

现代物理基础丛书

72

原子核结构

张锡珍 张焕乔 著



科学出版社

现代物理基础丛书 72

原子核结构

张锡珍 张焕乔 著



科学出版社

北京

内 容 简 介

本书首先讲述了原子核的集体模型和壳模型的基本理论. 对于液滴模型, Bohr 哈密顿量及相关内容, 球形和变形势中的单粒子态及其性质, 壳修正和对修正等内容作了深入的物理讨论并对所涉及的数学公式都作了详细推导. 着重讨论了核力的基本特征, 介绍了常用的唯像核力并基于介子交换理论导出了介子交换势. 特别对于原子核的高自旋态近年来的发展, 远离稳定线原子核的结构等领域的近期进展都给出了深入讨论. 本书采用 *skyrme* 有效相互作用在 HF+RPA(及 HFB+QRPA)框架下对原子核基态和激发态给出了自治描述, 特别是对于张量力的效应作了深入讨论.

本书适合核物理专业高年级学生和研究生学习原子核结构使用, 也可作为从事核物理领域的研究人员和教师的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

原子核结构/张锡珍, 张焕乔著. —北京: 科学出版社, 2015.9

(现代物理基础丛书; 72)

ISBN 978-7-03-045918-3

I. ①原… II. ①张… ②张… III. ①核结构—研究 IV. ①O571.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015) 第 238455 号

责任编辑: 钱 俊 刘信力 / 责任校对: 彭 涛

责任印制: 徐晓晨 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京京华虎彩印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015 年 10 月第 一 版 开本: 720 × 1000 B5

2015 年 10 月第一次印刷 印张: 19

字数: 370 000

定价: 98.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

目 录

第 1 章	引言	1
第 2 章	原子核的集体运动	3
2.1	液滴模型	3
2.2	角动量理论简介	18
2.3	欧拉角和 D 函数	23
2.4	球张量 $T_{\lambda\mu}$ 和 Wigner-Eckart 定理	31
2.5	Bohr 哈密顿量	34
2.6	刚体转动和陀螺	38
2.7	例题	45
第 3 章	原子核的壳模型	55
3.1	原子核的幻数和修正球对称简谐振子势	55
3.1.1	简谐振子势	58
3.1.2	强自旋-轨道耦合势与修正的球形简谐振子势	64
3.1.3	质自旋对称性	67
3.2	原子核基态的性质: 自旋, 宇称, 磁矩和四极矩	68
3.2.1	原子核基态的自旋和宇称	69
3.2.2	原子核基态的磁矩	69
3.2.3	原子核基态的四极矩	71
3.2.4	空穴态与粒子-空穴共轭	75
3.2.5	空穴态的磁矩和四极矩	76
3.3	单粒子态之间的电磁跃迁和 Weisskopf unit	77
3.3.1	螺旋度表象	78
3.3.2	电多极和磁多极跃迁算符的约化矩阵元	79
3.3.3	Weisskopf unit	83
3.4	非闭壳原子核	84
3.5	组态混合壳模型	88
3.6	远离 β 稳定线原子核的性质	91
3.6.1	有限深球形方势阱中的单粒子态	92
3.6.2	弱束缚轨道的特征	96
3.6.3	连续态波函数	102

3.6.4 软电偶极激发模式	104
3.7 例题	106
第 4 章 Nilsson 模型	111
4.1 球形基矢	111
4.2 渐近基	117
4.3 轴对称形变简谐振子势的坐标空间求解	122
4.4 形变势场中 Nilsson 能级的赝自旋对称性	124
4.5 拉伸坐标	125
4.6 壳修正和 Strutinski 方法	131
4.7 例题	134
第 5 章 对相互作用	137
5.1 常数对力与 BCS 近似	137
5.2 奇 A 原子核	143
5.3 等间隔能级常数对力模型	144
5.4 单体算符	145
第 6 章 原子核的集体转动和单粒子运动	148
6.1 粒子-转子模型	148
6.2 将转动带的实验数据转换到转动场	158
6.3 两准粒子激发带和回弯	160
6.4 推转壳模型	161
6.5 转动场中 Nilsson 能级	167
6.6 转动场中的准粒子轨道	169
6.7 超形变带	174
6.8 磁转动和手征全同带	177
6.9 例题	179
第 7 章 核力	181
7.1 核子-核子相互作用的一般性质	181
7.2 核力的介子交换理论	185
7.2.1 量子场论的微扰论与核子相互作用势	186
7.2.2 核子间的介子交换势	188
7.3 几种常用的有效相互作用	192
7.4 氘核性质	194
7.4.1 氘核的电四极矩和磁矩	195
7.4.2 张量力算符的矩阵元	197
7.5 例题	199

第 8 章 HF 方法	203
8.1 广义变分原理	203
8.2 HF 方程	204
8.3 坐标空间的 HF 方程	206
8.4 HF 方程与伪态	207
第 9 章 原子核集体振动模式的微观理论	209
9.1 粒子-空穴激发	209
9.2 TDA 方程	211
9.2.1 可分离势的 TDA	215
9.2.2 振动势模型与可分离势	216
9.3 无规相近似	219
9.3.1 可分离势的 RPA	224
9.3.2 角动量耦合表象	225
9.4 Thouless 定理	229
9.5 线性响应函数理论	231
9.6 经典谐振子和	234
9.7 例题	236
第 10 章 Skyrme 相互作用的密度泛函理论	239
10.1 Skyrme 相互作用的 HF 方程	239
10.1.1 能量密度泛函	240
10.1.2 HF 方程	248
10.1.3 闭壳核 HF 方程的数字解	249
10.2 原子核集体激发态的自洽描述	253
10.2.1 Skyrme 势导出的粒子-空穴相互作用	253
10.2.2 HF+ 组态空间的 RPA	257
10.2.3 粒子-空穴矩阵元的计算	257
10.2.4 HF+CRPA	261
10.2.5 Skyrme 势的求和规则	264
10.3 张量力 V_{sky}^t 对于原子核集体激发的影响	267
10.3.1 组态空间的 RPA 计算中加入张量力	267
10.3.2 张量力的特征	270
10.4 例题	272
参考文献	289
索引	290
《现代物理基础丛书》已出版书目	292

第 1 章 引 言

1911 年, 卢瑟福用 α 粒子轰击金属薄膜, 发现有少量的大角度散射事件, 这揭示出原子中存在一个体积很小 (它的半径为原子半径的 $10^{-4} \sim 10^{-5}$) 但却集中了几乎全部原子质量和正电荷的核心, 即原子核. 原子中的电子绕原子核做圆周轨道运动, 此即卢瑟福的原子模型. 按照经典电动力学, 电子沿圆周轨道运动而有加速度, 因而辐射能量, 所以卢瑟福的原子模型是不稳定的, 但实际上原子是稳定的. 历史上这种矛盾在推动量子力学的创立过程中起了重要作用.

1932 年, 实验上证实了中子的存在, 人们随即就提出了原子核是由带正电的质子和不带电的中子 (质子和中子统称为核子) 组成的, 它们被束缚在一个很小的体积内, 并从此开始了对于原子核结构的研究. 因为核子的半径是费米的量级, 而原子核的半径也是费米的量级, 所以核子在原子核中是紧密排列的, 这也是人们最初提出原子核液滴模型的理由, 即假定原子核是一个均匀带电的不可压缩液滴.

表征原子核性质的一个重要物理量是它的质量数 (核子数)

$$A = N + Z$$

式中, N 和 Z 分别为原子核的中子数和质子数. 实验上观测到的原子核的总质量 (或总结合能) 随质量数 A 的变化规律可以用原子核的液滴模型来解释. 原子核液滴模型的另一重大成功是对在 1938 年底实验上发现的原子核的裂变现象给出了成功的理论解释.

尽管原子核的液滴模型在许多方面取得了巨大成功, 但许多实验数据是液滴模型无法解释的. 实验发现, 与原子的性质随原子中电子数目的变化类似, 原子核的性质随中子数和质子数的变化都存在幻数. 这意味着原子核中的一个核子在其他核子提供的平均场中沿着不同的轨道运动. 借助带有很强的自旋轨道耦合项的球形简谐振子势成功地解释了原子核中质子和中子的幻数, 并能解释原子核基态的自旋, 宇称, 以及一些原子核的激发态到基态的电磁跃迁实验数据, 此即原子核的壳模型. G. Mayer 和 J. H. D. Jensen 因在 1949 年创立此模型而获得 1963 年度的诺贝尔物理学奖.

尽管壳模型在许多方面取得了重大成功, 但对于许多较重的原子核, 实验发现从激发态到基态的电磁跃迁强度比壳模型给出的大一个到两个量级以上. A. Bohr 和 B. R. Mottelson 在 20 世纪 50 年代初提出了原子核的集体模型, 他们将实验室系中原子核四极表面振动哈密顿量变换为在本体系中的振动和绕本体系对称轴的

转动以及振动与转动的耦合. 此模型成功地解释了形变原子核的转动谱和实验上观测的很强的电磁跃迁, 为此 A. Bohr 和 B. R. Mottelson 与 L. J. Rainwater 一起分享了 1975 年度的诺贝尔物理学奖.

原子核的壳模型和集体模型有极为不同的物理图像, 但它们都有各自的成功之处. 从它们的建立开始人们就试图将这两种模型统一起来 (如 A. Bohr 和 B. R. Mottelson 提出的统一模型), 其核心的观点是原子核的势场变化与原子核的密度变化是一致的, 单粒子运动与集体运动的耦合表现为单粒子自由度与它产生的势场的耦合. 现在原子核的微观理论已经可以基于核子之间的有效相互作用 (如 Skyrme 相互作用) 对原子核的基态、单粒子激发和原子核的集体激发, 特别是原子核的集体振动激发给以自洽的统一微观描述, 而对于原子核的集体转动的微观描述则还要借助一些半经典的论证.

近年来, 远离 β 稳定线原子核的性质和超重元素的合成方面的实验研究取得了重要进展, 这为研究原子核在极端条件下的结构提供了可能.

自由中子的质量为 M_n , $M_n c^2 \sim 939.5731 \text{ MeV}$, 自由质子的质量为 M_p , $M_p c^2 \sim 938.2796 \text{ MeV}$, 电子的质量为 m_e , $m_e c^2 \sim 0.5 \text{ MeV}$. 所以自由中子是不稳定的, 它可通过弱相互作用衰变为自由质子和自由电子, 即

$$N \longrightarrow P + e^- + \bar{\nu}_e$$

自由中子的寿命约为 15min. 在原子核中, 中子能否衰变为质子和电子, 除了考虑中子、质子和电子的质量外, 还要考虑中子和质子所处轨道的结合能.

原子核的核子之间有强相互作用, 带电核子之间有电磁相互作用, 中子与质子的相互转化则为弱相互作用. 原子核本身是一个同时存在各种基本相互作用的大实验室.

第2章 原子核的集体运动

2.1 液滴模型

1. 原子核的质量公式

对于给定的中子数和质子数, 原子核的总质量为

$$M(N, Z) = Nm_n + Zm_p + \frac{1}{c^2}B(N, Z) \quad (2.1)$$

式中, $B(N, Z)$ 称为该原子核的总结合能

$$B(N, Z) = a_V A + a_s A^{(2/3)} + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_I I^2 A - \delta(A) \quad (2.2)$$

参数 a_V, a_s, a_c, a_I 可通过符合测量得到的原子核的质量随 A 的变化来确定 (图 2.1). 此结合能公式可以用假定原子核是均匀带电不可压缩的液滴来给予解释. 液滴的半径 $R = r_0 A^{1/3}$, $r_0 = 1.2\text{fm}$.

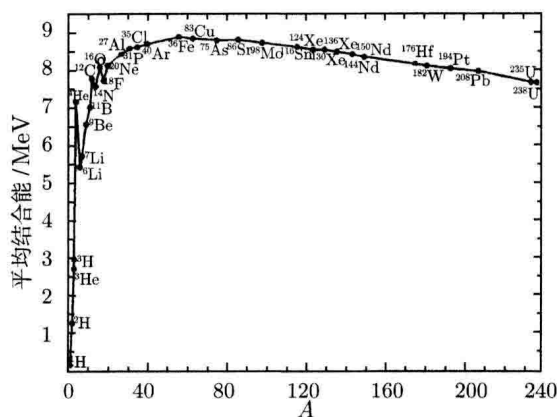


图 2.1 原子核中核子的平均结合能

第一项 $a_V A$ 是体积能 (对于很大的原子核, $A \propto V$), $a_V \approx -15.68\text{MeV}$. 这表明原子核内部的密度 ρ 是常数, 原子核的电子散射实验给出在原子核内部 $\rho \approx 0.17\text{fm}^{-3}$ 且与 A 无关, 而在原子核的边界上密度迅速下降为零 (图 2.2).

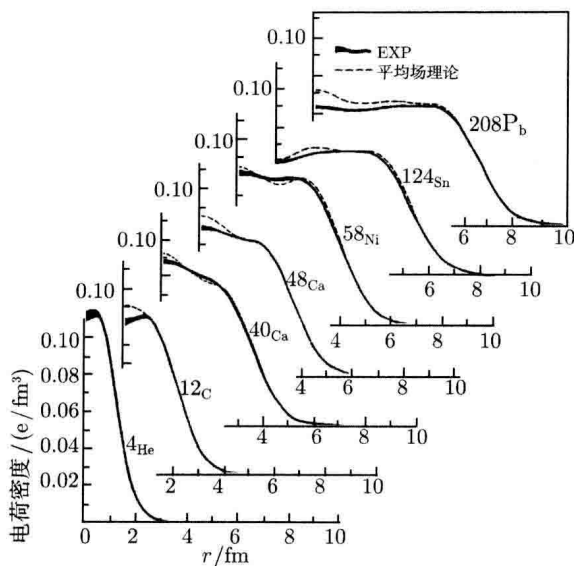


图 2.2 原子核中质子密度分布

第二项 $a_s A^{\frac{2}{3}}$ 是表面能. 对于处在原子核表面的核子, 与处于原子核内部的核子相比动能会增加而位能减小, 所以产生表面张力 (令表面张力系数为 σ_s , 则由 $S = 4\pi R^2 = 4\pi r_0^2 A^{\frac{2}{3}}$ 给出 $4\pi r_0^2 \sigma_s = a_s$).

$$a_s \approx 18.56 \text{ MeV}, \quad \sigma_s \approx \frac{a_s}{4\pi r_0^2} \approx 1.03 \text{ MeV/fm}^2$$

第三项 $a_c Z^2 A^{-\frac{1}{3}}$ 是库仑相互作用能, $a_c \approx 0.71$. 此值也可以假定原子核是半径为 $R_c = r_c A^{\frac{1}{3}}$ 的球形均匀带电液滴, 得到

$$E_c = \frac{1}{2} \int \rho \phi dV = \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{R_c} = \frac{3}{5} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\hbar c}{r_c} \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}}$$

由 $r_c = 1.25$, $\hbar c \approx 197$, $\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$, 得到 $a_c \approx 0.717$ (见例题 2.1).

第四项 $a_I I^2 A$ 是对称能, $a_I \approx 28.1 \text{ MeV}$. 如果将液滴模型推广为中子流体和质子流体的双流模型, 则对称能项与原子核的巨电偶极共振的能量相联系.

第五项 $-\delta(A)$ 是对能 (图 2.3)

$$\delta(A) = \begin{cases} 12 \text{ MeV}/A^{\frac{1}{2}} & (\text{even-even}) \\ 0 & (\text{odd } A) \\ -12 \text{ MeV}/A^{\frac{1}{2}} & (\text{odd-odd}) \end{cases}$$

这表明原子核中同类核子结合成对时原子核的能量最低.

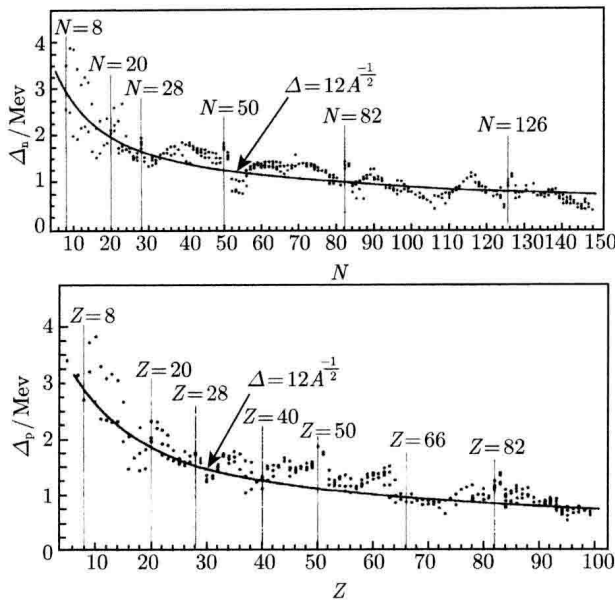


图 2.3 对能

对于原子核的给定质量数 A , 经验的结合能公式可视为 $x = \frac{|N - Z|}{A}$ 的函数, 即

$$B(N, Z) = a_V A + a_s A^{(2/3)} + \frac{1}{4} a_c A^{5/3} (1 - x)^2 + a_I A x^2 - \delta(A)$$

则 $\frac{\partial B}{\partial N}|_{A \text{ fixed}} = 0$ 给出原子核的稳定条件, 即对于给定的 A , $x = \frac{1}{1 + \frac{4a_I}{a_c A^{2/3}}}$ 时原

子核的能量最低. 当 A 很小时 (轻核), x 的值很小, 即 $N \approx Z$ 时原子核稳定. 对于重核, 稳定原子核的中子数总大于质子数, 满足这种条件的原子核在 (N, Z) 平面处于一条线上, 此线称为原子核的 β 稳定线 (图 2.4). 在此图中还给出了原子核中子的分离能和质子的分离能分别等于零的中子滴线 ($\frac{\partial B(N, Z)}{\partial N}|_{Z \text{ fixed}} = 0$) 和质子滴线 ($\frac{\partial B(N, Z)}{\partial Z}|_{N \text{ fixed}} = 0$) 的位置.

历史上用液滴模型成功地解释了原子核的裂变并讨论了原子核的表面振动. 但原子核不是通常意义上的液滴, 因为原子核中的质子和中子都是费米子, 高密度时动能很大, 我们可以用自由费米气体模型来近似描述原子核的性质. 假定自由核子限制在体积为 $V = L^3$ 的方盒子中, 有

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}} \chi_{ms} \xi_{mt}$$

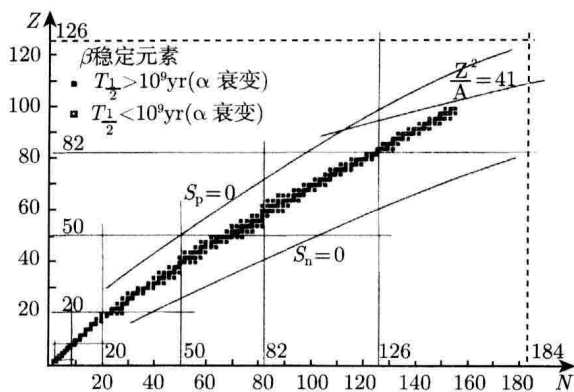


图 2.4 稳定线

则周期性边界条件

$$\psi(x, y, z) = \psi(x + L, y, z) = \psi(x, y + L, z) = \psi(x, y, z + L)$$

给出

$$k_x = \frac{2\pi}{L}n_x, \quad k_y = \frac{2\pi}{L}n_y, \quad k_z = \frac{2\pi}{L}n_z$$

式中, $n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

则有

$$dn = 4 \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 V d^3k \quad (\text{因子 } 4 \text{ 来自于自旋和同位旋})$$

$$\rho_n = \frac{N}{V} = 2 \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int d^3k = \frac{(k_f^n)^3}{3\pi^2}$$

由此可以得到

$$k_f^{(n)} = (3\pi^2 \rho_n)^{\frac{1}{3}}$$

$$k_f^{(p)} = (3\pi^2 \rho_p)^{\frac{1}{3}}$$

如果 $N = Z = A/2$, 则

$$k_f = \left(\frac{3\pi^2}{2} \rho \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.3)$$

取 $\rho \approx 0.17$, 则 $k_f \approx 1.36 \text{ fm}^{-1}$.

费米动能

$$\varepsilon_f = \frac{(\hbar k_f)^2}{2M} = \frac{(\hbar c)^2}{2Mc^2} k_f^2 \approx 37 \text{ MeV} \quad (2.4)$$

原子核的总动能

$$E_{\text{kin}} = \frac{3}{5} A \varepsilon_f$$

如果 $N \neq Z$, 则

$$k_f^n = k_f \left(\frac{2N}{A} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$k_f^p = k_f \left(\frac{2Z}{A} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\varepsilon_f^n = \varepsilon_f \left(\frac{2N}{A} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\varepsilon_f^p = \varepsilon_f \left(\frac{2Z}{A} \right)^{\frac{2}{3}}$$

可得原子核的总动能

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \frac{3}{5} (N \varepsilon_f^n + Z \varepsilon_f^p) = \frac{3}{10} A \varepsilon_f \left[\left(\frac{2N}{A} \right)^{\frac{5}{3}} + \left(\frac{2Z}{A} \right)^{\frac{5}{3}} \right] \\ &= \frac{3}{10} A \varepsilon_f [(1+I)^{\frac{5}{3}} + (1-I)^{\frac{5}{3}}] \approx \frac{3}{5} A \varepsilon_f + \frac{1}{3} A \varepsilon_f I^2 \end{aligned}$$

因为 $\frac{\varepsilon_f}{3} \approx 12\text{MeV}$, 即动能项只贡献对称能系数的一半, 对称能系数的另一半必须由相互作用势能给出. 假定原子核中单粒子势有形式 $V = V_0 + \frac{1}{2} t_z \frac{N-Z}{A} V_1$, 中子和质子同位旋的第三分量分别为 $t_z = \pm \frac{1}{2}$. 因为我们考虑的是二体相互作用势, 原子核的总势能是单粒子势能总和的一半, 所以势能项对于对称能系数的贡献为 $\frac{1}{8} V_1 I^2$, 取 $V_1 = 100\text{MeV}$, 则此项对于单核子对称能的贡献约为 12.5MeV . 核物质的对称能如何随密度变化在天体物理中有重要意义, 它是当前核物理的前沿研究课题之一.

实验表明原子核内部密度是常数, 这表明原子核中核子之间的相互作用具有饱和性, 即核子之间相互作用的力程比原子核的尺寸小许多, 一个核子只与它相邻的核子发生相互作用且彼此相互吸引, 导致原子核的结合能正比于 ρ . 当密度很大时, 费米动能正比于 $\rho^{\frac{2}{3}}$, 它不足以平衡正比于 ρ 的吸引势能. 由此可知两核子相离很近时, 它们之间还必须有很强的排斥力. 所以核力的定性特征必须是短程力, 且远程吸引而近程有排斥心.

在原子核的结合能公式中, 第一项正比于体积, 不依赖于原子核的形变. 因液滴的表面积球形时最小, 而库仑能则球形时最大, 所以随着原子核的变形将出现第

二、第三项的竞争. 对于偏离球形的小变形, 将出现围绕球形的表面振荡. 对于大形变的情况, 随着形变参数的变化将会出现一个势垒, 一旦激发能高于势垒 (如用中子轰击原子核), 液滴可分为两块, 即原子核发生裂变.

2. 原子核的表面能、库仑能和质量参数随原子核形变的变化

原子核表面形状可由函数

$$\begin{aligned} R(\theta, \phi) &= R_0 \left[1 + \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu}^* Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \right] \\ &= R_0 \left[1 + \alpha_0 Y_{00} + \sum_{\mu} \alpha_{1\mu}^* Y_{1\mu} + \sum_{\lambda \geq 2, \mu} \alpha_{\lambda\mu}^* Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \right] \end{aligned}$$

描述, 因为 α_0 可以包括在体积守恒的条件内, $\alpha_{1\mu}$ 由质心条件 $\int_V \vec{r} dV = 0$ 可以除去, 所以

$$R(\theta, \phi) = R_0 \left[1 + \sum_{\lambda \geq 2, \mu} \alpha_{\lambda\mu}^* Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \right] \quad (2.5)$$

液滴的体积守恒给出

$$\begin{aligned} \int d\Omega \int_0^{R(\theta, \phi)} r^2 dr &= \frac{1}{3} \int d\Omega R^3(\theta, \phi) \\ &\approx \frac{4\pi}{3} R_0^3 + R_0^3 \sum_{\lambda \geq 2, \mu} |\alpha_{\lambda\mu}|^2 = \frac{4\pi}{3} R_0^3 \left(1 + \frac{3}{4\pi} \sum_{\lambda \geq 2, \mu} |\alpha_{\lambda\mu}|^2 \right) \\ &= \frac{4\pi}{3} (R_0^0)^3 \end{aligned}$$

所以

$$R_0 = R_0^0 \left(1 - \frac{1}{4\pi} \sum_{\lambda \geq 2, \mu} |\alpha_{\lambda\mu}|^2 \right) \quad (2.6)$$

1) 表面能的计算

封闭曲面面积公式

$$S = \int d\Omega R^2 [1 + (\vec{\nabla} R)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (2.7)$$

精确到 δR 的二阶时

$$S = \int d\Omega \left[R^2 + \frac{1}{2} R_0^2 (\vec{\nabla} R)^2 \right]$$

$$= \int d\Omega \left[R_0^2 + (\delta R)^2 + 2R_0\delta R - \frac{1}{2}R_0^2\delta R(\vec{\nabla})^2\delta R \right]$$

借助公式

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r) - \frac{\vec{L}^2}{r^2}$$

则有

$$(\vec{\nabla})^2 R = -R_0^{-1} \sum_{\lambda \geq 2, \mu} \lambda(\lambda+1) \alpha_{\lambda\mu}^* Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi)$$

所以

$$\begin{aligned} S &= 4\pi R_0^2 \sum_{\lambda \geq 2, \mu} \left\{ 1 + \left[1 + \frac{1}{2} \lambda(\lambda+1) \right] \right\} \frac{1}{4\pi} |\alpha_{\lambda\mu}|^2 \\ &= 4\pi (\overset{0}{R}_0)^2 \left(1 - 2 \frac{1}{4\pi} \sum_{\lambda \geq 2, \mu} |\alpha_{\lambda\mu}|^2 \right) \sum_{\lambda \geq 2, \mu} \left\{ 1 + \left[1 + \frac{1}{2} \lambda(\lambda+1) \right] \right\} |\alpha_{\lambda\mu}|^2 \\ &= 4\pi (\overset{0}{R}_0)^2 + (\overset{0}{R}_0)^2 \sum_{\lambda \geq 2, \mu} \left[-1 + \frac{1}{2} \lambda(\lambda+1) \right] |\alpha_{\lambda\mu}|^2 \\ &= 4\pi (\overset{0}{R}_0)^2 + \frac{1}{2} (\overset{0}{R}_0)^2 \sum_{\lambda \geq 2, \mu} (\lambda-1)(\lambda+2) |\alpha_{\lambda\mu}|^2 \end{aligned}$$

与球形相比, 表面积的增加量为

$$\delta S = \frac{1}{2} (\overset{0}{R}_0)^2 \sum_{\lambda \geq 2, \mu} (\lambda-1)(\lambda+2) |\alpha_{\lambda\mu}|^2$$

由此可以得到原子核的表面能

$$V = \sigma_s \Delta S = \frac{1}{2} \sum_{\lambda \geq 2, \mu} C_\lambda |\alpha_{\lambda\mu}|^2 \quad (2.8)$$

$$C_\lambda = \sigma_s (\overset{0}{R}_0)^2 (\lambda-1)(\lambda+2) \quad (2.9)$$

对于轴对称原子核, 有

$$R(\theta) = R_0 \left(1 + \sum_{\lambda \geq 2} \alpha_\lambda Y_{\lambda 0}(\theta) \right)$$

2) 库仑能的计算

$$E_c = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) d\vec{r} \quad (2.10)$$

式中, $\Phi(r, \theta, \phi)$ 是静电势, 它满足泊松方程

$$\vec{\nabla}^2 \Phi = -4\pi\rho$$

它的解为

$$\Phi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'$$

对于均匀带电不可压缩液滴

$$\rho(r, \theta, \phi) = \rho_0 F(r - R(\theta, \phi))$$

密度 ρ_0 是与原子核的形变无关的常数,

$$F(x) = \begin{cases} 1 & (x < 0) \\ 0 & (x > 0) \end{cases}$$

是阶梯函数.

令 $\rho(r, \theta, \phi) = \rho_{\text{sph}}(r) + \delta\rho(\vec{r})$, 其中

$$\rho_{\text{sph}}(r) = \rho_0 F(r - R_0)$$

精确到 $\alpha_{\lambda\mu}$ 的二阶小量

$$\delta\rho(\vec{r}) = \rho_0(R - R_0)\delta(r - R_0) - \frac{1}{2}\rho_0(R - R_0)^2\delta'(r - R_0)$$

由叠加原理可知

$$\Phi = \Phi_{\text{sph}} + \delta\Phi$$

由例题 2.1 可以得到

$$\Phi_{\text{sph}} = \begin{cases} -\frac{4\pi\rho_0}{3} \frac{r^2}{2} + \frac{3}{2} \frac{4\pi\rho_0 R_0^2}{3} & (r < R_0) \\ \frac{4\pi R_0^3 \rho_0}{3r} & (r > R_0) \end{cases}$$

精确到 $\alpha_{\lambda\mu}$ 的一阶小量

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= \int \frac{\delta\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}' \\ &= \rho_0 \int \frac{R' - R_0 \delta(r' - R_0)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}' \end{aligned}$$

利用公式

$$\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \frac{1}{r_>} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r_<}{r_>} \right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \Theta)$$

$$P_{\ell}(\cos \Theta) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\hat{r}_1) Y_{\ell m}(\hat{r}_2)$$

得到

$$\delta\Phi = \rho_0 \frac{4\pi R_0^2}{3} \sum_{\lambda \geq 2, \mu} \alpha_{\lambda\mu}^* Y_{\lambda\mu} \frac{3}{2\lambda+1} \begin{cases} \frac{r^{\lambda}}{R_0^{\lambda}} & (r < R_0) \\ \frac{R_0^{\lambda+1}}{r^{\lambda+1}} & (r > R_0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) d\vec{r} \\ &= \frac{1}{2} \int \Phi_{\text{sph}}(r) \rho_{\text{sph}}(r) d\vec{r} \\ &\quad + \int \Phi_{\text{sph}}(r) \delta\rho(\vec{r}) d\vec{r} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int \delta\Phi(\vec{r}) \delta\rho(\vec{r}) d\vec{r} \\ &= (1) + (2) + (3) \end{aligned}$$

式中

$$(1) = \frac{1}{2} \int \Phi_{\text{sph}}(r) \rho_{\text{sph}}(r) d\vec{r} = \frac{1}{2} \rho_0 \int \Phi_{\text{sph}}(r) F(r - R_0) r^2 dr d\Omega = \frac{3}{5} \left(\frac{4\pi\rho_0}{3} \right)^2 R_0^5$$

$$(2) = \int \Phi_{\text{sph}}(r) \delta\rho(\vec{r}) d\vec{r} = -\frac{1}{2} \rho_0 \int [\Phi_{\text{sph}}(r) \frac{1}{2} (R - R_0)^2 \delta'(r - R_0)] r^2 dr d\Omega$$

$$= -\frac{1}{2} \rho_0 R_0^2 \sum_{\lambda \geq 2, \mu} |\alpha_{\lambda\mu}|^2 \int \delta'(r - R_0) \Phi_{\text{sph}}(r) r^2 dr$$

$$= \frac{1}{2} \rho_0 R_0^2 \sum_{\lambda \geq 2, \mu} |\alpha_{\lambda\mu}|^2 \int \delta(r - R_0) \frac{d}{dr} (\Phi_{\text{sph}}(r) r^2) dr$$

$$= \frac{1}{2} \rho_0 R_0^2 \sum_{\lambda \geq 2, \mu} |\alpha_{\lambda\mu}|^2 \frac{4\pi\rho_0}{3} R_0^3$$

$$= \left(\frac{4\pi\rho_0}{3} \right)^2 R_0^5 \frac{3}{2} \frac{1}{4\pi} \sum_{\lambda \geq 2, \mu} |\alpha_{\lambda\mu}|^2$$

$$(3) = \frac{1}{2} \int \delta\Phi(\vec{r}) \delta\rho(\vec{r}) d\vec{r}$$

$$= \rho_0 \int \delta\Phi(\vec{r}) (R - R_0) \delta(r - R_0) r^2 dr d\Omega$$