

立體幾何輔助綫引法300例

魏鑫來

山西教育出版社

如何布設立體幾何的輔助綫
與輔助面



立体几何辅助线引法300例

魏鑫来 编著

山西教育出版社

〔晋〕新登字3号

责任编辑 王玉成

封面设计 朱 珠

立体几何辅助线引法300例

魏鑫来 编著

*

山西教育出版社出版 (太原并州北路十一号)

山西省新华书店发行 山西人民印刷厂印刷

*

开本: 787×1092 1/32 印张: 10.5 字数: 224千字

1992年7月第1版 1992年7月山西第1次印刷

印数: 1—5 000册

*

ISBN 7-80578-703-4

G·697 定价: 4.00元

前 言

立体几何研究的对象是空间图形。我们将在平面几何知识的基础上来研究空间图形的性质、画法、计算以及它们的应用。立体几何是中学数学的重要内容之一。学习立体几何，却往往比人们预想的要困难的多。这是由于：初学者尚未形成空间图形的概念，即空间想象能力不强；同时也缺乏严密的逻辑推理训练；更重要的是欠缺在证题或计算过程中有关辅助线与辅助面的布设能力。为此，本书将着重对立体几何证题与计算中辅助线、辅助面的布设思路、方法作一些入门的指导。

本书在编写过程中参考了有关书刊和资料，谨向这些作者致以谢意。

由于笔者水平有限，书中定会有不少缺点和错误，欢迎广大读者批评指正。

魏鑫来

1990. 10于太原

目 录

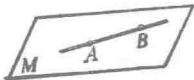
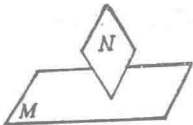
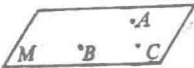
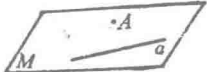
一、预备知识	(1)
(一) 常用立体几何定理的图示与说明一览表	(1)
(二) 空间作图须知	(18)
1. 空间作图三项规定	(18)
2. 空间作图举例	(19)
习题一	(24)
习题一解答与提示	(25)
二、反证法中的辅助线与辅助面的布设	(26)
1. 与公理抵触	(27)
2. 与前此定理不相容	(31)
3. 与本题题设冲突	(38)
4. 自相矛盾	(45)
5. 与已知定义矛盾	(47)
习题二	(51)
习题二解答与提示	(51)
三、常见问题举例, 分析布设思路	(58)
1. 共面问题	(59)
2. 空间二直线所成的角	(71)
3. 求异面直线间的距离	(93)
4. 直线与平面所成的角	(125)

5. 直线与直线, 直线与平面的平行	(138)
6. 直线与直线, 直线与平面的垂直	(145)
7. 二面角及其平面角	(156)
8. 平面与平面的平行	(177)
9. 平面与平面的垂直	(181)
10. 有关截面的问题	(189)
11. 面积与体积	(213)
12. 其他	(233)
习题三	(247)
习题三解答与提示	(250)
四、综合题选讲	(265)
习题四	(305)
习题四解答与提示	(306)
五、错误几例分析	(321)

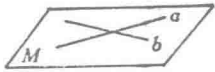
一、预备知识

(一) 常用立体几何定理的 图示与说明一览表

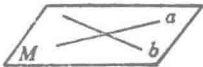
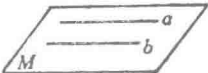
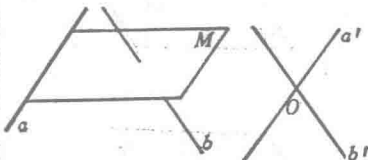
1. 平面

	图 形	基本性质 (公理及推论)
平 面		1. 如果一条直线上的两个点在一个平面内, 那么这条直线上所有的点都在这个平面内。
		2. 如果两个平面有一个公共点, 那么它们相交于经过这点的一条直线。
		3. 平面的确定: ① 过不在一直线上的三点。
		② 过一条直线和这条直线外的一点。

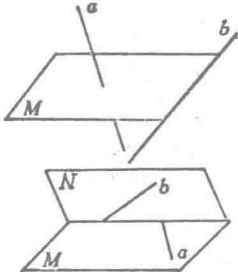
续表

	图 形	基本性质 (公理及推论)
平 面		③过两相交的直线。
		④过两条平行线。

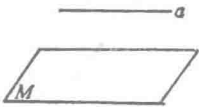
2. 直线与直线:

	关 系	主 要 内 容
两 直 线 的 位 置 关 系	一、共面 1. 相交 	1. 如果两条直线都和第三条直线平行, 那么这两条直线互相平行。 2. 空间的两个角, 如果一个角的两边分别平行于另一个角的两边, 那么这两个角相等 (或互补)。
	2. 平行 	3. 两条异面直线所成的角。 

续表

	关 系	主 要 内 容
两直线的位置关系	二、异面 (空间两条直线,既不平行也不相交) 	a、b是两条异面直线,经过空间任意一点O作直线a'、b'分别平行于a、b、a'和b'相交所成的锐角叫做异面直线a和b所成的锐角(如果在a和b上确定了方向,那么在a'和b'上也取相同的方向)。如果两条异面直线所成的角是直角,我们说这两条异面直线互相垂直。

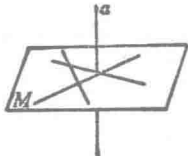
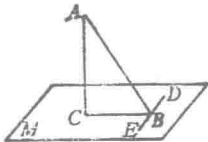
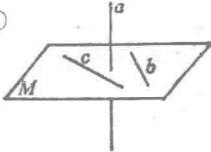
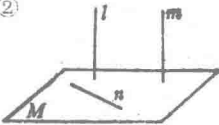
3. 直线与平面:

	关 系	主 要 内 容
直线和平面 的位置关系	一、平行:  (直线和平面没有公共点)	1. 直线和平面平行的判定:  平面外的一条直线,如果和这平面内的一条直线平行,那么这条直线就和这个平面平行。

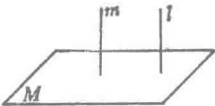
续表

关 系	主 要 内 容
直 线 和 平 面 的 位 置 关 系 二、相交： (直线和平面只有一个公共点)	2. 直线和平面平行的性质： 如果一条直线和一个平面平行，过这条直线的一个平面和这个平面相交，那么这条直线和交线平行。 1. 直线与平面所成的角： 一个平面的斜线与在这个平面内的射影所成的锐角 ($AB \perp$ 平面M时, $\alpha = 90^\circ$; $AB \parallel$ 平面M时, $\alpha = 0^\circ$。) 2. 线段 a 和它的射影 a' 间的关系。 $a' = a \cos \alpha$

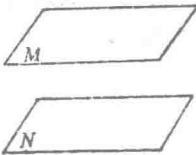
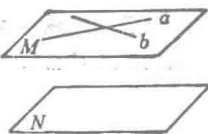
续表

	关 系	主 要 内 容
直 线 与 平 面 的 位 置 关 系	直线与平面垂直  (平面的垂线垂直于平面内的所有直线)	3. 三垂线定理 (逆命题也成立)  平面内的一条直线, 如果和这个平面的一条斜线的射影垂直, 那么它也和这条斜线垂直。 4. 直线与平面垂直的判定: ①  如果一条直线和平面内的两条相交直线都垂直, 那么这条直线和这个平面垂直。 ②  如果两条平行直线中的一条垂直于一个平面, 那么另一条也垂直于这个平面。

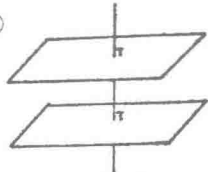
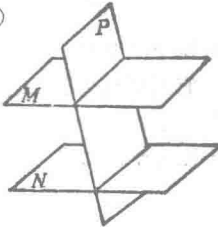
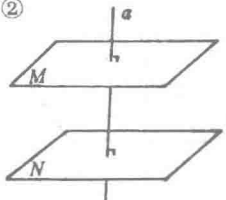
续表

	关 系	主 要 内 容
直线与平面的位置关系	三、直线在平面内, (直线和平面有无数个公共点)	5. 直线与平面垂直的性质:  如果两条直线垂直于同一个平面, 那么这两条直线互相平行。 如果一条直线上的两个点在一个平面内, 那么这条直线上所有点都在这个平面内。

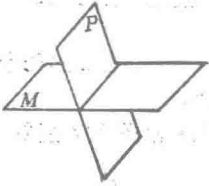
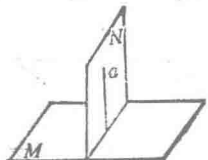
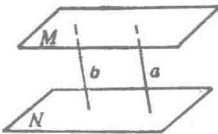
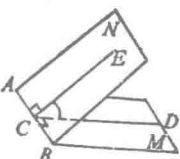
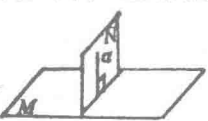
4. 平面与平面

	关 系	主 要 内 容
平面与平面的位置关系	一、平行:  (两个平面没有公共点)	1. 平面和平面平行的判定: ①  如果两条相交直线分别和同一个平面平行, 那么过这两条直线的平面和这个平面平行。

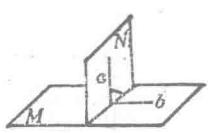
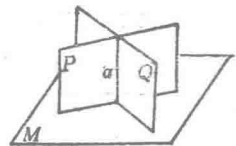
续表

	关 系	主 要 内 容
平面与平面的位置关系		② 
		同垂直于一条直线的两个平面互相平行。 2. 平面和平面平行的性质:
		① 
		两个平行平面和第三个平面相交，那么它们的交线平行。 ②  如果一条直线垂直于两个平行平面中的一个平面，那么也垂直于另一个平面。

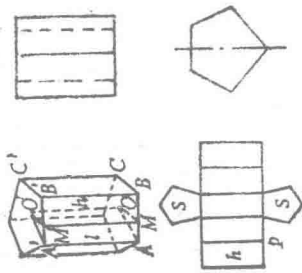
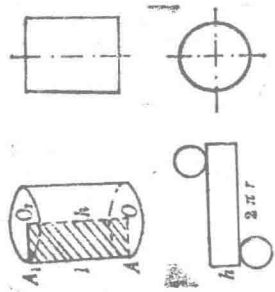
续表

关 系	主 要 内 容
二、相交：  (两个平面有一个公共点它们就相交于过这点的一条直线) 平面与平面垂直  (两平面相交，所成的二面角是直二面角)	③  夹在两个平行平面间的平行线段相等。 1. 二面角和它的平面角：  ①二面角：由一条直线引出的两个半平面所构成的图形。 ②二面角的平面角：从二面角棱上任一点，在两个面内分别作垂直于棱的两条射线所成的角。 ③二面角$M-AB-N$的大小可用它的平面角$\angle DCE$来表示。 2. 平面和平面垂直的判定：  一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面垂直。

续表

	关 系	主 要 内 容
平面与平面的位置关系		3. 平面与平面垂直的性质: 
		两个平面互相垂直, 那么在一个平面内垂直于它们交线的直线, 必垂直于另一平面。  相交两平面都垂直于第三个平面, 那么它们的交线也垂直于第三个平面。

5. 柱

名称	棱柱	圆柱	定义
			矩形绕它的一边（轴）旋转一周得到圆柱。
	有两个面互相平行，其余每相邻两个面的交线互相平行的多面体叫棱柱。（侧棱和底面垂直的棱柱叫直棱柱，底面是正多边形的直棱柱叫正棱柱）		

续表

名称	棱柱	圆柱
性质	1. 两个底面互相平行且全等, 侧棱都相等。 2. 直棱柱的侧面都是矩形, 对角面也是矩形, 侧棱等于直棱柱的高。 3. 正棱柱的底面是正多边形, 侧面是全等的矩形。	1. 圆柱的两个底面平行, 圆柱的轴过两底面的圆心且垂直于两个底面, 圆柱的轴截面是矩形。 2. 等边圆柱的轴截面是正方形。
有关计算	数量关系	轴截面中: $l = h$ (等边圆柱: $l = h = 2r$)
	侧面积	$S_{\text{侧}} = Ch = 2\pi rh$ (C是底面周长)
	全面积	$S_{\text{全}} = 2\pi r(h + r)$
	体积	$V = \pi r^2 h$