点可数覆盖与序列覆盖映射

（第二版）

林 寿 著

科学出版社

点可数覆盖与序列覆盖映射

(第二版)

林 寿 著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书以点可数覆盖为线索，利用映射的一般方法对用覆盖或网来定义的广义度量空间类进行系统的研究，总结20世纪90年代以来点可数覆盖与序列覆盖映射的重要研究成果，包含国内学者的相关研究工作，引用了国内学者发表的文献237篇，内容包括点可数覆盖、点有限覆盖列、遗传闭包保持覆盖与星可数覆盖等. 在第一版的基础上，第二版对点可数覆盖及 Ponomarev 系作了大量充实，补充了序列覆盖映射理论的若干新进展，包括引用了 2000 年以来发表的文献220篇，给出了53个与点可数覆盖及序列覆盖映射相关问题的回答，引用或提出了92个尚未解决的问题供有兴趣的读者研究.

本书论述严谨，自成系统，只要具备一般拓扑学基础知识就能阅读本书，并进入研究的前沿. 读者对象为大专院校数学系师生、研究生和数学工作者.

图书在版编目(CIP)数据

点可数覆盖与序列覆盖映射/林寿著. —2版. —北京：科学出版社，2015.11

ISBN 978-7-03-046396-8

Ⅰ. ①点… Ⅱ. ①林… Ⅲ. ①一般拓扑-理论研究 Ⅳ. ①O189.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015) 第 270483 号

责任编辑：王丽平／责任校对：彭 涛

责任印制：徐晓晨／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京京华虎彩印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年9月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2015年11月第 二 版 印张：20

2015年11月第二次印刷 字数：391 000

定价：118.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

序

可度量性和紧性是一般拓扑学的中心概念, 之所以这么说, 是从历史的角度来看, 一般拓扑学始终围绕这两个概念而发展, 从当今一般拓扑学的结构方面来看也是如此. 紧性是通过开覆盖来定义的. 在 P.S. Alexandroff, P. S. Urysohn, F. B. Jones, A. H. Stone, R. H. Bing, J. Nagata 和 Ju. M. Smirnov 等的经典工作之后, 可度量性也可以用开覆盖序列来刻画. 覆盖系的方法作为空间分类主要手段之一现在已得到普遍的认可. 许多非常重要的空间类是通过自然覆盖结构引入的, 这种自然覆盖结构均可在可度量空间中找到其源头. 在 20 世纪五六十年代, K. Nagami, V. I. Ponomarev, A. Okuyama, A. Arhangel'skiĭ 等已发现覆盖系可以很有效地用来构造把可度量空间映满具有这种覆盖系空间的一些自然映射. 此法导致了建立在覆盖系和映射相互作用基础上的空间与映射的相互分类理论[24].

这本专著结合映射的一般方法对用覆盖或网来定义的许多广义度量空间类进行了系统的研究, 论述了作为一般拓扑学中心领域之一的空间与映射相互分类理论的现状. 作者林寿教授及其合作者、同事 (如, 刘川, 燕鹏飞, 戴牧民, K. Nagami, Y. Tanaka, T. Hoshina) 对该理论作出了较大的贡献, 得出了重要且往往相当出乎意料的结果.

该书的一个重要方面是它可作为关于映射分类和关于构造具有各种特定性质的映射的方法这两方面系统的信息源, 这种研究方向在现有的教科书中涉猎不多, 因而这本专著是弥足珍贵的. 然而, 该书对所有的一般拓扑学者都非常有用, 即使是那些从事研究完全不同问题的人和兴趣各异的研究生. 的确, 这本专著对于可度量性及广义度量空间类作了有趣的全新的介绍, 引入了基本的映射类, 尤其是商映射、紧覆盖映射及其种种的推广. 这些概念都具有最基本的性质.

该书中系统地研究与应用的另一个基本性质是在 1959 年提出来的网的概念. 拓扑空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的网[17], 若 X 的每一个开子集是 $\mathscr{P}$ 的某子族之并. 在寻找具有可数网的空间时曾用过网的概念. Arhangel'skiĭ 的论文[17] 发现了可分度量空间的每一连续映射都有可数网, 还建立了每一个具有可数网的紧的 Hausdorff 空间都有可数基 (因此是可度量化的). 从这些论述可得出, 如果紧的 Hausdorff 空间 Y 是可分度量空间的连续映射, 那么 Y 是可度量化空间. 该定理是空间与映射一般理论中最早的典型结果之一, 该专著论述了它的现代进展. 由此, 网比起 “形式太好” 的基具有更加微妙和更加可变的结构. 正是通过对网进行各种各样常常是巧妙的限制, 使许多重要的广义度量空间类得以引入并加以研究, 其中

之一, 即由 Michael[354] 使用 k 网的概念定义的空间类是这本专著真正的核心.

虽然阅读该书无需非常特别的背景知识, 但是该书中的论述已大大超过了一般的水平, 它包含有丰富、深刻、出色、具有极高专业水准的理论结果. 定理 2.1.9, 推论 2.1.11, 定理 2.2.5, 定理 2.2.10, 定理 2.3.11, 定理 2.3.13 和定理 2.5.10 都是优美结果的范例①. 特别地, 这些定理为映射成为紧覆盖映射提供了充分的条件, 也为空间成为具有可分纤维的度量空间的商空间提供了充分的条件.

该书不仅把读者带到了广义度量空间理论探索的最前沿, 而且包括了许多有趣的且相当重要的尚未解决的问题, 它们中有些是老问题, 有些是新问题. 在此例举其中一个很自然的问题. 设 Y 是一个具有紧纤维的可度量空间的商空间, 更设 Y 是正则的, 那么 Y 的每一点是可数个开集的交吗②? 该书对开始在这个或类似的问题上进行研究的人提供了所有必备的背景知识和信息. 因此, 该专著不但对专家而且对研究生来说是同样有趣又有用的.

我想提一提该专著的另一个令人高兴的方面. 它的出现标志了一般拓扑学在中国长期发展的成功, 这个发展造就了一群极具创造力的中国数学工作者, 使他们作出了对这一般拓扑学主流方向的闪光的重要贡献.

衷心地祝贺该书的作者和读者!

A. V. 阿尔汉格尔斯基

2001 年 5 月 1 日

于俄亥俄大学

① 这是第一版中的序号, 在第二版中的序号依次是定理 2.1.8, 推论 2.1.9, 定理 2.3.5, 定理 2.3.10, 定理 2.4.13, 推论 2.4.10 和定理 2.5.6.

② 这问题在第一版, 第二版中分别为问题 3.3.19, 问题 3.3.22.

第二版前言

谨以本书祝贺四川大学蒋继光教授 80 寿辰、苏州大学周友成教授 70 寿辰.

构建点可数覆盖与映射之间的本质关系始于 20 世纪 60 年代[400], 至 20 世纪 80 年代末国外关于该课题的研究已基本发展到极致[161, 164, 171, 377]. 正是由于专著 *Open Problems in Topology*[366] 的出版及序列覆盖映射类的引入与探索, 为广义度量空间理论在 20 至 21 世纪之交的关键时期注入了新的活力.

本书的出版恰逢其时, 不仅凸显了它在空间与映射理论方面的价值, 同时为 21 世纪初拓扑空间理论的发展提供了一条有效的途径. 第一版于 2002 年出版后, 在广义度量空间类和映射类方面均引起不少同行的关注, 如具有点可数覆盖的空间、具有点正则覆盖的空间、σ 点离散空间类、Ponomarev 系和紧覆盖映射、紧映射、局部可分度量空间的映射等, 都产生了丰富的结果. 本书第一版共引用或提出尚未解决的问题或猜想 32 个, 现至少已解决了其中的 17 个问题 (见 5.5 节). 为更好地体现、反映学科研究趋势, 特出版经修订后的第二版.

鉴于 Gruenhage[159, 160, 161, 163] 等已有关于广义度量空间理论的系列介绍, 我们不再专门综述广义度量空间理论及新进展. 本书第二版比第一版增加了 60% 以上的篇幅, 尽量不与作者的《广义度量空间与映射》[291] 内容交叉, 保持各自在研究广义度量空间理论中的优势与特点. 本书的修订和出版得到国家自然科学基金项目 “M_3 蕴涵 M_1 问题” (No. 11171162), “仿拓扑群的广义度量性质及其在紧化中的应用” (No. 11201414) 和 “仿拓扑群中的三空间问题” (No. 11471153) 的支持. 过去的 10 多年间, 不少同事在阅读第一版时提出了若干建议, 包括希望本书能有英文版本[73]. 在此对他们及所有关心第二版出版的同行, 尤其是南京大学师维学教授、闽南师范大学李进金教授、北京工业大学彭良雪教授在书稿的编辑与推荐, 以及作者在四川大学、闽南师范大学的研究生在文稿的排版与订正上给予的帮助, 表示衷心的感谢.

作　者①

2015 年 4 月

① 通信地址: 352100 福建省宁德市蕉城南路宁德师范学院数学研究所.

E-mail: shoulin60@163.com.

第一版前言

空间与映射的理论是一般拓扑学的重要组成部分. 我的著作《广义度量空间与映射》[268] 用映射方法系统论述了广义度量空间的基本理论, 总结了 20 世纪 60 年代至 90 年代初一般拓扑学的重要研究成果. 广义度量理论与覆盖性质理论中的许多问题涉及点可数覆盖的研究. 20 世纪 90 年代一般拓扑学的发展动力之一是专著 *Open Problems in Topology* [366] 中的问题, 其中的一些问题涉及具有点可数基空间与度量空间的紧覆盖映射, 引起了一批拓扑学名家对点可数覆盖及相关映射理论的兴趣, 促进了 k 网理论与度量空间映射理论的发展, 许多优秀的结果不断涌现. 因此, 总结这 10 年国际上广义度量空间理论的成果, 反映我国学者在该领域的贡献, 引导更多的年轻数学工作者投身于该领域的工作是十分迫切和非常必要的.

除一些熟知的点集拓扑学知识与引用《广义度量空间与映射》和集论拓扑学中的几个结果外, 本书的证明基本上是封闭的, 一些较为复杂的例子也给出了详细的构造. 特别地, 无须假设读者已阅读过《广义度量空间与映射》. 本书由五章组成. 第 1 章简要综述 20 世纪 90 年代的广义度量空间理论, 包含它的主要研究课题、国内外学者的重要贡献, 同时作为预备章也介绍一些基本概念、相关的命题及例子. 第 2 章介绍点可数覆盖与度量空间的 s 映射理论, 用特殊的商空间刻画具有点可数基的空间, 建立度量空间的商 s 映像与由 k 网、序列网、cs 网、sn 网和 cfp 网等集族确定的点可数集族之间的精确关系. 第 3 章介绍点有限覆盖列与度量空间的 π 映射、紧映射理论, 发展点正则覆盖的方法, 阐述度量空间上序列覆盖映射与 1 序列覆盖映射的联系. 第 4 章介绍遗传闭包保持覆盖、控制族与度量空间的闭映射理论, 揭示这些空间类的一些覆盖性质. 第 5 章介绍星可数覆盖与局部可分度量空间的商映射理论, 突出具有星可数 k 网空间在研究局部可分度量空间映像中的地位, 列举点可数覆盖在探讨度量空间的闭映像和乘积空间的 k 空间性质中的作用.

受高国士教授十多年的教导, 近年来作者在广义度量空间理论方面做过一些探索性的研究, 尤其偏爱空间与映射方面的课题. 广义度量空间理论从 20 世纪 60 年代起在国际上蓬勃发展, 各个不同时期均不断有名家与名作涌现, 作者的工作受 A. Arhangel'skiĭ, L. Foged, G. Gruenhage, E. Michael 和 Y. Tanaka 等的影响较大. 尽管本书与《广义度量空间与映射》同属于广义度量空间理论, 作者无意写一本关于空间与映射方向的手册, 仅试图把它作为《广义度量空间与映射》的姐妹篇, 以点可数覆盖为线索, 借助序列覆盖映射理论, 反映 20 世纪 90 年代广义度量空间理论研究中引人入胜的一个侧面. 本书的大部分内容取材于作者的博士学位论文[280],

同时包含了作者及国内外学者 1992 年以来的一些相关工作. 感谢高国士教授、刘应明教授 (中国科学院院士)、林群研究员 (中国科学院院士)、吴利生教授、蒋继光教授、戴牧民教授和周友成教授等前辈多年来一直给予作者的关心、指导与扶持, 感谢与刘川教授、燕鹏飞教授、Y. Tanaka 教授、T. Mizokami 教授、彭良雪博士等进行富有成效的合作, 感谢与恽自求教授、李进金教授、葛英副教授、李克典教授、夏省祥教授等进行有益的学术交流, 感谢国家自然科学基金 [资助项目 “点集拓扑” (No. 19476010)、“函数空间的拓扑性质” (No. 19501023) 与 “集论拓扑在广义度量理论和覆盖理论的应用” (No. 19971048)], 福建省自然科学基金 [资助项目 “集论拓扑” (No. A94019)、“函数空间的拓扑性质” (No. A97025) 与 “集论拓扑在广义度量理论和覆盖理论的应用” (No. F00010)], 福建省 “百千万人才工程” 人选培养基金 [资助项目 “广义度量空间研究” (1999)] 及宁德师范高等专科学校 “学术带头人专项经费” 等为研究工作提供的资金保证, 感谢 Y. Tanaka 教授、K. Tamano 教授、J. Nagata 教授、M. Sakai 教授、A. Shibakov 博士、Y. Yajima 教授、M. Choban 教授、H. Junnila 教授、刘川教授、高智民教授、恽自求教授和师维学教授等为研究工作提供的资料保证. 感谢宁德师范高等专科学校及刘卓雄校长等师专同事 20 年来一直对作者各方面的支持. 感谢福建师范大学对作者聘任为基础数学岗位特聘教授的重视及提供优良的工作和生活环境. 本书的出版应特别感谢刘应明教授、江守礼教授和王尚志教授的热情推荐, 著名拓扑学家 A. V. 阿尔汉格尔斯基教授的序及中共中央统战部华夏英才基金的支持.

林　寿

2001 年 3 月 31 日

于福建师范大学

目　　录

第1章　绪　　论

拓扑学的中心课题是确定和研究拓扑不变量. Arhangel'skiĭ 和 Pontryagin[39] 指出: *一般拓扑学*致力于拓扑空间及连续性的研究, 有三个主要的 “内在” 任务, 一是不同拓扑空间类的比较, 二是确定类的研究, 三是为上述目的及应用的需要定义出新的概念和空间类. 实现任务一的联结空间的映射方法特别重要, 该方法是直接建立不同空间类之间的联系, 任务二主要涉及空间类关于运算的性质, 而覆盖的方法对完成上述任务起重要作用.

由此可见, 映射与覆盖的方法是一般拓扑学中通用的重要工具, 通过对度量化问题、空间与映射的相互分类原则和积空间的仿紧性等一般拓扑学中重要课题的研究, 导致了广义度量空间理论的建立[68]. 什么是广义度量空间? 或许, 任何推广了可度量性的拓扑性质都可以称为广义度量性质. 然而, 这种说明过于广泛, 适当的限制更为有利于探索可度量性的本质. 粗略地说, *广义度量空间*是这样的一些空间类[159, 178], 它有益于刻画可度量性, 继承了度量空间的许多优美性质且度量空间的某些理论或技巧能拓广到这些空间类, 如是否关于完备映射或闭映射保持? 是否关于子空间或闭子空间遗传? 是否关于有限积或可数积封闭? 是否具有一定的可和性? 是否具有某种的覆盖性质? Hodel[178] 指出: 有许多的理由说明为什么广义度量空间是值得研究的, 或许最重要的理由是这些空间类增加了我们对于度量空间的理解, 此外, 拓扑学家正不断地寻找更广泛的空间类使得一些特别重要的结果成立. 正因为如此, 从 20 世纪 60 年代起广义度量空间理论一直是一般拓扑学中活跃的研究方向, 所涉及的与公理集合论、数理逻辑、维数论、组合数学、泛函分析、拓扑代数、动力系统、计算科学等分支相互交融而形成的大量问题已列入专著 *Open Problems in Topology*[366] 和 *Open Problems in Topology II*[392].

在 20 世纪 70 年代末至 80 年代, 我国学者就已在广义度量空间理论中作出了不少值得称赞的成就[181, 345, 346, 377]. 从 20 世纪 90 年代起, 我国学者每年都产生不少广义度量空间理论方面的成果, 其中的一些已写入有影响的专著, 如

(1) Hušek, van Mill[182]. *Recent Progress in General Topology II*, 2002.

(2) Hart, Nagata and Vaughan[171]. *Encyclopedia of General Topology*, 2004.

(3) Pearl[392]. *Open Problems in Topology II*, 2007.

(4) Hart, van Mill and Simon[170]. *Recent Progress in General Topology III*, 2014.

1960 年至 2000 年, 国际上在不同时期内所取得的广义度量空间理论的成就已先后总结在一些重要的论著中, 如

(1) Arhangel'skiĭ[24, 29]. *Mappings and Spaces*, 1966; *General Topology III*, 1995.

(2) 儿玉之宏, 永见启应[202]. 位相空间论, 1974.

(3) Burke, Lutzer[68]. *Recent Advances in the Theory of Generalized Metric Spaces*, 1976.

(4) Kunen, Vaughan[207]. *Handbook of Set-theoretic Topology*, 1984.

(5) Gruenhage[159, 160]. *Generalized Metric Spaces*, 1984; *Generalized Metric Spaces and Metrization*, 1992.

(6) Nagata[382]. *Modern General Topology*, 2nd revised edition, 1985.

(7) Morita, Nagata[377]. *Topics in General Topology*, 1989.

(8) Hušek, van Mill[181]. *Recent Progress in General Topology*, 1992.

(9) 林寿[268]. 广义度量空间与映射, 1995.

(10) Hodel[178]. *A History of Generalized Metrizable Spaces*, 1998.

(11) 高国士[128]. 拓扑空间论, 2000.

2000 年起, 广义度量空间的发展方向可以简单地归结为解决问题及寻求应用. 把广义度量空间理论应用于不确定性问题、传感器最优布局问题及拓扑代数等的研究就是最好的说明. 21 世纪也出版了不少与广义度量理论相关的综述报告或著作, 如

(1) Hušek, van Mill[182]. *Recent Progress in General Topology II*, 2002.

(2) 林寿[282, 285, 291]. 点可数覆盖与序列覆盖映射, 2002; 度量空间与函数空间的拓扑, 2004; 广义度量空间与映射, 第二版, 2007.

(3) Gruenhage[161, 163]. *Metrizable Spaces and Generalizations*, 2002; *Generalized Metrizable Spaces*, 2014.

(4) 戴牧民[86]. 集论拓扑学引论, 2003.

(5) Hart, Nagata and Vaughan[171]. *Encyclopedia of General Topology*, 2004.

(6) 高国士[129]. 拓扑空间论, 第二版, 2008.

(7) 林福财[240]. 拓扑代数与广义度量空间, 2012.

(8) Hart, van Mill and Simon[170]. *Recent Progress in General Topology III*, 2014.

许多知名学者不断提出大量有挑战性的问题, 汇同一些长期未解决的经典问题成为广义度量空间理论进一步向前发展的源泉[41, 392]. 恰如 Hodel[178] 在总结了广义度量空间理论的阶段性结果后说: “或许更重要的是, 广义度量空间的研究还不是完整的, 更确切地说, 随着每年许多新的重要成果的出现, 它还在不断地成长壮大.”

关于一般拓扑学及其中的广义度量空间的历史、作用及影响建议读者阅读 Aull 和 Lowen 主编的著作 *Handbook of the History of General Topology* [43, 44, 45].

1.1 记号与术语

本节介绍一些记号和术语.

以 $\mathbb{R}$ 表示实直线, $\mathbb{N},\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{I}$ 分别表示 $\mathbb{R}$ 的正整数子集、有理数子集和单位闭区间. 记 $\mathbb{S}_1=\{0\}\cup\{1/n:n\in\mathbb{N}\}$. ω 有三种含义,一是 $\mathbb{R}$ 的自然数子集 $\mathbb{N}\cup\{0\}$, 二是第一个无限序数, 三是最小的无限基数, 它们的确切意义在上下文中是不会混淆的. ω_1 是第一个不可数序数. 对于空间 X, $\tau(X)$, 在不引起混淆时记为 τ, 表示 X 上的拓扑, $\tau^c(X)$ 或 τ^c 表示 X 上全体闭集的族. **本书所论空间均指满足 T_2 分离性条件的拓扑空间, 映射指连续的满函数.** 为了便于区别, 函数未必连续或满. 对于集合 X 的子集族 $\mathscr{P}$, $x\in X$ 和 $A\subset X$, 记

$$
\begin{aligned}
&(\mathscr{P})_x=\{P\in\mathscr{P}:x\in P\}, && (\mathscr{P})_A=\{P\in\mathscr{P}:P\cap A\neq\varnothing\},\\
&\mathscr{P}|_A=\{P\cap A:P\in\mathscr{P}\}, && \mathscr{P}^{<\omega}=\{\mathscr{F}\subset\mathscr{P}:\mathscr{F}\text{是有限的}\},\\
&\mathrm{st}(x,\mathscr{P})=\cup(\mathscr{P})_x, && \mathrm{st}(A,\mathscr{P})=\cup(\mathscr{P})_A.
\end{aligned}
$$

若 x_n $(n\in\mathbb{N})$ 是 X 中的一列点, $\langle x_n\rangle$ 表示 X 的子集 $\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$; (x_n) 表示笛卡儿积 X^ω 中的第 n 个坐标为 x_n 的点; 像通常一样, $\{x_n\}$ 表示 X 中的第 n 项为 x_n 的序列. 对于 X 中有多个下标的序列, 如 $\{x_{n,m}\}$, 分别记 $\{x_{n,m}\}_n$ 和 $\{x_{n,m}\}_m$ 为固定 m 关于 n 和固定 n 关于 m 的序列. 若空间 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于点 x, 记 $[x_n]=\{x\}\cup\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$. 对于空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$ 及函数 $f:X\to Y$, 分别记 $\mathscr{P}$ 的闭包

$$\mathrm{cl}(\mathscr{P})=\overline{\mathscr{P}}=\{\overline{P}:P\in\mathscr{P}\}$$

及 $\mathscr{P}$ 在 f 下的像 $f(\mathscr{P})=\{f(P):P\in\mathscr{P}\}$. 对于积空间 $\prod_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$ 及 $\beta\in\Lambda$, 以 $\pi_\beta:\prod_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha\to X_\beta$ 表示 $\prod_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$ 到第 β 个坐标 (或因子空间) 上的投影映射. $p_\beta:\prod_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha\to X_\beta$ 也是投影映射的常用符号.

符号 "□" 表示命题或例题论证结束.

回忆一些重要的距离函数、映射类及覆盖族.

定义 1.1.1[24] 对于集合 X, 设 $d:X\times X\to[0,\infty)$. 置

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{diam}A=\sup\{d(x,y):x,y\in A\}, \quad \forall A\subset X;\\
&d(A,C)=\inf\{d(x,y):x\in A,y\in C\}, \quad \forall A,C\subset X;\\
&B(x,\varepsilon)=\{y\in X:d(x,y)<\varepsilon\}, \quad \forall x\in X, \quad \varepsilon>0;\\
&B_n(x)=B(x,1/n), \quad \forall x\in X, \quad n\in\mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

考虑下述条件: 对于 $x, y, z \in X$,

(1) $d(x,y) = 0$ 当且仅当 $x = y$.

(2) $d(x,y) = d(y,x)$.

(3) $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$.

满足条件 (1) ~ (3) 的函数 d 称为 X 上的**距离**, 满足条件 (1) 和 (2) 的函数 d 称为 X 上的**对称距离**. 空间 (X,d) 称为**度量空间**, 若 X 是以 $\{B(x,\varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0\}$ 为基生成的拓扑空间. 空间 (X,d) 称为**对称空间**①,若 X 的子集 U 是 X 的开子集当且仅当对于每一 $x \in U$, 存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B(x,\varepsilon) \subset U$. 空间 (X,d) 称为**半度量空间**[491], 若 (X,d) 是对称空间且对于每一 $x \in X$ 和 $\varepsilon > 0$ 有 $x \in B(x,\varepsilon)^\circ$. 这拓扑也称为由 d 生成的拓扑. 若空间 X 的拓扑可由距离 (或对称距离) d 生成, 那么 d 称为 X 上的**度量** (或**对称**), X 称为**可度量空间** (或**可对称空间**)②. 当说到拓扑空间 X 上的度量, 半度量或对称时, 若未特别说明均认为这度量, 半度量或对称生成 X 上的拓扑.

设 X 是度量空间, X 称为**正规度量空间**[379], 若 X 的非孤立点集是 X 的紧子集. 正规度量空间最初的定义是 "存在 X 上的度量 d 使得对于 X 中互不相交的闭子集对 A, B 有 $d(A,B) > 0$". 这与 "X 的非孤立点集是 X 的紧子集" 是等价的[379].

定义 1.1.2[109] 设映射 $f : X \to Y$.

(1) f 称为**有限到一映射**, 若每一 $f^{-1}(y)$ 是 X 的有限子集.

(2) f 称为**紧映射** (或 ***s* 映射**, ***Lindelöf* 映射**), 若每一 $f^{-1}(y)$ 是 X 的紧子集 (或可分子集, Lindelöf 子集).

(3) f 称为**边缘紧映射** (或**边缘 *Lindelöf* 映射**), 若每一 $\partial f^{-1}(y)$ 是 X 的紧子集 (或 Lindelöf 子集).

(4) f 称为**商映射**, 若 $f^{-1}(U)$ 是 X 的开子集, 则 U 是 Y 的开子集.

(5) f 称为**伪开映射**[21], 若 V 是 X 的开子集且 $f^{-1}(y) \subset V$, 则 $f(V)$ 是 y 在 Y 中的邻域.

(6) f 称为**几乎开映射**[20], 若对于 $y \in Y$, 存在 $x \in f^{-1}(y)$ 使得如果 U 是 x 在 X 中的邻域, 则 $f(U)$ 是 y 在 Y 中的邻域.

(7) f 称为**开映射**, 若 V 是 X 的开子集, 则 $f(V)$ 是 Y 的开子集.

(8) f 称为**闭映射**, 若 F 是 X 的闭子集, 则 $f(F)$ 是 Y 的闭子集.

(9) f 称为**完备映射**, 若 f 是闭且紧的映射.

---

① 为了体现距离, symmetric space 也常译为**对称度量空间**.

② 对于句中附加括号, 除按括号的基本含意外, 本书约定: 若括号内第一字为 "或" 表示括号中的内容可与括号前的相应内容替换, 若第一字不是 "或" 表示括号中的内容是对括号前后内容的说明或补充, 可省略或紧接括号前后的内容.

上述定义中的一些映射的基本关系见图 1.1.1.

$$
\begin{tikzcd}
 & & \text{开映射} \arrow[r] & \text{几乎开映射} \arrow[d] & \\
\text{有限到一闭映射} \arrow[r] & \text{完备映射} \arrow[r] & \text{闭映射} \arrow[r] & \text{伪开映射} \arrow[r] & \text{商映射}
\end{tikzcd}
$$

图 1.1.1　商映射类

定义 1.1.3　设映射 $f: X \to Y$.

(1) f 称为*紧覆盖映射*[354], 若 Y 的任一紧子集是 X 中某紧子集在 f 下的像.

(2) f 称为*序列商映射*[60], 若 $\{y_n\}$ 是 Y 中的收敛序列, 那么存在 $\{y_n\}$ 的子序列 $\{y_{n_i}\}$ 和 X 中的收敛序列 $\{x_i\}$ 使得每一 $x_i \in f^{-1}(y_{n_i})$.

(3) f 称为*序列覆盖映射*[432], 若 $\{y_n\}$ 是 Y 中的收敛序列, 那么存在 X 中的收敛序列 $\{x_n\}$ 使得每一 $x_n \in f^{-1}(y_n)$.

(4) f 称为*伪序列覆盖映射*[164, 185], 若 Y 中的任一 (含极限点的) 收敛序列是 X 中某紧子集在 f 下的像.

(5) f 称为*子序列覆盖映射*[299], 若 $\{y_n\}$ 是 Y 中含极限点的收敛序列, 那么存在 X 中的紧子集 K 使得 $f(K)$ 是 $\{y_n\}$ 的子序列.

(6) f 称为 *1序列覆盖映射*[271], 若对于 $y \in Y$, 存在 $x \in f^{-1}(y)$ 满足: 如果 Y 中的序列 $\{y_n\}$ 收敛于 y, 那么存在 X 中收敛于点 x 的序列 $\{x_n\}$ 使得每一 $x_n \in f^{-1}(y_n)$.

(7) f 称为 *2序列覆盖映射*[271], 若对于 $y \in Y$ 及任意的 $x \in f^{-1}(y)$ 满足: 如果 Y 中的序列 $\{y_n\}$ 收敛于 y, 那么存在 X 中收敛于点 x 的序列 $\{x_n\}$ 使得每一 $x_n \in f^{-1}(y_n)$.

1971 年 Siwiec[432] 称定义 1.1.3 (3) 的映射为序列覆盖映射, 1984 年 Gruenhage, Michael 和 Tanaka[164] 也称定义 1.1.3 (4) 的映射为序列覆盖映射, 为不引起混淆, 本书采用 Ikeda, Liu 和 Tanaka[185] 的术语称定义 1.1.3 (4) 的映射为伪序列覆盖映射. 高国士[127] 称序列商映射为*弱序列覆盖映射*①.

序列覆盖映射类的基本关系见图 1.1.2.

$$
\begin{tikzcd}
\text{2 序列覆盖映射} \arrow[r] & \text{1 序列覆盖映射} \arrow[r] & \text{序列覆盖映射} \arrow[r] \arrow[d] & \text{序列商映射} \arrow[d] \\
\text{完备映射} \arrow[r] & \text{紧覆盖映射} \arrow[r] & \text{伪序列覆盖映射} \arrow[r] & \text{子序列覆盖映射}
\end{tikzcd}
$$

图 1.1.2　序列覆盖映射类

① 自紧覆盖映射与序列覆盖映射的概念引入后, 覆盖映射类不断壮大, 除图 1.1.2 的序列覆盖映射类外, 还相继引入了本书将要介绍的可数紧覆盖映射[362], 半商映射[485], 半伪开映射[295], wc 映射[295], wk 映射[295], scc 映射[310], 1-scc 映射[310], subproper 映射[49] 和 cs 映射[401] 等, 此外还有本书没有介绍的诱导完备映射[360], 集序列覆盖映射[511], 1 序列商映射[167] 和有限子序列覆盖映射[321] 等.

定义 1.1.4　设 X 是一个空间, $P \subset X$.

(1) 若 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x, 称 $\{x_n\}$ 是**终于** P 的 (简称 $\{x_n\}$ 终于 P), 如果存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $\{x\} \cup \{x_n : n \geqslant m\} \subset P$.

(2) P 称为 X 中的点 x 的**序列邻域**[112, 115], 若 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x, 则 $\{x_n\}$ 终于 P.

(3) P 称为 X 的**序列开集**[119], 若 P 是 P 中每一点的序列邻域.

(4) P 称为 X 的**序列闭集**[119], 若 $X \setminus P$ 是 X 的序列开集.

(5) X 称为**序列空间**[119], 若 X 的每一序列开集是 X 的开集.

(6) X 称为**具有可数** *tightness*[373, 357], 若 $x \in \overline{A}$, 则存在 A 的可数子集 C 使得 $x \in \overline{C}$.

(7) X 称为 **k 空间**[125], 若 $A \subset X$ 使得对于 X 的每一紧子集 K 有 $K \cap A$ 是 K 的闭子集, 则 A 是 X 的闭子集.

(8) X 称为 ***Fréchet* 空间**[119], 若 $x \in \overline{A} \subset X$, 则存在 A 中点组成的序列 $\{x_n\}$ 使得在 X 中 $\{x_n\}$ 收敛于 x.

(9) X 称为**强 *Fréchet* 空间**[432], 若 $\{A_n\}$ 是 X 中递减的集列且 $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$, 则存在 $x_n \in A_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ 使得在 X 中序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x.

在文献中, Fréchet 空间也称为 ***Fréchet-Urysohn* 空间**[38, 39]; 强 Fréchet 空间也称为**可数双序列空间** (countably bi-sequential space) 或者**强 *Fréchet-Urysohn* 空间**[357].

显然, 第一可数空间 ⇒ 强 Fréchet 空间 ⇒ Fréchet 空间 ⇒ 序列空间 ⇒ 可数 tightness, k 空间. 这些空间类统称为**弱第一可数空间**. 易证明, 对于空间 X 的子集 P, 若 X 中的每一收敛于 x 的序列存在子序列终于 P, 则 P 是 x 在 X 中的序列邻域.

定义 1.1.5　设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的子集族.

(1) $\mathscr{P}$ 称为 X 的**点有限集族**[16], 若对于每一 $x \in X$, $(\mathscr{P})_x$ 是有限的.

(2) $\mathscr{P}$ 称为 X 的**点可数集族**[369], 若对于每一 $x \in X$, $(\mathscr{P})_x$ 是可数的.

(3) $\mathscr{P}$ 称为 X 的**紧有限集族**[59], 若对于 X 的每一紧子集 K, $(\mathscr{P})_K$ 是有限的.

(4) $\mathscr{P}$ 称为 X 的**紧可数集族**[337, 338], 若对于 X 的每一紧子集 K, $(\mathscr{P})_K$ 是可数的.

(5) $\mathscr{P}$ 称为 X 的**星可数集族**[439], 若对于每一 $P \in \mathscr{P}$, $(\mathscr{P})_P$ 是可数的.

(6) $\mathscr{P}$ 称为 X 的**离散集族**[56], 若对于每一 $x \in X$, 存在 x 在 X 中的开邻域 U 使得 $(\mathscr{P})_U$ 至多只有一个元.

(7) $\mathscr{P}$ 称为 X 的**局部有限集族**[2], 若对于每一 $x \in X$, 存在 x 在 X 中的开邻域 U 使得 $(\mathscr{P})_U$ 是有限的.

(8) $\mathscr{P}$ 称为 X 的**局部可数集族**[75, 111], 若对于每一 $x \in X$, 存在 x 在 X 中的开邻域 U 使得 $(\mathscr{P})_U$ 是可数的.

(9) $\mathscr{P}$ 称为 X 的**闭包保持集族**[351], 若对于每一 $\mathscr{P}' \subset \mathscr{P}$, 有

$$\mathrm{cl}(\cup\mathscr{P}') = \cup\{\overline{P} : P \in \mathscr{P}'\}.$$

(10) $\mathscr{P}$ 称为 X 的**遗传闭包保持集族**[208], 若对于每一 $H(P) \subset P \in \mathscr{P}$, 集族 $\{H(P) : P \in \mathscr{P}\}$ 是闭包保持的.

(11) $\mathscr{P}$ 称为 X 的**点离散集族**[334] 或**弱遗传闭包保持集族**[67], 若对于每一 $p(P) \in P \in \mathscr{P}$, 集族 $\{\{p(P)\} : P \in \mathscr{P}\}$ 是闭包保持的.

设 Φ 是定义 1.1.5 所定义的一种集族性质, 称空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$ 是 σ-Φ 的, 若 $\mathscr{P}$ 是可数个具有性质 Φ 的集族之并.

下面定义两类生成空间拓扑的覆盖.

定义 1.1.6 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的覆盖.

(1) X 称为关于 $\mathscr{P}$ 具有**弱拓扑**[164], 如果对于 $A \subset X, A$ 是 X 的闭子集当且仅当对于每一 $P \in \mathscr{P}, P \cap A$ 是 P 的闭子集.

(2) X 称为被 $\mathscr{P}$ **所控制** (dominated)[374], 如果对于 $\mathscr{P}$ 的任一子集族 $\mathscr{P}', \cup\mathscr{P}'$ 是 X 的闭子集且 $A \subset \cup\mathscr{P}'$ 是闭的当且仅当对于每一 $P \in \mathscr{P}', P \cap A$ 是 P 的闭子集.

(3) X 称为 **k_ω 空间**[355], 如果 X 关于某一由紧子集组成的可数闭覆盖具有弱拓扑.

"弱拓扑" 在文献中有不同的含意. 这里所称的 "控制", 在有些文献中称为 "弱拓扑" "Whitehead 弱拓扑" 或 "Morita 弱拓扑"[471]. 空间 X 关于 $\mathscr{P}$ 具有弱拓扑, Dugundji[96] 称为 "The weak topology in X determined by $\mathscr{P}$"; Gruenhage, Michael 和 Tanaka[164] 称为 "A space X is determined by $\mathscr{P}$"; Tanaka[470] 称为 "A cover $\mathscr{P}$ of a space X is a determining cover". 由于 determined (确定) 一词在中文表达时易混淆, 本书仍使用术语 "弱拓扑". 易验证: 空间 X 是 k 空间当且仅当 X 关于全体紧子集所组成的覆盖具有弱拓扑; 空间 X 是序列空间当且仅当 X 关于全体紧度量子集 (或含极限点的收敛序列) 所组成的覆盖具有弱拓扑. 可数 CW 复形是 k_ω 空间[121]. 空间 X 的遗传闭包保持的闭覆盖是 X 的控制族, 而空间 X 的控制族是 X 的闭包保持的闭覆盖.

定义 1.1.7 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的覆盖.

(1) $\mathscr{P}$ 称为 X 的**网**[17], 若 X 中的每一开子集是 $\mathscr{P}$ 的某子集族的并①.

① 定义 1.1.7 介绍的网 (network) 与引理 2.2.14 中使用的网 (net) 不同, 后者是拓扑空间中序列概念的推广.