千年的封建社会中，图书出版的技术是如何一点点进步的？

比如数学，它是所有科技中最为基础的学科，近代以来，有人说中国缺少数学思维，所以科技不发达；也有人说中国古代的数学领先于人类文明，当今计算的代码原理就来自中国古代的数学成果……那么到底中国古代有没有数学家？有没有创造出推动人类进步的数学成果？

我们希望从中国古代的科技方面入手，把优秀的传统继承下来，把曾经辉煌但现在过时的糟粕剔除掉，重新构建适合科技创新的文化氛围和社会机制，让科技创新成为社会生活中的主流，以迎接中华民族下一个辉煌的未来。

严文科

2013年10月修改于北京播云台



目 录

引子 中国古代数学发展小史 / 1

中国数学及其文化的萌芽 / 1

中国数学及其文化的发展 / 3

中国数学及其文化的成熟 / 6

西方数学的融入 / 8

第一章 中国传统数学特点与思想 / 11

数学经典的著作形式 / 11

关于数学理论的研究 / 12

中国古代数学的显著特点 / 14

中国传统数学的特点 / 15

中国古代数学的另一显著特征 / 15

第二章 数学器械 / 17

规、矩、准、绳 / 17

算筹 / 19

珠算盘 / 20

第三章 数学方法 / 23

方程术与正负术 / 23

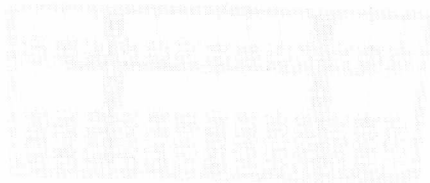
- 盈不足 / 26
中国剩余定理 / 28
割圆术 / 33
天元术与四元术 / 35

第四章 中国古代数学应用成果 / 36

- 记数法 / 36
计算田地面积 / 37
商业计算 / 41

第五章 数学著作 / 43

- 《周髀算经》 / 43
《九章算术》 / 44
《海岛算经》 / 46
《孙子算经》 / 47
《张丘建算经》 / 51
《五曹算经》 / 52
《五经算术》 / 55
《夏侯阳算经》 / 56
《缀术》 / 57
《缉古算经》 / 58
《数书九章》 / 61
《测圆海镜》 / 63
《详解九章算法》 / 65
《算学启蒙》 / 66
《四元玉鉴》 / 67



《算法统宗》 / 69

第六章 数学家 / 71

赵爽 / 71

刘徽 / 72

祖冲之 / 74

祖暅 / 76

王孝通 / 79

贾宪 / 81

秦九韶 / 84

李冶 / 91

杨辉 / 95

朱世杰 / 102

李善兰 / 105

第七章 民间流传的数学歌谣 / 106

数字的连用 / 107

数字的搭配 / 108

数字的对比 / 108

用数字点睛 / 109

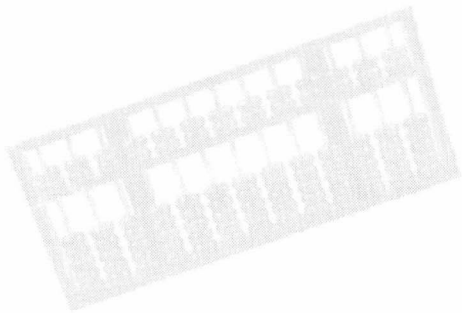
诗歌数学题 / 110

数字对联 / 112

数字讽刺诗 / 113

数字诗歌中的趣闻 / 114

筹算和珠算口诀 / 114



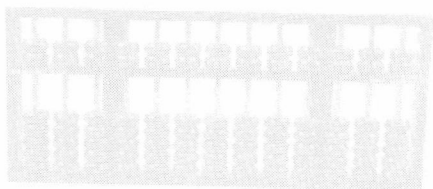
第八章 对人类的贡献 / 116

四千多年的数学史 / 116

开创了实用数学的先河 / 117

最早开始数学教育并传播至世界 / 118

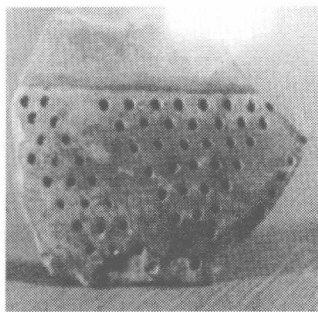
参考文献 / 120



引子 中国古代数学发展小史

数学是中国古代最为发达的基础科学学科之一,通常称为算术,包括现在的算术、代数、几何、三角等方面的内容。从公元前二三世纪到十四世纪初,中国算术水平居于世界数学发展的前列,是当时世界数学发展的主流。

中国数学可以分为五个时期:萌芽时期、发展时期、全盛时期、西学输入时期和近现代数学发展时期。



中国数学及其文化的萌芽

自新石器时代至夏、商、周,中国古代的人们对形和数已经有了较多的认识。在原始公社末期,人们已开始用文字符号取代结绳记事,并逐渐形成了十进位值制。仰韶文化时期出土的陶器,上面已可有表示1、2、3、4的符号。在西安半坡遗址出土的距今6000年前的陶器有用1~8个圆点组成的等边三角形和分正方形为100个小正方形的图案,半坡遗址的房屋基

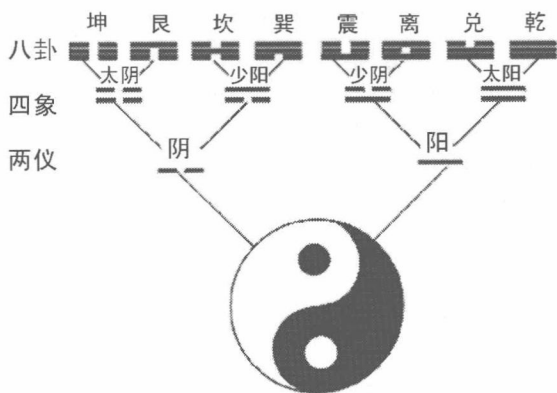
址都是圆形和方形。在姜寨出土的陶片出现了与筹码相似的符号。

商代是我国奴隶制度经济发展的时期,科学、文化都达到较高的水平。甲骨文和金文的出现,标志着我国的文字从简单的象形逐渐发展到成熟的阶段。所有技术和文化成就对于数学的发展都起了推动作用。

商代中期,在甲骨文中已产生一套十进制数字和记数法,其中最大的数字为三万;与此同时,殷人用十个天干和十二个地支组成甲子、乙丑、丙寅、丁卯等 60 个名称来记 60 天的日期;在周代,又把阴、阳符号构成的八卦表示八种事物发展为 64 卦,表示 64 种事物。

为了画出圆形和正方形,确定事物形状是否平直,人们还创造了“规、矩、准、绳”等作图和测量工具。据《史记·夏本纪》记载,夏禹治水时已使用了这些工具,并早已发现“勾三、股四、弦五”这个勾股定理的特例。公元前一世纪的《周髀算经》提到西周初期用矩测量高、深、广、远的方法,并举出勾股形的“勾三、股四、弦五”,“环矩可以为圆”等例子。

《周易》是世界公认的第一本讨论排列的书。卦的基本符号是爻,爻分阳爻和阴爻两种,合称两仪。每次取两个,共有四种不同的排列法,叫做“四象”:太阳、少阴、少阳、太阴;每次取三个,共有八种排列法,叫做“八卦”:乾、坤、震、巽、坎、离、艮、兑。



《周易》图解



后天八卦图

春秋时期,随着铁器的出现,中国开始了由奴隶制向封建制的过渡,新的生产关系促进了社会科技和生产力的发展。这个时期,筹算得到普遍的

应用,筹算记数法已使用十进制,人们已熟悉“九九乘法表”和整数四则运算。同时期的测量数学在生产上有了广泛应用。万位以上的大数在春秋战国已有记录,《国语·郑语》中记载史伯说的亿、兆、经,都是大于万的十进制数名。齐国人的著作《考工记》汇总了当时手工技术的规范,包含了一些测量的内容,并涉及一些几何知识,例如角的概念。

战国时期的百家争鸣也促进了数学的发展,一些学派还总结和概括出与数学有关的许多抽象概念。著名的有《墨经》中关于某些几何名词的定义和命题,对共线、直线、端点、圆、相切、面积、体积等进行了定义,这是几何学说诞生的萌芽。例如:圆,一中同长也。平,同高也。同时墨家还给出有穷和无穷的定义。《庄子》记载了惠施等人的名家学说和桓团、公孙龙等人提出的论题,强调抽象的数学思想。名家认为经过抽象以后的名词概念与他们原来的实体不同,他们提出“矩不方,规不可以为圆”,把“大一”(无穷大)定义为“至大无外”,“小一”(无穷下)定义为“至小无内”。还提出了“一尺之棰,日取其半,万世不竭”等命题。这些许多几何概念的定义、极限思想和其他数学命题是相当可贵的数学思想,但这种重视抽象性和逻辑严密性的新思想并未能得到很好的继承和发展。

战国时期的人们通过田地及国土面积的测量、粟米的交换、收获及战利品的分配、城池的修建、水利工程的设计、赋税的合理负担、产量的计算以及测高望远等生产生活实践,积累了大量的数学知识。据东汉初郑众记载,当时的数学知识分成了方田、粟米、差分、少广、商功、均输、方程、赢不足、旁要九个部分,称为“九数”。“九数”确立了《九章算术》和中国传统数学的基本框架。

中国数学及其文化的发展

从公元前后至公元十四世纪,中国古典数学先后经历了三次发展高潮,即两汉时期、魏晋南北朝时期和宋元时期,并在宋元时期达到顶峰。秦汉是封建社会的上升时期,经济和文化均得到迅速发展,不断丰富的数学

知识开始向系统化、理论化发展,数学方面的专书陆续出现。秦朝的焚书坑儒给中国的科技发展造成了巨大阻断,不久刘邦推翻了暴秦建立了西汉,生产和科技发展得到恢复,与此同时人们开始注重对先秦文化典籍的收集和整理。

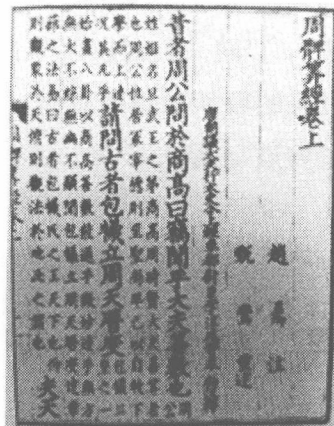
中国古代数学体系正是形成于秦汉时期,它的主要标志是算术已成为一个专门的学科,以及在两汉时期,有专门的数学著作出现,如《九章算术》《周髀算经》等,中国数学形成了独立的知识体系,这是中国数学发展史上的第一个高峰时期。

西汉末年编纂的《周髀算经》,尽管是谈论盖天说宇宙论的天文学著作,但包含许多数学内容,在数学方面主要有两项成就:提出勾股定理的特例及普遍形式;测太阳高、远的“陈子测日法”,为后来“重差术”(勾股测量法)的先驱。

此外,《周髀算经》中还有较复杂的开方问题和分数运算等。

《九章算术》是一部经几代人整理、删补和修订而成的古代数学经典著作,约成书于东汉初年。全书采用问题集的形式编写,共收集了246个问题及其解法,分属于方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足、方程和勾股九章。主要内容包括分数四则和比例算法、各种面积和体积的计算、关于勾股测量的计算等。在代数方面,《方程》一章中所引入的负数概念及正负数加减法法则,在世界数学史上都是最早的记载;本章中关于线性方程组的解法和现在中学讲授的方法基本相同。

就《九章算术》的特点来说,它注重应用,注重理论联系实际,形成了以筹算为中心的数学体系,对中国古算影响深远。它的一些成就如十进制值制、今有术、盈不足术等还传到印度和阿拉伯,并通过这些国家传到欧洲,促进了世界数学的发展。《九章算术》成书以后,对它做注的数学家层出不穷,如东汉马续、张衡、刘洪、郑玄、徐岳、王粲等都为《九章算术》作过注释,可惜这些著作都没能传下来。



《周髀算经》

魏晋时期中国数学在理论上有了较大的发展。其中赵爽和刘徽的工作被认为是中国古代数学理论体系的开端。吴国赵爽是中国古代对数学定理和公式进行证明的最早的数学家之一,他对《周髀算经》做了详尽的注释。其中,在“勾股圆方图及注”中他提出用弦图证明勾股定理和解勾股形的五个公式,该方法已体现了割补思想;在“日高图及注”中,他用图形面积证明汉代普遍应用的“重差”公式。赵爽还提出了用几何方法求解二次方程的新方法。

魏末晋初,刘徽继承和发展了战国时期名家和墨家的思想,主张对一些数学名词,特别是重要的数学概念给以严格的定义,认为对数学知识必须进行“析理”。263年,他注释了《九章算术》,还撰写了《海岛算经》和《九章重差图》,应用重差数解决有关测量问题。刘徽有很多数学贡献,其中一项重要的工作是创立割圆术,首次用理论的方法算得出圆周率,精确到小数点后两位,为圆周率的研究工作奠定理论基础和提供了科学的算法。他用无穷分割的方法证明了,方锥与四面体的体积比恒为 $2:1$ 。

东晋以后,中国长期处于战争和南北分裂的状态,但数学依然蓬勃地发展,出现了多部数学著作,如《孙子算经》《夏侯阳算经》《张丘建算经》等。《孙子算经》给出“物不知其数”的问题,导致求解一次同余组问题在当时的流行;《张丘建算经》的“百鸡问题”引出两个方程、三个未知数的不定方程组问题。

公元五世纪,祖冲之、祖暅父子的工作在这一时期最具代表性,他们在《九章算术》刘徽注的基础上,将传统数学大大向前推进了一步,成为重视数学思维和数学推理的典范。他们同时在天文学上也有突出的贡献。根据史料记载,他们在数学上主要有三项成就:计算圆周率精确到小数点后第六位;祖暅在刘徽工作的基础上推导出球体体积的正确公式,并提出“幂势既同则积不容异”的体积原理,即二立体等高处截面积均相等则二体体积相等的定理,解决了刘徽尚未解决的球体积公式;发展了二次与三次方程的解法。同时代的天文历学家何承天创“调日法”,以有理分数逼近实数,发展了古代的不定分析与数值逼近算法。

隋朝大兴土木,客观上促进了数学的发展。唐初王孝通撰《缉古算

经》，主要是通过土木工程中计算土方、工程的分工与验收以及仓库和地窖计算等实际问题，讨论如何以几何方式建立三次多项式方程，发展了《九章算术》中的少广、勾股章中的开方理论。由于南北朝时期的一些重大天文发现，在隋唐之交开始落实到历法编算中，使唐代历法中出现了一些重要的数学成果。600年，隋代刘焯在制订《皇极历》时，在世界上最早提出了等间距二次内插公式，这在数学史上是一项杰出的创造，唐代僧一行在其《大衍历》中将其发展为不等间距二次内插公式。

唐初封建统治者继承隋制，656年在国子监设立算学馆，设有算学博士和助教，学生30人。由太史令李淳风等编纂注释《算经十书》，作为算学馆学生用的课本，明算科考试也以这些算书为准。唐中期以后，商业繁荣，数字计算增多，迫切要求改革计算方法。唐朝后期，计算技术有了进一步的改进和普及，出现很多种实用算术书，从《新唐书》等文献留下来的算书书目，可以看出这次算法改革主要是简化乘、除算法，唐代的算法改革使乘、除法可以在一个横列中进行运算，它既适用于筹算，也适用于珠算。

中国数学及其文化的成熟

一、宋元社会技术的变化

960年，北宋王朝的建立结束了五代十国割据的局面。北宋的农业、手工业、商业空前繁荣，科学技术突飞猛进，火药、指南针、印刷术三大发明就是在这种经济高涨的情况下得到广泛应用。宋代的海外贸易特别发达，出口丝织品、陶瓷、铁器、漆器等，进口的主要是香料、药物、布匹等。宋政府沿袭唐代的制度，设置了专门管理海外贸易的机构市舶司，制定了统一的法令，又实行抽分的贸易税。宋代的土木工程和水利工程较多，在建筑和治水中需要解决很多计算问题。商业和科技的发展对数学提出了更高要求。

另外印刷术的发明对传播和普及数学知识，流传和保存数学著作具有重大意义。1084年秘书省第一次印刷出版了《九章算术》等十部算经，是

世界上首次出现的印刷本数学著作,可惜这时《夏侯阳算经》《缀术》已失传,1213年鲍髀之又进行翻刻。

从公元十一世纪到十四世纪,宋元时期,中国传统数学迎来了一个新的发展高峰,筹算数学达到极盛,是中国古代数学空前繁荣、硕果累累的全盛时期。这一时期涌现了一批优秀的数学家,如北宋的刘益、贾宪、沈括,南宋的杨辉、秦九韶、李冶、朱世杰等。主要的工作有:高次方程数值解法;天元术与四元术;大衍求一术,现在称为中国剩余定理;招差术和垛积术,即高次内插法和高阶等差技术求和等等。宋代前后不到三百年,五十多种数学著作问世。

二、宋元众多的数学著作

1050年左右,北宋贾宪在《黄帝九章算法细草》中创造了开任意高次幂的“增乘开方法”,还列出了二项式定理系数表。1088年—1095年,北宋沈括从“酒家积罍”数与“层坛”体积等生产实践问题提出了“隙积术”,开始对高阶等差级数的求和进行研究,并创立了正确的求和公式。沈括还提出“会圆术”,得出了我国古代数学史上第一个求弧长的近似公式。他还运用运筹思想分析和研究了后勤供粮与运兵进退的关系等问题。

1247年,南宋秦九韶在《数书九章》中推广了“增乘开方法”,叙述了高次方程的数值解法,他列举了二十多个来自实践的高次方程的解法,最高为十次方程。秦九韶还系统地研究了一次同余式理论。1248年,李冶著的《测圆海镜》是第一部系统论述“天元术”(一元高次方程)的著作,这在数学史上是一项杰出的成果。在《测圆海镜序》中,李冶批判了轻视科学实践,以数学为“九九贱技”、“玩物丧志”等谬论。



沈括画像

1261年,南宋杨辉在《详解九章算法》中用“垛积术”求出几类高阶等差级数之和。1274年他在《乘除通变本末》中还叙述了“九归捷法”,介绍了筹算乘除的各种运算法。1280年,元代王恂、郭守敬等制订《授时历》时,列出了三次差的内插公式。郭守敬还运用几何方法求出相当于现在球

面三角的两个公式。

1303年,元代朱世杰著《四元玉鉴》,他把“天元术”推广为“四元术”(四元高次联立方程),并提出消元的解法。朱世杰还对各有限项级数求和问题进行了研究,在此基础上得出了高次差的内插公式。

杨辉、朱世杰等人对筹算乘除捷算法的改进、总结,为了珠算盘与珠算术的产生奠定了理论基础,完成了我国计算工具盒计算技术的改革。元中后期,出现了《丁巨算法》、贾亨《算法全能集》、何平子《详明算法》等改进乘除捷算法的著作。公元十四世纪我国人民已使用珠算盘。在现代计算机出现之前,珠算盘是世界上简便而有效的计算工具。

西方数学的融入

公元十六世纪末,西方传教士开始到中国活动,由于明清王朝制定天文历法的需要,传教士开始将与天文历算有关的西方初等数学知识传入中国,中国数学家在“西学中源”思想支配下,数学研究出现了一个中西融会贯通的局面。

这一时期西方传教士和中国学者合译了许多西方数学专著。其中第一部且有重大影响的是意大利传教士利马窦和徐光启合译的《几何原本》前六卷(1607年),其严谨的逻辑体系和演绎方法深受徐光启推崇。徐光启本人撰写的《测量异同》和《勾股义》便应用了《几何原本》的逻辑推理方法论证中国的勾股测望术。此外,《几何原本》课本中绝大部分的名词都是首创,且沿用至今。

后来,传教士们又引入三角学、对数等西方初等数学,介绍西方三角学的著作有邓玉函编译的《大测》《割圆八线表》和罗雅谷的《测量全义》。从此,中国数学开始了中西会通的阶段。清宣城梅文鼎,潜心于中西数学研究,著述很多,他的孙子将他的著作编辑成《梅氏丛书辑要》六十卷,其中数学著作十三种四十卷,内容遍及当时中国数学的各个门类,对清朝数学影响极大。与他同时代的数学家还有王锡阐和年希尧等人。