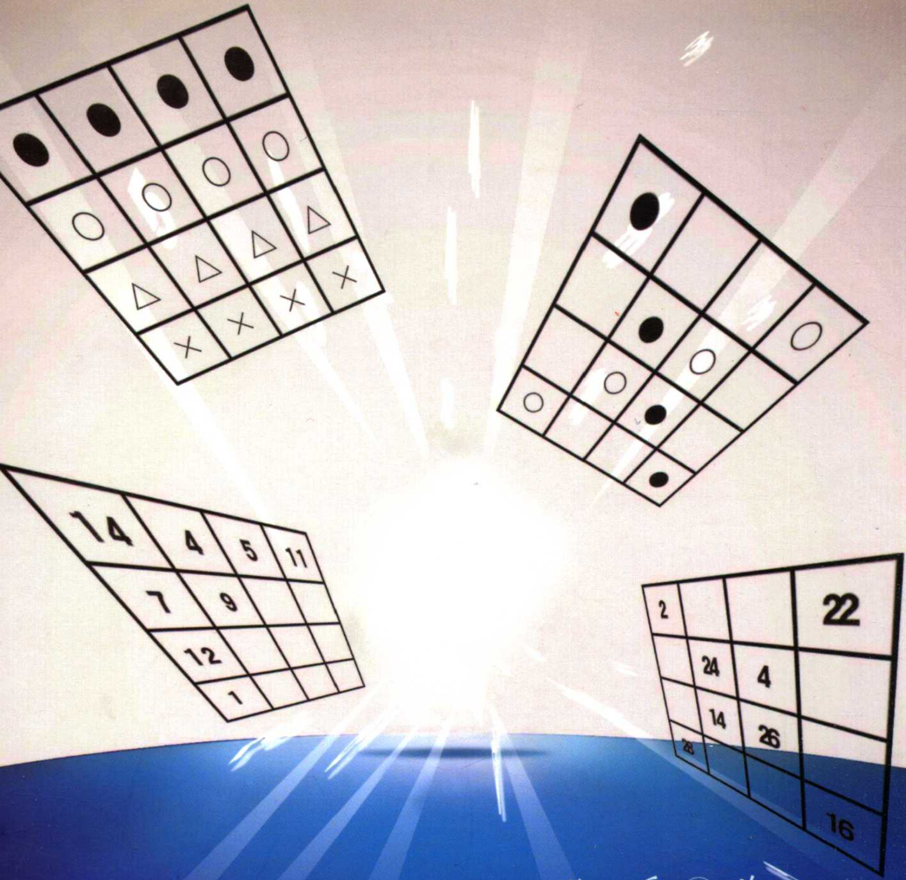


魏 秀◎著

奇异的数学魔方

中国出版集团
现代出版社

魏　秀◎著

奇异的数学魔方

中国出版集团
现代出版社

图书在版编目（CIP）数据

奇异的数学魔方 / 魏秀著 . — 北京：现代出版社，2013.12

ISBN 978-7-5143-2020-6

Ⅰ. ①奇… Ⅱ . ①魏… Ⅲ . ①数学—普及读物 Ⅳ . Ⅳ . ① O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 289743 号

奇异的数学魔方

作　　者　魏　秀
责任编辑　张　璐
出版发行　现代出版社
地　　址　北京市安定门外安华里 504 号
邮政编码　100011
电　　话　010-64267325　010-64245264（兼传真）
网　　址　www. xiandaibook. cn
电子邮箱　xiandai@cnpitc. com. cn
印　　刷　廊坊市万邦彩印有限公司
开　　本　880 × 1230　1/32
印　　张　4.5
字　　数　101 千字
版　　次　2014 年 1 月第 1 版　　2014 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5143-2020-6
定　　价　20.00 元

目录
CONTENTS

先看看再说

这里给你介绍一种新奇的数学游戏，我们称之为数学“魔方”。它是把一些特定的数字按一定规律排列而成的数学方阵。例如，把 1～16 的 16 个自然数排列成纵横各四行的方阵，如图（1）、图（2）所示，方阵的每行、每列，还有对角线上的四个数之和都相等，都等于 34。图（3）（4）是 $3^2=9$，$5^2=25$ 个数的方阵。你检验一下，它们的每行、每列及对角线上的各数之和均相等，分别为 15 和 65。还有在图（1）的方阵中，除上面所列的相等外，其四个角上的四个数、方阵中间的四个数、第一行中间的两个数加第四行中间的两个数、第一列中间的两个数加第四列中间的两个数之和均相等，均为 34，该方阵共有 14 组数之和相等。图（2）的方阵除以上 14 组相等外，还有方阵各个角上的四个数之和也相等，该方阵共有 18 组数之和相等。有的方阵甚至可找到 22 组数之和相等，真让人感到新奇！这就是它的“魔力”所在，故称为数学“魔方”。

图（5）（6）（7）（8）还展示了 6^2、7^2、8^2、10^2 的魔方方阵，它们都具有前述魔方方阵的基本特性。这每一个魔方方阵都是充满智慧的艺术佳品，体现出数学魔方神奇而美妙的美学价值。

你了解了这么多有趣的方阵后，可能急于试排起来了。那就试试看。3^2 的 1～9 个数的方阵，有的人可能用几分钟就排出来了，

4^2 的 16 个数的方阵能在一、两个小时内排出来，你的心算能力还不错。如排不出来，就再用几个小时吧，至于 5^2、6^2 的方阵，恐怕用几天时间也不一定排得出来。

当你怀着浓厚的兴趣和不示弱的劲头寻找魔方的时候，你一定会用心去计算，要计算很多次，如 3^2 的方阵最少也要计算十几次，4^2 的方阵，恐怕要计算几十次以至上百次。由于你的计算是有目的的，心情是热切的，你不会感到枯燥无味。在这不知不觉的大量的设计计算中，你就得到很好的锻炼，会增长你的智慧，开拓你的思维，培养你的毅力，提高你的心算能力。这就是出版本数学魔方的第一个目的。

为了给你在设计魔方时以一定的启示，本人将自己研究出的“n^2 个数构成的魔方方阵”一文献给读者，以供参考。这是本书的第一部分内容。

本文所述的数学魔方，数学中称之为“幻方”。多年来不少人对幻方进行过研究，并造出了多种多样的幻方方阵。幻方是一个多变的数学迷宫，也是一种高智力的数学游戏。

寻找数学魔方确实让人着迷，但要花费大量的时间。光是 4^2 的魔方方阵就有一千多个，寻找它们不是多数人能做到的，也不是一般人所要做的。但如果把已知的有限的魔方做成习题，让很多人可以参与进来，享受魔方的乐趣，并有效提高参与者的心算能力，使大脑得到一定的磨炼，这是很有意义的，这是出版本书的第二个目的和希望。为此，本人在研究了 n^2 个数的魔方方阵后，设计了以 4^2 魔方方阵为主的数学魔方习题集。它是把 4^2 的魔方方阵进行布“空”设计，共设计了四百多种类型的一千多个填空题并附有答案。这是本书的第二部分内容。

在 4^2 魔方习题中的 16 个数是 1~16 的 16 个自然数，级差为 1。为了适当提高难度，把 4^2 魔方中的 16 个数换成 1，3，5……31 的奇数数列，2，4，6……32 的偶数数列（级差为 2），编出了 4^2 魔方的“另类”习题集。这就是本书的第三部分内容。

本书填空题的参与性很广，适合各类有数字加减能力的人群。特别适合于青少年和老年人。

如果你是学前班或小学学生，通过填空可培养你对数学的兴趣，并提高你的数字加减能力，为以后的学习打下良好的基础。

如果你是初中学生，做方阵的填空，你的数字加减速度及心算能力就会迅速提高，进而提高你的综合运算能力，对数、理、化的学习会有良好的助推作用。

对一般年轻人，由于填空，心算能力得以加强，头脑更加灵活，则有助于办事效率的提高；如果你是从事商品买卖的，较强的心算能力更让你受益匪浅。

老年人如果经常玩玩数学魔方，大脑经常活动，则可提高脑活力，有效减缓老年痴呆症的发生。

机器不转就会生锈，大脑不用就会迟钝、僵化。经常玩玩数学魔方，可使你的大脑保持活力，它是大脑有效的除锈剂。

本书没有很高的技术含量，它只是一些土豆和白菜。我把它种出来、挖出来了，供大家享用。人人都可以吃，都能吃，有益无害。

如何吃呢？

你可根据你的年龄、爱好和精力，有选择地去做。初有计算能力的少儿，可选择五空以下的题做；小学高年级以上计算能力强一点的学生可做五空以上的题，并多做乙类题；如感觉数字简单，可选 4^2 的另类魔方填空来做。可先易后难，逐步加深，逐步

提速。有时间可经常做，反复做。题目变化多，不会觉得重复无味。你可从中选题做，也可设空自己做；你也可出题给别人做；还可和朋友竞赛，比难度，比速度。其中有些题可用于智力测验、智力竞赛。难易程度任意控制，题目变化层出不穷。

填空的时间、地点机动灵活，在车上、船上、飞机上；在公园、在候车室，有空就可以玩，不受时间、地点、环境的制约。填空伴你度过许多空闲无聊的时光，在增长智力的同时，给你带来充实和快乐。

在 4^2 的魔方填空中需了解以下几点：

一、4^2 的魔方方阵分 A 型方阵和 B 型方阵。A 型方阵是只有 14 组数之和相等的方阵；B 型方阵有 18 组数之和相等。均值均为 34。

二、在 A、B 型方阵习题中，有甲类题和乙类题。只需用加减法就能填满空的方阵称为甲类题，需用试凑法才能填满空的方阵称为乙类题。

三、在另类 4^2 魔方习题中，不同数列组成魔方其均值不同。以数字区别如下：

① 为 1、3、5……31 数列组成的，均值为 64。

② 为 2、4、6……32 数列组成的，均值为 68。

四、具体各标题的含义示例如下：

A 甲 3：为 3 个空的用加减法就能填满空的 A 型 4^2 魔方方阵。

B 甲 5：为 5 个空的可用加减法填满的 B 型 4^2 魔方方阵。

B 乙 8：为 8 个空的需用试凑法才能填空的 B 型方阵。

A 甲 3 ①：采用 1，3，5……数列的 3 空另类 4^2 魔方方阵，甲类题 A 型方阵，均值为 64。

最后要说的是，幻方一直以来就是娱乐数学第一名题。它从古代就开始影响人类生活。幻方由于比较简单，能较快引起青少年的兴趣，因此幻方在智力开发方面已产生重要的作用。

经过一代代数学家和数学爱好者的辛勤劳动，幻方及它的变体的科学内涵正逐步得到揭示。研究表明，幻方在哲学、美学、建筑学、图论、对策论、程序设计、人工智能、智力玩具等方面有广泛的应用。本人根据幻方原理，利用 4 阶幻方方阵，研制出了一种新型麻将牌——数学幻方麻将，受到玩者的好评，最近已申报了国家专利。

因此，学习、普及一点幻方方面的知识，对每个人特别是青少年，是明智的选择。

附图如下：

1	13	16	4
12	10	7	5
6	8	9	11
15	3	2	14

（1）

4^2A 型均值为 34

16	6	1	11
9	3	8	14
7	13	10	4
2	12	15	5

（2）

4^2 B 型均值为 34

8	1	6
3	5	7
4	9	2

（3）

3^2 均值为 15

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

（4）

5^2 均值为 65

32	6	2	31	4	36
1	29	33	35	8	5
9	34	7	3	30	28
25	15	24	12	22	13
21	17	19	16	20	18
23	10	26	14	27	11

（5）

6^2 均值为 111

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

（6）

7^2 均值为 175

53	54	64	61	3	4	10	11
56	55	63	62	2	1	9	12
15	14	6	5	49	52	60	59
16	13	7	8	50	51	57	58
18	17	25	28	48	47	39	38
19	20	26	27	45	46	40	37
42	43	33	34	32	29	23	24
41	44	36	35	31	30	22	21

（7）

8^2 均值为 260

68	67	95	93	3	1	31	29	58	60
65	66	94	96	2	4	30	32	59	57
92	91	19	17	27	25	54	53	64	63
89	90	18	20	26	28	55	56	61	62
16	15	23	21	49	51	79	77	88	86
13	14	22	24	52	50	78	80	85	87
40	39	47	45	75	73	82	81	12	11
37	38	46	48	74	76	83	84	9	10
44	43	71	69	99	97	7	5	34	36
41	42	70	72	98	100	6	8	35	33

（8）10^2 魔方方阵均值为 505

n^2 个数构成的魔方方阵

一、概述

由 n^2 个数（n 为大于 2 的正整数）组成的等差数列，如 a_1，a_2，a_3……a_{n}^{2}，对 $a_1 \sim a_{n}^{2}$ 各数经过适当排列，排成几行和几列的方阵，使每行、每列以及两对角线上的各数之和均相等，这样的数学方阵称为“幻方”，又称为数学“魔方”。

例如 $3^2 = 9$ 的 9 个自然数和 $4^2 = 16$ 的 16 个自然数构成如图（1）（2）所示的魔方。又如 3 个连续奇数和 16 个连续偶数可构成如图（3）（4）所示的魔方。

8	1	6
3	5	7
4	9	2

（1）

14	16	1	3
4	2	13	15
5	7	12	10
11	9	8	6

（2）

15	1	11
5	9	13
7	17	3

（3）

28	30	8	2
4	6	32	26
14	12	18	24
22	20	10	16

（4）

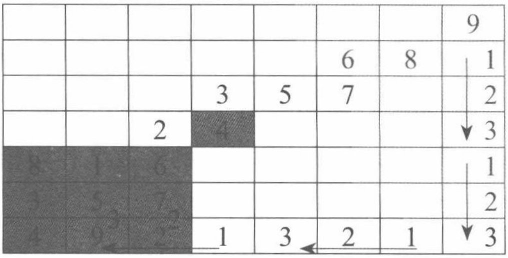
方阵每行每列各数之和称为均值，以 p 表示，设 n^2 个数为 a_1，a_2，a_3……a_{n}^{2}，则：

$p=\dfrac{a_1+a_n^2}{2}\cdot n$ 图（1）（2）（3）（4）均值分别为 15、34、27、68。

本文只讨论从 $1\sim n^2$ 的自然数列构成的数学魔方的排列。

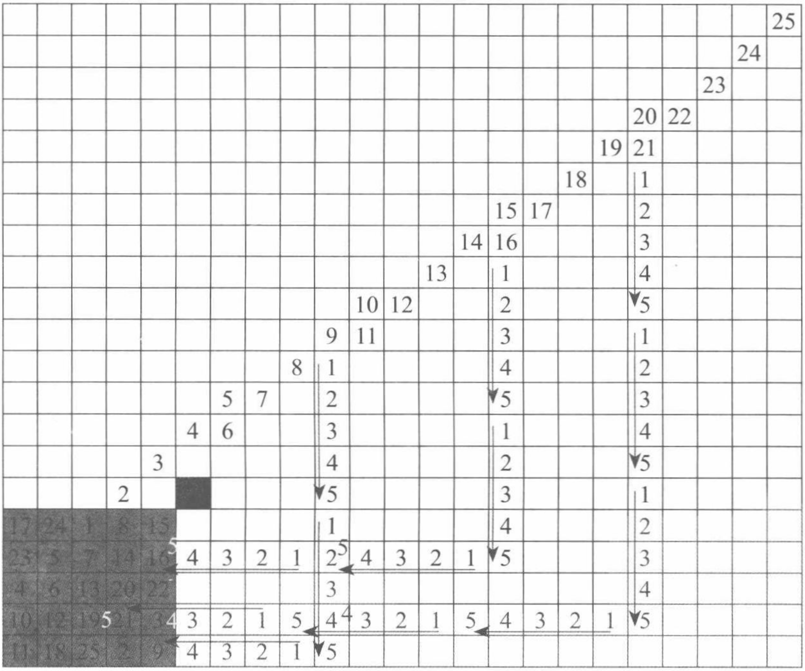
二、n 为奇数的魔方方阵的排列

由于 n 为奇数，n^2 亦为奇数。排列比较简单，采用移位法即可。以 $n^2=9$ 的 1 ~ 9 个数为例，由于 n=3，以三个数为一组斜向上排列，如图（5）所示。然后以 1 为中心，将 2~9 的各个数移到左下方阴影区的 8 个格子内。



图（5）3^2 移位示意

方法是将各数每次向下或向左移 3 格，一次不到再移，直至移到阴影区为止。如图（5）中的 9 向下移 3 格，再向下移 3 格，再向左移 3 格，再向左移 3 格进入阴影区的它的位置。再如图（6）中，先每 5 个数斜向上排好，再进行移动。如 9 向下移动 5 格，若这时向左移动，则进不了阴影区，因此要再向下移动 5 格，再向左移动 5 格，就到达阴影区它的位置。再如 21，向下移动三次共 15 个格，再向左移动三次 15 个格，也到达阴影区它的位置。依此办法将各数移到阴影区，即可得 3^2 和 5^2 的魔方方阵。



图（6）5^2 移位示意图

实际排列中，如数字大则要占用很大的方格空间，不便操作。经总结，排列时可按下列口诀进行：**1 在上方正中央；后在前的斜上方；出框内移几格；无格就填其下方**。如图（5）2 在 1 的右上方，但已出阴影区，出框了就向下移 3 格。内移就是通过向下或向左将其移至阴影区内。无格有两种情况，一是右上方已有数字；二是其不在阴影区的延长区内，具体就是图（6）中的麻子格。如图（6）中，5 填完后 5 的右上方已有 1，故只能将 6 填在 5 的下方。又如图（6）中 15 的右上方是麻子格，故 16 只能填在 15 的正下方。

按此口诀，可排出 n 为任何大于 1 的奇数的数学魔方方阵。

三、n 为偶数（n 大于 2）的数学魔方的排列

n 为 2 的方阵无法排列，不讨论。

由于 n 为偶数，则 n^2 亦为偶数。偶数不能以哪个数为对称，排列比较困难，但排列的方案较多。以 n 为 4 为例，可有很多种。通过排列组合，本人已排出 $n^2=4^2=16$ 的 1183 例全部 4 阶幻方方阵。

对于 n 大于 4 的偶数，如此排列则很困难。但经研究，把 n^2 分解变换，可使大于 4 的偶数的未知排列规律归属到已知的排列规律上来。

对于全部偶数可变换为 $2^k \cdot m$。其中 k 为正整数，m 为奇数。但当 k=1，m=1 时不能排列，不予讨论。

现对 $(2^k \cdot m)^2$ 变换如下：

（1）当 k 为奇数时：$(2^k \cdot m)^2 = (2\times 2^{k-1} \cdot m)^2 = 4\times 2^{2(k-1)} \cdot m^2 =$

$4\times 4^{k-1} \cdot m^2 = 4\times 4^{2^{\frac{k-1}{2}}} \cdot m^2 = 4\times \underbrace{4^2\times 4^2\cdots}_{\frac{k-1}{2}\text{个}} \times m^2$ ……………………①

（2）当 k 为偶数时：

$(2^k \cdot m)^2 = 2^{2k} \cdot m^2 = 4^k \cdot m^2 = 4^{2^{\frac{k}{2}}} \cdot m^2 =$

$\underbrace{4^2\times 4^2\times\cdots}_{\frac{k}{2}\text{个}} \times m^2$ ……………………②

经以上变换可见，大于 2 的偶数的平方可出现以下几种情况：

当①式中的 k=1 时①式就变为 $4\times m^2$…… ……………………③

当①式中的 k 为 1 以上的奇数时①式就变为 $4\times 4^2\times\cdots\cdots\times m^2 = 4\times m^2\times 4^2\times\cdots\cdots$ ……………………④

当②式中的 k=2 时②式就变为 $4^2\times m^2$…… ……………………⑤

当②式中的 k 为 2 以上的偶数时②式就变为 $4^2\times 4^2\times\cdots\cdots\times m^2$…… ……………………⑥

定理：对于两个或两个以上因数的乘积的排列，若各因数的

排列已知，则乘积的排列亦可已知。即若 a^2 和 b^2 的排列已知，则 $a^2\times b^2=(a\times b)^2=n^2$ 的排列也一定可得。（证明略）

排列的方法是，先把 $1\sim n^2$ 的 n^2 个数依次分成 b^2 等份，把每份 a^2 个数按 a^2 的规律排列，再把各 a^2 的排列依次作为 b^2 排列中的一个数，按 b^2 的规律排列即可。

如 $12^2=(3\times4)^2=3^2\times4^2$ 的排列，具体方法是，把 1×12^2 即 1~144 各数依次取（$3^2=9$）9 个数按 3^2 的规律排列，再将各个排列（共 4^2 个）依次作为 4^2 排列中的一个数，按 4^2 的规律排列。或将 1~144 各数依次取 16 个数按 4^2 的规律排列，再将这 9 个（3^2 个）排列依次作为 3^2 排列中的一个数，按 3^2 的规律排列，都可得到 12^2 的魔方方阵。如图（7）（8）所示。

同理，若 a^2、b^2、c^2 的排列已知，则 $a^2\times b^2\times c^2$ 的排列也一定可得。

62	55	60	125	118	123	35	28	33	80	73	78
57	59	61	120	122	124	30	32	34	75	77	79
58	63	56	121	126	119	31	36	29	76	81	74
134	127	132	53	46	51	107	100	105	8	1	6
129	131	133	48	50	52	102	104	106	3	5	7
130	135	128	49	54	47	103	108	101	4	9	2
17	10	15	26	19	24	116	109	114	143	136	141
12	14	16	21	23	25	111	113	115	138	140	142
13	18	11	22	27	20	112	117	110	139	144	137
89	82	87	98	91	96	44	37	42	71	64	69
84	86	88	93	95	97	39	41	43	66	68	70
85	90	83	94	99	92	40	45	38	67	72	65

（7）$3^2\times4^2=12^2$

115	113	128	126	3	1	16	14	83	81	96	94
125	127	116	114	13	15	4	2	93	95	84	82
124	122	117	119	12	10	5	7	92	90	85	87
118	120	121	123	6	8	9	11	86	88	89	91
35	33	48	46	67	65	80	78	99	97	112	110
45	47	36	34	77	79	68	66	109	111	100	98
44	42	37	39	76	74	69	71	108	106	101	103
38	40	41	43	70	72	73	75	102	104	105	107
51	49	64	62	131	129	144	142	19	17	32	30
61	63	52	50	141	143	132	130	29	31	20	18
60	58	53	55	140	138	133	135	28	26	21	23
54	56	57	59	134	136	137	139	22	24	25	27

（8）$4^2\times3^2=12^2$

通过上述变换，现就偶数魔方方阵的排列加以说明。

对于⑤式和⑥式，因 m^2 的排列已知，4^2 的排列也为已知，因此⑤式和⑥式的排列亦为已知。

对于③式和④式，由于 4^2 的排列已知，关键是 $4\times m^2$ 的排列

了。$4\times m^2$ 的排列比较复杂。经研究，找到了它们排列的模拟图。图（9）、（10）、（11）、（12）、（13）分别为 4×3^2、4×5^2、4×7^2、4×9^2 和 4×11^2 的模拟图。

模拟图由 m^2 个小单元组成，每个小单元由 4 个模拟数字 1、2、3、4 构成，以便给出其实际数字的位置。小单元中实际的数字是 $1\sim4m^2$ 个数中每 4 个连续的数为一组的各组数字。

模拟图中 m^2 个单元又分为两大部分。一是左上方的基本部分如图（9）中的阴影部分。二是基本部分的右边和下边部分，称边框部分。

基本部分和边框部分的小单元中的四个模拟数都按一定的规律生成，如模拟图中箭头所示。

研究发现，各模拟图的基本部分的小单元数量不同，但各小单元中的模拟数的旋转规律相同，图（10）、（11）是典型的模拟图构造图。

边框部分除 4×3^2 排列得稍有不同外，4×5^2、4×9^2、4×13^2……$4(4Q+1)^2$（Q 为正整数）的边框具有相同的构成规律，而 4×7^2、4×11^2、4×15^2……$4(4Q-1)^2$ 的边框也有相同的构成规律，只是小单元数量多少而已。具体见图（10）（11）（12）（13）。

有了基本部分和边框部分的生成规律，就可设计出 $4\times m^2$ 的模拟图。

有了模拟图，模拟图中各小单元的实际数字可以这样确定，把各小单元看作是 m^2 奇数魔方方阵中的一个数，奇数方阵中的 1 所在的小单元数字就是 1、2、3、4；方阵中的 2，所在的小单元数字就是 5、6、7、8，依次类推。四个数的位置关系由小单元的模拟数字确定。这样就可得到 $4\times m^2$ 的实际数字的排列了。

还有一个特例，④式中当 m=1 时，④式就变为 $4\times4^2\times4^2\times$……。

其中 4×4^2 的排列也有它的模拟图，基本部分与 4×5^2 的模拟图的基本部分相同，没有边框。它的 16 个小单元按 4^2 的魔方方阵排列。用同样的方法确定其各小单元中实际的数字。模拟图见图（14）。

至此，n^2 的全部魔方方阵都可排出来了。实际例图见图（9）、（10）、（11）、（14），分别是 4×3^2、4×5^2、4×7^2、4×8^2 的魔方方阵图。

需要指出的是，这里介绍的 n^2 个数的魔方方阵的排列方法只是幻方方阵排列方法的一部分。幻方方阵的排列思路和方法很多。这里只是抛砖引玉。

同时，一个数的魔方方阵也有很多个。奇数的魔方方阵比较单一。偶数的魔方方阵数量就很多。如 4^2 的魔方阵就有 1100 多个，按本书介绍的方法，8^2 的魔方方阵也有 1000 多个，16^2 的魔方方阵有 130 多万个，64^2 的魔方方阵可排出 16 亿多个，真是千变万化，十足的数学迷宫。

数学是物质运动形式和存在形式的反映，多变的数学魔方和这样的形式有什么关系，现在还不得而知。也许它们之间存在着某种联系，未来会得出结论。

附图：

1	2	4	1	4	3
4	3	3	2	2	1
3	2	2	1	4	3
4	1	3	4	2	1
1	4	1	3	2	4
2	3	2	4	1	3

图（9）4×3^2 模拟图，阴影区为基本部分，」部分为边框部分。