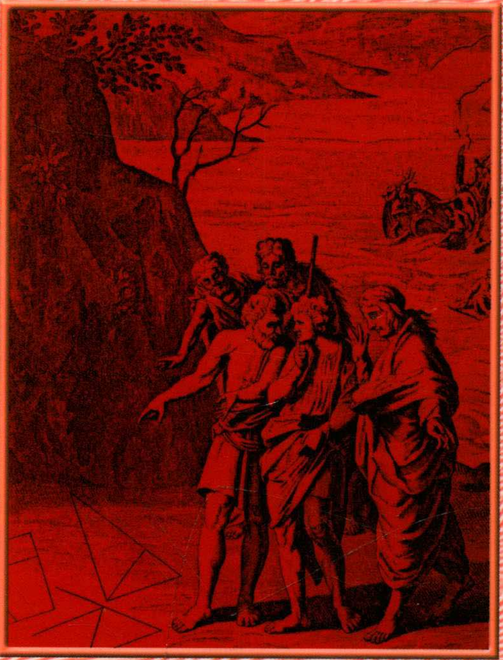
《数学中的小问题大定理》丛书（第一辑）

拉格朗日中值定理

——从一道北京高考试题的解法谈起

佩捷 主编



◎中值定理的意义

◎中值定理的特性

◎在多元函数上的应用

◎罗尔定理的证明

◎最大最小值定理的背景及推广

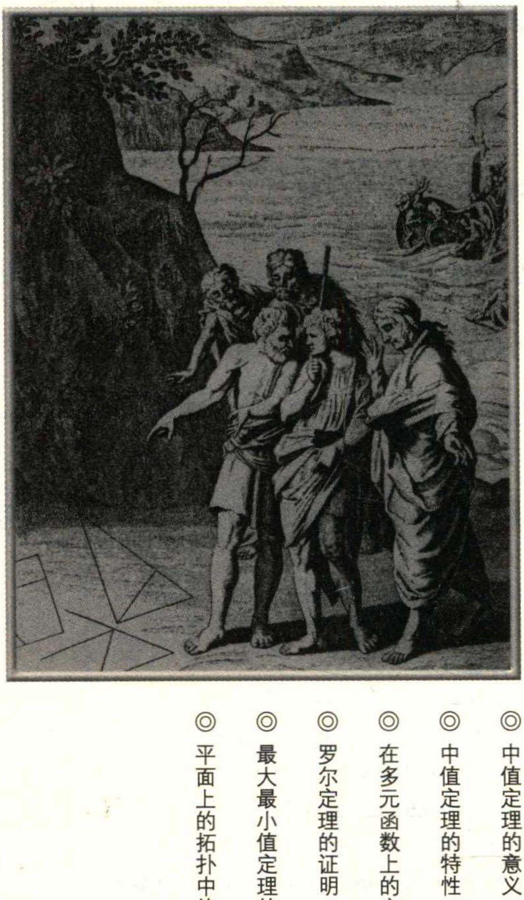
◎平面上的拓扑中值定理

HITP
哈爾濱工業
HARBIN INSTITUTE OF

《数学中的小问题大定理》丛书（第一辑）

拉格朗日中值定理

——从一道北京高考试题的解法谈起



佩捷　主编

◎中值定理的意义

◎中值定理的特性

◎在多元函数上的应用

◎罗尔定理的证明

◎最大最小值定理的背景及推广

◎平面上的拓扑中值定理

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书从一道北京高考试题的解法谈起，详细介绍了拉格朗日中值定理的意义、应用、证明及推广．读者可以较全面地了解这一类问题的实质，并且还可以认识到它在其他学科中的应用．内容全面，知识点丰富．

本书适合大学师生及数学爱好者参考阅读．

图书在版编目（CIP）数据

拉格朗日中值定理：从一道北京高考试题的解法谈起/佩捷主编．—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2015.10

ISBN 978－7－5603－5528－3

Ⅰ．①拉…　Ⅱ．①佩…　Ⅲ．①拉格朗日多项式—中值定理　Ⅳ．①0174.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 174079 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　杨万鑫　聂兆慈
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 9　字数 93 千字
版　　次　2015 年 10 月第 1 版　2015 年 10 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978－7－5603－5528－3
定　　价　18.00

⊙目录

第0章 引言

设函数 $y=f(x)$ 满足如下条件：(1)在闭区间 $[a,b]$ 上连续；(2)在开区间 (a,b) 内可导，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，我们称上式为拉格朗日中值定理.

拉格朗日中值定理是高考试题中设置高等数学背景的热点素材，比如 2006 年高考全国卷理科数学第 21 题、四川卷数学第 22 题，北京卷理科数学第 6 题等，都含有拉格朗日中值定理的背景. 在编制以拉格朗日中值定理为背景的试题时，通常以不等式恒成立问题为基本切入点. 这类题目具有一定的深度，遵循“在知识交汇处设计试题”的命题原则，整合数学各个知识点之间的内在联系，既符合高考命题以“能力立意”的宗旨，又突出了数学的学科特点. 现仅就 2006 年北京卷理科数学第 6 题加以讨论.

例 1 在下列四个函数中，满足性质：“对于区间 $(1,2)$ 上的任意 $x_1,x_2(x_1\neq x_2)$，$|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|$ 恒成立”的

只有　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）

A. $f(x)=\frac{1}{x}$　　　　B. $f(x)=|x|$

C. $f(x)=2^x$　　　　D. $f(x)=x^2$

分析　不妨设 $x_1<x_2$，利用拉格朗日定理可得 $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$ 且 $\xi\in(1,2)$ 时，四个选项的导数

$$f_1'(\xi)=-\frac{1}{\xi^2}\in\left(-1,-\frac{1}{4}\right)$$

$$f_2'(\xi)=1$$

$$f_3'(\xi)=2^{\xi}\ln 2\in(\ln 4,\ln 16)$$

$$f_4'(\xi)=2\xi\in(2,4)$$

故选 A.

湖北襄阳四中马海俊撰文指出：近几年，高考数学压轴题中常出现函数型不等式的恒成立问题，可归结为“对 $\forall x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$ 或 $f(x)\leqslant g(x)$ 恒成立，其中 $g(x)$ 含有参数 a，试确定 a 的范围”. 此类问题综合性强，难度大，能力要求高. 对于考生能够起到一定的甄别及选拔功能. 张润平老师在“高等数学背景下一类压轴题的简解”一文①中，利用高等数学知识，给出如下命题，并通过此命题解决了几例高考题. 使人感觉到如果老师能站在高等数学背景下讲解数学考题，势必会有一种高屋建瓴之气势，同时对于学生开拓视野，提升能力也极为有用. 可是，有读者发现张老师的命题稍有瑕疵.

---

①　张润平. 高等数学背景下一类压轴题的简解[J]. 中学数学(高中版). 2011,2.

命题 如果 $x>0$ 时,$f(x)$,$g(x)$ 连续可导,且 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}g(x)$,则当 $x\geqslant0$ 时($x>0$),若 $f(x)\geqslant g(x)$ 恒成立,那么 $f'(x)\geqslant g'(x)$ 恒成立.

张先生在文中给出以下证明过程:

证明 令 $F(x)=f(x)-g(x)$,$t>m>0$,且 $\lim\limits_{m\to0}m=0$,则 $F(x)$ 在 $[m,t]$ 上连续,在 (m,t) 内可导.

由拉格朗日中值定理知:$\exists\xi\in(m,t)$,使得

$$F(t)-F(m)=F'(\xi)(t-m)$$

成立

$$\lim_{m\to0}[F_1(t)-F(m)]=\lim_{m\to0}F'(\xi)(t-m)$$

$$F(t)-\lim_{m\to0}F(m)=F'(\xi)(t-\lim_{m\to0}m)$$

由已知

$$\lim_{m\to0}F(m)=\lim_{m\to0}[f(m)-g(m)]=$$

$$\lim_{m\to0}f(m)-\lim_{m\to0}g(m)=0$$

$$\lim_{m\to0}m=0$$

则

$$F(t)=F'(\xi)t$$

所以 $F(x)=F'(\xi)x$,由于

$$F(x)=f(x)-g(x)\geqslant0$$

所以当 $x>0$ 时,$F'(\xi)\geqslant0$,即

$$F'(\xi)=f'(\xi)-g'(\xi)\geqslant0$$

所以当 $x>0$ 时,$f'(x)\geqslant g'(x)$ 恒成立.

有人找到一个反例:$f(x)=x+\sin^2x$,$g(x)=x$,其中 $x\geqslant0$. 这里的 $f(x)$,$g(x)$ 满足命题中所有条件,且在 $[0,+\infty)$,$f(x)\geqslant g(x)$ 恒成立. 但是,$f'(x)=1+\sin 2x$,$g'(x)=1$,此时可取 $x=\frac{7\pi}{12}$,则 $f'(\frac{7\pi}{12})=\frac{1}{2}<$

$g'(\frac{7\pi}{12})$，与命题结论 $f'(x) \geqslant g'(x)$ 恒成立矛盾.

细细推敲张先生的证明过程发现问题出在 ξ 上.证明过程中 ξ 只是存在，却不是任意的.尽管 t 是任意的，但是对应于每个 t，一旦取定，在区间 (m,t) 内，都是存在 ξ 使得 $F'(\xi)=f'(\xi)-g'(\xi)\geqslant 0$ 成立，即 ξ 不是取遍区间 (m,t) 内所有值.所以不能因为能找得到 ξ 使得 $F'(\xi)=f'(\xi)-g'(\xi)\geqslant 0$ 成立，就下结论对任意的 $x>0$，$f'(x)\geqslant g'(x)$ 恒成立.

通过以上分析，我们发现，尽管目前高考压轴题虽然大多具有高等数学背景，具备一定的高等数学知识有助于解题，但在使用有关结论及定理时，要慎重考虑定理成立的条件，不然就会出现以特例代替一般而犯错.

事实上，张先生在文中选择的五个例题之所以使用命题可以解答，得到正确答案，就在于题目本身隐含了一个条件，那就是构造函数 $F(x)=f(x)-g(x)$ 后二阶导数是大于或等于零的，这就说明 $F'(x)$ 是一个增函数，再有初始条件 $F'(x_0)=0$，就能得到 $x>x_0$ 时，$f'(x)\geqslant g'(x)$ 恒成立.

下面仅以文中例题为例说明.

例 2 （2010 年高考 湖北卷理科第 21 题）已知函数 $f(x)=ax+\dfrac{b}{x}+c(a>0)$ 的图像在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=x-1$.

（Ⅰ）略；

（Ⅱ）若 $f(x)\geqslant \ln x$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，求 a 的取值范围；

（Ⅲ）略.

解 $f'(x)=a-\frac{b}{x^2}$,则

$$\begin{cases}f(1)=a+b+c=0\\ f'(1)=a-b=1\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}b=a-1\\ c=1-2a\end{cases}$$

因$f(x)\geqslant \ln x$在$[1,+\infty)$上恒成立,所以

$$ax+\frac{b}{x}+c\geqslant \ln x$$

在$[1,+\infty)$上恒成立,即

$$a(x+\frac{1}{x}-2)\geqslant \ln x+\frac{1}{x}-1$$

在$[1,+\infty)$上恒成立. 按照文中的解题思路,利用命题,得到$a\geqslant\frac{1}{x+1}$在$[1,+\infty)$上恒成立,所以$a\geqslant\frac{1}{2}$.

此时,令$F(x)=f(x)-\ln x$,则

$$F(x)=ax+\frac{a-1}{x}+1-2a-\ln x$$

得

$$F'(x)=a-\frac{a-1}{x^2}-\frac{1}{x}$$

$$F''(x)=\frac{2(a-1)}{x^3}+\frac{1}{x^2}=\frac{2(a-1)+x}{x^3}$$

当$a\geqslant\frac{1}{2}$,$x\geqslant 1$时,$F''(x)\geqslant 0$,所以$F'(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增. 而$F'(1)=0$,故$F'(x)\geqslant 0$在$[1,+\infty)$上恒成立,从而有$F(x)\geqslant F(1)=0$恒成立,即$f(x)\geqslant \ln x$在$[1,+\infty)$上恒成立.

上述过程再次告诉我们,利用高数命题简化证明的过程中,一定要注意充分挖掘隐含条件,慎将高等数

学结论推广.

下面再以2008年高考山东卷理科数学21题为例说明拉格朗日中值定理的几何形式.

例3 如图,设抛物线方程为 $x^2=2py(p>0)$, M 为直线 $y=-2p$ 上任意一点,过 M 引抛物线的切线,切点分别为 A,B.

(1)求证:A,M,B 三点的横坐标成等差数列;

(2)已知当点 M 的坐标为 $(2,-2p)$ 时, $|AB|=4\sqrt{10}$,求此抛物线的方程;

(3)是否存在点 M,使得点 C 关于直线 AB 的对称点 D 在抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 上,其中,点 C 满足 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$($O$ 为坐标原点).若存在,求出所有适合题意的点 M;若不存在,请说明理由.

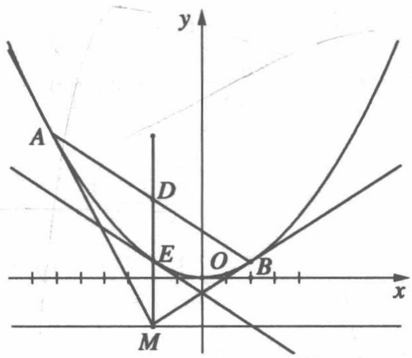


图0.1

分析试题立意:熟悉拉格朗日中值定理的人都知道,此题立意的背景是拉格朗日中值定理.已知点 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ 是函数 $y=\frac{x^2}{2p}$ 图像上的两点,证明:在区间 (x_1,x_2) 上存在一点 ζ,使得

$$f'(\zeta)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

并进一步证明 $\zeta=\frac{x_1+x_2}{2}$. 如图 0.1,过点 E 的切线平行于线段 AB,E,M 和线段 AB 的中点 D 恰好在一条与 x 轴垂直的直线上. 此题的巧妙之处在于,$x^2=2py$ 既可以看作二次曲线的方程,也可以看作是函数的方程. 如果把开口向上的抛物线 $x^2=2py$ 看作函数曲线,那么就可以在其上运用微分中值定理了. 这就是微分中值定理切入本题的入口,但其表现形式却是几何的,学生完全可以用初等的方法解决. 试题还有一个创新点在于,通过几何方法把微分中值定理的"中值"给找出来了,这就是试题第(1)问的来源.

类似的试题还有 2007 年高考江苏卷数学第 19 题:如图(图略),在平面直角坐标系 xOy 中,过 y 轴正方向上一点 $C(0,c)$ 任作一直线,与抛物线 $y=x^2$ 相交于 A,B 两点,一条垂直于 x 轴的直线,分别与线段 AB 和直线 $l:y=-c$ 交于点 P,Q.

(1)若 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$,求 c 的值;

(2)若 P 为线段 AB 的中点,求证:QA 为此抛物线的切线;

(3)试问(2)的逆命题是否成立? 说明理由.

中值定理的意义

第1章

中值定理是表示一元函数平均变化率与瞬时变化率(导数)之间的联系. 下面就详细地说明这个问题.

1.1 变化率

当变量 x 取实数值变化时,相应的变量 y 的值也随着变化,这就是

"y 是 x 的函数"

这个定义的起因. 但是,也有当变量 x 的值变化时,变量 y 的值保持不变的情形,因此,我们就把这种情形也包括在内,作出如下的定义:

"设有两个变量 x 与 y,如果当变量 x 取定一个数值时,变量 y 总有确定的数值和它对应,则把变量 y 叫作变量 x 的函数,记作

$$y=f(x)$$

这里,假定 y 也取实数值."

在研究函数值的变化情况时,研究

“y 值的变化对于 x 值的变化的比率”

是很重要的. 当 x 的数值从 a 变到 b 时, y 的数值的变化是 $f(b)-f(a)$, 而

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

则是 y 在这一段的平均变化率.

现在, 把 a 的数值固定, 变动 b 的数值, 使 b 的数值逐渐地接近于 a 时, 来观察平均变化率的变化情况. 把 b 改写为 x, 考察极限

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

这个极限是不一定存在的. 如果这个极限存在, 就把它看作是

“$f(x)$ 在 $x=a$ 处的瞬时变化率”

并把它叫作 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的导数, 记作 $f'(a)$. 即

$$f'(a)=\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

例 1　当 $f(x)$ 为 x 的一次函数时, 设

$$f(x)=px+q$$

则

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{(pb+q)-(pa+q)}{b-a}=p$$

这表示一次函数的平均变化率与 a, b 无关, 是一个常数. 于是

$$f'(a)=p$$

例 2　当 $f(x)$ 为 x 的二次函数时, 设

$$f(x)=px^2+qx+r$$

则

拉格朗日中值定理

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{(pb^2+qb+r)-(pa^2+qa+r)}{b-a}=$$

$$\frac{p(b^2-a^2)+q(b-a)}{b-a}=$$

$$p(b+a)+q$$

于是

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}[p(x+a)+q]$$

$$f'(a)=2pa+q$$

习题1 仿照例1、例2的方法,证明下列各题.

(1)$f(x)=px^3+qx^2+rx+s$ 时

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=p(b^2+ba+a^2)+q(b+a)+r$$

$$f'(a)=3pa^2+2qa+r$$

(2)$f(x)=\frac{1}{x}$时

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=-\frac{1}{ba}$$

$$f'(a)=-\frac{1}{a^2}$$

注 在例1、例2及习题1中,我们都是先求平均变化率,再利用平均变化率求出瞬时变化率(导数),但是,一般求导数$f'(a)$,正像大家所熟悉的那样,可先利用导数公式求出$f(x)$的导函数$f'(x)$,再令$x=a$即可.

1.1.1 变化率的几何意义

在函数$y=f(x)$的图形中,平均变化率

$$m=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

及$f(x)$在$x=a$处在导数$f'(a)$具有什么意义?现在

就来研究这个问题.

假设在函数 $y=f(x)$ 的图形上,对应 $x=a$ 和 $x=b$ 的两点分别为 A,B,则 A,B 的坐标分别为 $(a,f(a))$, $(b,f(b))$

平均变化率 m = 直线 AB 的斜率

下面再来看

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

的意义. 首先,在 $y=f(x)$ 的曲线上取点 $A(a,f(a))$ 和任意点 $P(x,f(x))$,那么直线 AP 的斜率为

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

当 $x\to a$ 时,点 P 沿着曲线逐渐地接近于 A,$f'(a)$ 存在时,直线 AP 接近于通过点 A 以 $f'(a)$ 为斜率的直线 AT. 直线 AT 就是这条曲线在点 A 所引的切线(图 1.1).

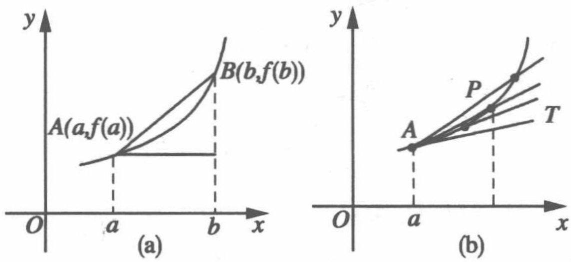


图　1.1

这就说明了

$f'(a)$ 为曲线上点 A 处的切线斜率

例　根据 1.1 中的例 2,对于函数

$$f(x)=x^2$$

$f'(a)=2a$,所以,在 $y=x^2$ 的曲线上,点 (a,a^2) 处的切

线斜率为 $2a$（图 1.2）.

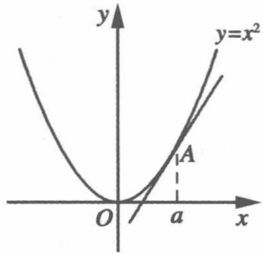


图 1.2

习题2 试用上面的方法，求曲线 $y=x^2$ 在 $x=1$ 处的切线的斜率.

1.1.2 **平均变化率与导数的关系**

我们来研究函数 $y=f(x)$ 当 x 从 a 变到 b 时的平均变化率与导数的关系.

首先，我们在 1.1 中的例 1 中已经看到，一次函数的平均变化率恒为一常数，所以其导数也是这个常数. 对于二次函数可以得出如下的结果.

例 1 $f(x)=px^2+qx+r(p\neq 0)$.

根据 1.1 中的例 2

$$m=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=p(a+b)+q$$

另外，对于任意 x

$$f'(x)=2px+q$$

从 m 与 $f'(x)$ 的关系可以看出 m 正是 $f'(x)$ 在 $x=\frac{a+b}{2}$ 时的值. 也就是说，令 $c=\frac{a+b}{2}$，则

$$m=f'(c)$$

如图 1.3 所示，把这一事实用 $y=f(x)$ 的图形加以说明，假设曲线上对应 $x=a,b$ 的两点分别为 A,B，则