NONLINEAR
PHYSICAL
SCIENCE

36

罗朝俊 著

离散和切换动力系统

Discrete and Switching Dynamical Systems

王跃方 黄 金 李欣业 译

HIGHER EDUCATION PRESS

罗朝俊　著

离散和切换动力系统

Discrete and Switching Dynamical Systems

王跃方　黄　金　李欣业　译

高等教育出版社·北京

Author
Albert C. J. Luo
Department of Mechanical and Industrial Engineering
Southern Illinois University Edwardsville
IL 62026-1805, USA
Email: aluo@siue.edu

图书在版编目（CIP）数据

离散和切换动力系统 / 罗朝俊著；王跃方，黄金，李欣业译．-- 北京：高等教育出版社，2015.10
（非线性物理科学 / 罗朝俊，（瑞典）伊布拉基莫夫，（墨）阿弗莱诺维奇主编）
书名原文：Discrete and Switching Dynamical Systems
ISBN 978-7-04-043231-2

Ⅰ．①离…　Ⅱ．①罗…　②王…　③黄…　④李…　Ⅲ．①离散动力系统　Ⅳ．① O193

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 162887 号

策划编辑　王丽萍　　责任编辑　王丽萍　　封面设计　杨立新　　版式设计　张　杰
责任校对　王　雨　　责任印制　赵义民

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京市白帆印务有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787 mm× 1092 mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	18	版　　次	2015年10月第 1 版
字　　数	300 千字	印　　次	2015年10月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	69.00 元

物 料 号　43231-00

NONLINEAR PHYSICAL SCIENCE

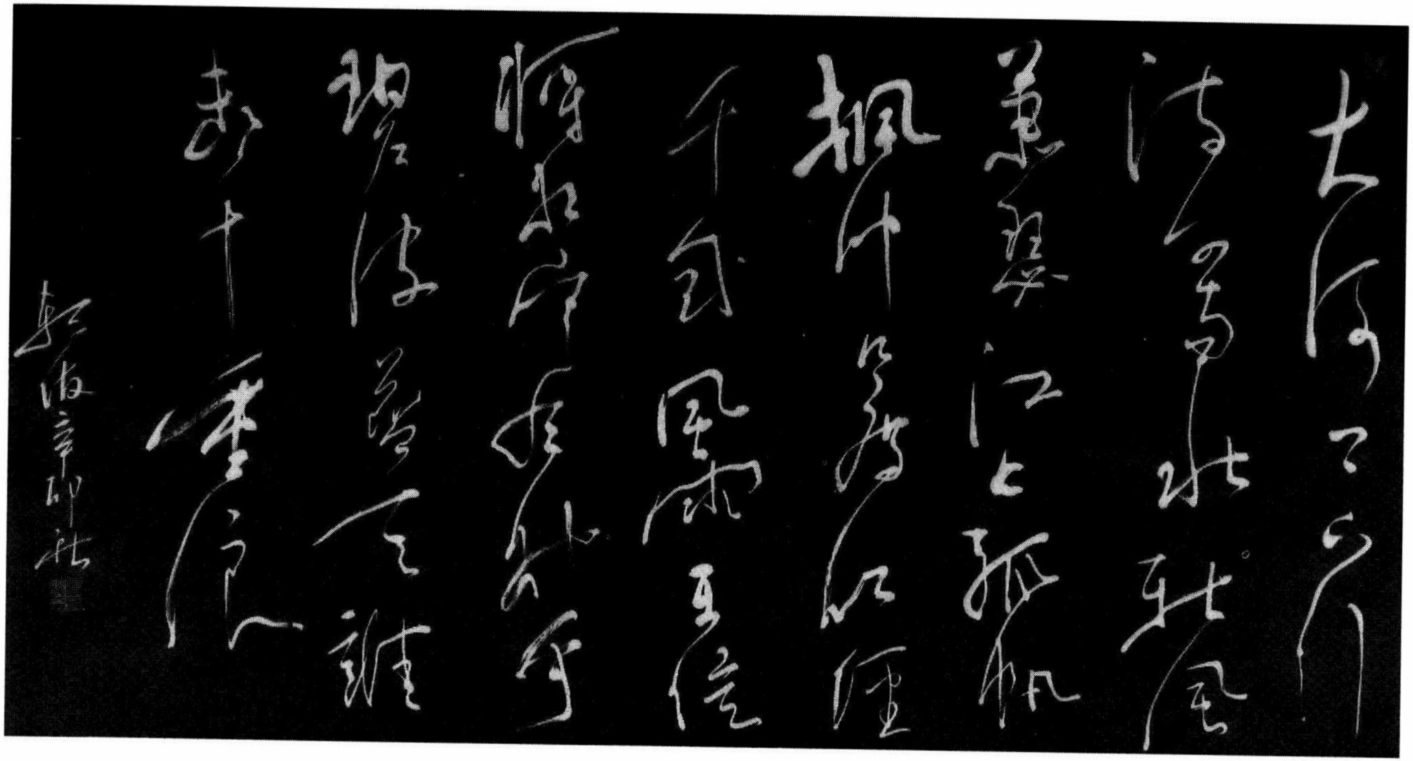
非线性物理科学

NONLINEAR PHYSICAL SCIENCE

Nonlinear Physical Science focuses on recent advances of fundamental theories and principles, analytical and symbolic approaches, as well as computational techniques in nonlinear physical science and nonlinear mathematics with engineering applications.

Topics of interest in *Nonlinear Physical Science* include but are not limited to:

- New findings and discoveries in nonlinear physics and mathematics
- Nonlinearity, complexity and mathematical structures in nonlinear physics
- Nonlinear phenomena and observations in nature and engineering
- Computational methods and theories in complex systems
- Lie group analysis, new theories and principles in mathematical modeling
- Stability, bifurcation, chaos and fractals in physical science and engineering
- Nonlinear chemical and biological physics
- Discontinuity, synchronization and natural complexity in the physical sciences



前言

本书从一个全新的角度讲述离散与切换动力系统. 基于二十年的研究和教学经验, 作者希望本书可以提供对离散和切换系统稳定性、分岔、复杂性和混沌更好的理解. 全书共分五章. 为完整性起见, 连续动力系统的理论在另外一本书中讲述.

作为理解非线性离散系统周期-m 不动点的稳定性和分岔的基础, 第一章全面讨论了线性离散动力系统的稳定性. 在第二章作者从不同的角度介绍了非线性离散系统不动点的稳定性、稳定性切换及分岔. 为理解非线性离散动力系统的复杂性, 第三章首先叙述了由一维离散动力系统倍周期分岔引起的混沌分形. 接下来通过一个在振动台上弹跳小球的例子, 介绍了如何构造离散映射. 最后根据隐式映射, 作者描述了离散动力系统的负动力学和正动力学, 以此作为非线性离散动力系统中阴-阳理论的一个简单版本。第四章讲述了切换系统的非线性动力学, 讨论了线性切换系统, 以便读者更好地理解具有或不具有传输的切换系统的稳定性. 作为符号动力学的延伸, 第五章讲述了不连续动力系统中离散动力系统的映射动力学, 讨论了半主动 MR 悬挂系统以演示映射动力学在不连续和切换系统中的应用, 此外还讨论了擦边现象这一理解不连续动力系统中奇怪吸引子碎裂的关键. 作者相信这样的章节安排可以帮助读者理解离散动力学及其复杂性.

感谢我的学生郭羽、Arun Rajendran 和汪洋提供的数值计算结果. 最后还要感谢我的妻子黄雪梅和孩子罗燕伊、罗若冰和罗宗源的包容、耐心、理解和支持.

罗朝俊
美国伊利诺伊州爱德华兹维尔

目录

第一章　线性离散系统与稳定性 · 1
1.1　基本迭代解 · 1
1.2　具有互异特征值的线性离散系统 · · · · · · · · · · · · 3
1.3　具有重特征值的线性离散系统 · · · · · · · · · · · · · 8
1.4　稳定性与其边界 · · · · · · · · · · · · · · · · · · 17
1.5　低维离散系统 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 30
1.5.1　一维系统 · · · · · · · · · · · · · · · · · · 30
1.5.2　二维系统 · · · · · · · · · · · · · · · · · · 33
1.5.3　三维系统 · · · · · · · · · · · · · · · · · · 46
参考文献 · 60

第二章　稳定性、分岔和通向混沌的道路 · · · · · · · · · · · · 61
2.1　离散动力系统 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 61
2.2　不动点与稳定性 · · · · · · · · · · · · · · · · · · 63
2.3　分岔与稳定性切换 · · · · · · · · · · · · · · · · · 77
2.3.1　稳定性与切换 · · · · · · · · · · · · · · · · 83
2.3.2　分岔 · 107
2.4　通向混沌的道路 · · · · · · · · · · · · · · · · · · 120
2.4.1　一维映射 · · · · · · · · · · · · · · · · · · 120
2.4.2　二维映射 · · · · · · · · · · · · · · · · · · 125
参考文献 · 127

第三章　分形与完整动力学 · · · · · · · · · · · · · · · · · 129
3.1　一维迭代映射中的多重分形 · · · · · · · · · · · · · · 129
3.1.1　倍周期中的相似结构 · · · · · · · · · · · · · · 130

3.1.2 通过倍周期分岔产生的混沌分形 …… 135
3.1.3 算例 …… 136
3.2 弹跳球动力学 …… 142
3.2.1 周期运动 …… 144
3.2.2 稳定性和分岔 …… 146
3.2.3 数值解 …… 153
3.3 离散系统的正、负动力学 …… 157
3.4 Henon 映射的完整动力学 …… 165
参考文献 …… 170

第四章 拥有传输律的切换系统 …… 171
4.1 连续子系统 …… 171
4.2 切换系统 …… 173
4.3 测度函数与稳定性 …… 178
4.4 映射与周期流 …… 196
4.5 线性切换系统 …… 202
4.5.1 分段力引起的振动 …… 206
4.5.2 向量场切换 …… 213
参考文献 …… 219

第五章 映射动力学与碎裂 …… 221
5.1 不连续动力系统 …… 221
5.2 相对于边界的 G 函数 …… 224
5.3 映射动力学 …… 227
5.4 半主动悬挂系统 …… 232
5.4.1 解析动力学 …… 234
5.4.2 算例 …… 240
5.5 擦边奇异集与碎裂 …… 248
5.6 碎裂的奇怪吸引子 …… 260
参考文献 …… 270

索引 …… 271

第一章
线性离散系统与稳定性

本章将叙述线性离散系统的基本迭代解, 分别讨论具有互异和重特征值的情况并从振荡、单调和螺旋式收敛及发散的角度研究线性离散系统的稳定性, 对给定特征向量方向上的不变、跳跃和圆形稳定性临界边界进行分类. 最后, 通过低维线性离散系统说明稳定性及其切换.

1.1　基本迭代解

在系统地讨论迭代解与稳定性之前, 首先介绍离散动力系统的基本概念.

定义 1.1　考虑一个由线性映射 $P : \mathbf{x}_k \to \mathbf{x}_{k+1}$ 定义的离散动力系统, 对应的关系式为

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \mathbf{x}_k = (x_{1k}, x_{2k}, \cdots, x_{nk})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

其中 $\mathbf{A}$ 为 $n \times n$ 矩阵, $\mathbf{B}$ 是常数向量函数. 若 $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, 那么称式 (1.1) 中的线性离散系统是齐次的. 此时式 (1.1) 可写作

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n. \tag{1.2}$$

若 $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$, 那么称式 (1.1) 中的线性离散动力系统是非齐次的.

考虑映射 $P^{(j)} : \mathbf{x}_k \to \mathbf{x}_{k+j}$, 其中 $P^{(j)} = P \circ P^{(j-1)}$ 且 $P^{(0)} = \mathbf{I}$. 根据式 (1.2), $P^{(j)}$ 的最终状态 $\mathbf{x}_{k+j}$ 可由下式给出

$$\mathbf{x}_{k+j} = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k+j-1} = \cdots = \mathbf{A}^j\mathbf{x}_k. \tag{1.3}$$

对式 (1.1), 映射 $P^{(j)}$ 的最终状态 $\mathbf{x}_{k+j}$ 为

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+j} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_{k+j-1} + \mathbf{B} \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{x}_{k+j-2} + \mathbf{B}) + \mathbf{B} \\ &= \mathbf{A}^j\mathbf{x}_k + \sum\nolimits_{m=0}^{j-1} \mathbf{A}^m\mathbf{B}.\end{aligned} \tag{1.4}$$

若 $\det(\mathbf{I}-\mathbf{A}) \neq 0$, 有

$$\sum\nolimits_{m=0}^{j-1} \mathbf{A}^m(\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \mathbf{I}-\mathbf{A}^j \Rightarrow \sum\nolimits_{m=0}^{j-1} \mathbf{A}^m = (\mathbf{I}-\mathbf{A}^j)(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}. \tag{1.5}$$

因此, $P^{(j)}$ 的最终状态 $\mathbf{x}_{k+j}$ 可以表示为

$$\mathbf{x}_{k+j} = \mathbf{A}^j\mathbf{x}_k + (\mathbf{I}-\mathbf{A}^j)(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}. \tag{1.6}$$

定义 1.2 考虑一个由线性映射 $P: \mathbf{x}_k \to \mathbf{x}_{k+1}$ 定义的线性离散动力系统, 其中 $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}$ (见式 (1.1)). 若 $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k^*$, 则称 $\mathbf{x}_k^*$ 为由下式确定的不动点 (或称周期-1 解)

$$\mathbf{x}_k^* = \mathbf{A}\mathbf{x}_k^* + \mathbf{B}. \tag{1.7}$$

对映射 $P^{(j)}: \mathbf{x}_k \to \mathbf{x}_{k+j}$, 若 $\mathbf{x}_{k+j} = \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k^*$, 则称点 $\mathbf{x}_k^*$ 为由下式确定的周期-j 解

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1}^* &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k^* + \mathbf{B}, \\ \mathbf{x}_{k+2}^* &= \mathbf{A}\mathbf{x}_{k+1}^* + \mathbf{B}, \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_{k+j}^* &= \mathbf{A}\mathbf{x}_{k+j-1}^* + \mathbf{B} = \mathbf{x}_k^*.\end{aligned} \tag{1.8}$$

根据以上定义, 式 (1.7) 中不动点的唯一解为

$$\mathbf{x}_k^* = (\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}, \quad 若 \quad \det(\mathbf{I}-\mathbf{A}) \neq 0. \tag{1.9}$$

定义 $\mathbf{C} = (\mathbf{I}-\mathbf{A}, \mathbf{B})$, 秩 $r(\mathbf{I}-\mathbf{A})$ 和 $r(\mathbf{C})$, 一般性结论可以给出如下.

(i) 若 $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$ 且 $\det(\mathbf{I}-\mathbf{A}) = 0$ 和 $r(\mathbf{I}-\mathbf{A}) = r(\mathbf{C}) = n$, 则在式 (1.9) 中的不动点 $\mathbf{x}_k^*$ 是唯一的.

(ii) 若 $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$ 且 $\det(\mathbf{I}-\mathbf{A}) = 0$ 和 $r(\mathbf{I}-\mathbf{A}) = r < r(\mathbf{C})$, 则不动点 $\mathbf{x}_k^*$ 无解.

(iii) 若 $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$ 且 $\det(\mathbf{I}-\mathbf{A}) = 0$ 和 $r(\mathbf{I}-\mathbf{A}) = r(\mathbf{C}) = r < n$, 则不动点 $\mathbf{x}_k^*$ 有无穷多组解.

(iv) 若 $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ 且 $\det(\mathbf{I}-\mathbf{A}) \neq 0$, 则不动点 $\mathbf{x}_k^* = \mathbf{0}$ 是唯一解.

(v) 若 $\mathbf{B}=\mathbf{0}$ 且 $\det(\mathbf{I}-\mathbf{A})=0$ 和 $r(\mathbf{I}-\mathbf{A})=r<n$, 则存在非零不动点 $\mathbf{x}_k^*\neq\mathbf{0}$ 可以用它的 $n-r$ 个线性无关解来表示, 并且此解不是唯一的. 由式 (1.6) 以及 $\mathbf{x}_{k+j}=\mathbf{x}_k=\mathbf{x}_k^*$, 可知

$$\mathbf{x}_k^*=(\mathbf{I}-\mathbf{A}^j)^{-1}\mathbf{B},\quad 若\quad \det(\mathbf{I}-\mathbf{A}^j)\neq 0. \tag{1.10}$$

上述类似的结论可获得.

1.2 具有互异特征值的线性离散系统

本节研究具有互异特征值的线性离散系统的解.

定义 1.3 对式 (1.2) 中的线性离散系统 $\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{A}\mathbf{x}_k$, 若矩阵 $\mathbf{A}=diag[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n]$ 是对角阵, 则称该系统为解耦的线性离散齐次系统. 给定初始状态 $\mathbf{x}_0$ 后, 系统的解是

$$\mathbf{x}_k=diag[\lambda_1^k,\lambda_2^k,\cdots,\lambda_n^k]\mathbf{x}_0. \tag{1.11}$$

定理 1.1 考虑式 (1.2) 中初始状态给定的线性离散系统 $\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{A}\mathbf{x}_k$. 若 $n\times n$ 矩阵 $\mathbf{A}$ 的互异实特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 那么可用下式解出一组特征向量 $\{\mathbf{v}_k^{(1)},\mathbf{v}_k^{(2)},\cdots,\mathbf{v}_k^{(n)}\}$:

$$(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})\mathbf{v}_k^{(i)}=\mathbf{0}. \tag{1.12}$$

它们构成了 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ 中的一组基向量. 特征向量矩阵 $\mathbf{P}=[\mathbf{v}_k^{(1)},\mathbf{v}_k^{(2)},\cdots,\mathbf{v}_k^{(n)}]$ 可逆, 且有

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=diag[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n]. \tag{1.13}$$

因此, 当 $\mathbf{x}_k$ 的初始状态给定后, 式 (1.2) 中的线性离散动力系统的解为

$$\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{P}diag[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n]\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_k=\mathbf{P}\mathbf{E}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_k, \tag{1.14}$$

其中对角阵 $\mathbf{E}$ 为

$$\mathbf{E}=diag[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n]. \tag{1.15}$$

式 (1.2) 中的线性离散动力系统的迭代解为

$$\mathbf{x}_k=\mathbf{P}diag[\lambda_1^k,\lambda_2^k,\cdots,\lambda_n^k]\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_0=\mathbf{P}\mathbf{E}^k\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_0. \tag{1.16}$$

证明 证明参见 Luo (2011). ■

接下来考虑另外一种方法. 假设特征向量

$$\mathbf{v}_k^{(i)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{r}_k^{(i)} \end{bmatrix} \mathbf{v}_i. \tag{1.17}$$

根据式 (1.12), 有

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda_i & \mathbf{b}_{1\times(n-1)} \\ \mathbf{c}_{(n-1)\times 1} & \mathbf{A}_{11}-\lambda_i\mathbf{I}_{(n-1)\times(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{r}_k^{(i)} \end{bmatrix} \mathbf{v}_i = \mathbf{0}, \tag{1.18}$$

其中 $\mathbf{A}_{11}$ 为矩阵 $\mathbf{A}$ 的余子式, 其余各向量的定义为

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{(n-1)\times 1} &= (a_{i1})_{(n-1)\times 1}, \quad i=2,3,\cdots,n, \\ \mathbf{b}_{1\times(n-1)} &= (a_{1j})_{1\times(n-1)}, \quad j=2,3,\cdots,n, \\ \mathbf{A}_{11} &= (a_{ij})_{(n-1)\times(n-1)}, \quad i,j=2,3,\cdots,n. \end{aligned} \tag{1.19}$$

于是

$$\mathbf{r}_k^{(i)} = (\mathbf{A}_{11}-\lambda_i\mathbf{I}_{(n-1)\times(n-1)})^{-1}\mathbf{c}_{(n-1)\times 1}. \tag{1.20}$$

式 (1.2) 中的线性离散动力系统的解为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \sum\nolimits_{i=1}^{n} C_i\lambda_i\mathbf{v}_k^{(i)} = [\mathbf{v}_k^{(1)}, \mathbf{v}_k^{(2)}, \cdots, \mathbf{v}_k^{(n)}]diag[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]\mathbf{C} \\ &= \mathbf{P}diag[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]\mathbf{C}, \end{aligned} \tag{1.21}$$

其中

$$\mathbf{C} = (C_1, C_2, \cdots, C_n)^{\mathrm{T}}. \tag{1.22}$$

若 $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k$, 则 $diag[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n] = \mathbf{I}$. 于是

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_k = \mathbf{C}. \tag{1.23}$$

因此, 解可以表示为

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{P}diag[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_k. \tag{1.24}$$

可见, 两种方法给出了相同的解的表达式.

定理 1.2 考虑式 (1.2) 中初始状态给定的线性离散系统 $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k$. 若 $2n\times 2n$ 矩阵 $\mathbf{A}$ 的互异复特征值为 $\lambda_i = \alpha_i + \mathbf{i}\beta_i$ 和 $\overline{\lambda}_i = \alpha_i - \mathbf{i}\beta_i$ ($i = 1, 2, \cdots, n$ 且 $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$), 特征向量是 $\mathbf{w}_k^{(i)} = \mathbf{u}_k^{(i)} + \mathbf{i}\mathbf{v}_k^{(i)}$ 和 $\overline{\mathbf{w}}_k^{(i)} = \mathbf{u}_k^{(i)} - \mathbf{i}\mathbf{v}_k^{(i)}$, 那么对应的向量 $\mathbf{u}_k^{(i)}$ 和 $\mathbf{v}_k^{(i)}$ ($i = 1, 2, \cdots, n$) 由下式解出

$$(\mathbf{A}-(\alpha_i+\mathbf{i}\beta_i)\mathbf{I})(\mathbf{u}_k^{(i)}+\mathbf{i}\mathbf{v}_k^{(i)}) = \mathbf{0}, \quad \text{或} \quad (\mathbf{A}-(\alpha_i-\mathbf{i}\beta_i)\mathbf{I})(\mathbf{u}_k^{(i)}-\mathbf{i}\mathbf{v}_k^{(i)}) = \mathbf{0}. \tag{1.25}$$

它们构成了 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ 中的一组基向量. 对应的特征向量矩阵 $\mathbf{P} = [\mathbf{u}_k^{(1)}, \mathbf{v}_k^{(1)}, \mathbf{u}_k^{(2)}, \mathbf{v}_k^{(2)}, \cdots, \mathbf{u}_k^{(n)}, \mathbf{v}_k^{(n)}]$ 可逆, 且有

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = diag[\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \cdots, \mathbf{B}_n]. \tag{1.26}$$

其中

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{1.27}$$

因此, 给定 $\mathbf{x}_k$ 的初始状态后, 式 (1.2) 中的线性离散系统的解为

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{P}\mathbf{E}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_k, \tag{1.28}$$

其中对角阵 $\mathbf{E}$ 为

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} = diag[\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \cdots, \mathbf{E}_n], \\ &\mathbf{E}_i = r_i \begin{bmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i \\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \end{aligned} \tag{1.29}$$

其中

$$\begin{aligned} &r_i = \sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}, \quad \theta_i = \arctan\frac{\beta_i}{\alpha_i}, \\ &\alpha_i = r_i\cos\theta_i, \quad \beta_i = r_i\sin\theta_i. \end{aligned}$$

式 (1.2) 中系统的迭代解为

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{P}\mathbf{E}^k\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_0 = \mathbf{P}\mathbf{E}(k)\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_0, \tag{1.30}$$

其中

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}(k) = \mathbf{E}^k = diag[\mathbf{E}_1(k), \mathbf{E}_2(k), \cdots, \mathbf{E}_n(k)], \\ &\mathbf{E}_i(k) = r_i^k \begin{bmatrix} \cos k\theta_i & \sin k\theta_i \\ -\sin k\theta_i & \cos k\theta_i \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{1.31}$$

证明 证明参见 Luo (2011). ■

再考虑另一种方法. 假设共轭复特征向量为

$$\mathbf{u}_k^{(i)} + \mathbf{i}\mathbf{v}_k^{(i)} = C_k^{(i)} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{r}_k^{(i)} \end{bmatrix} \quad 及 \quad \mathbf{u}_k^{(i)} - \mathbf{i}\mathbf{v}_k^{(i)} = \overline{C}_k^{(i)} \begin{bmatrix} 1 \\ \overline{\mathbf{r}}_k^{(i)} \end{bmatrix}, \tag{1.32}$$

设其中共轭的复常数的形式为

$$\begin{aligned} &C_k^{(i)} = \frac{1}{2}(M_k^{(i)} - \mathbf{i}N_k^{(i)}) \quad 及 \quad \overline{C}_k^{(i)} = \frac{1}{2}(M_k^{(i)} + \mathbf{i}N_k^{(i)}). \\ &\mathbf{r}_k^{(i)} = \mathbf{U}_k^{(i)} + \mathbf{i}\mathbf{V}_k^{(i)} \quad 及 \quad \overline{\mathbf{r}}_k^{(i)} = \mathbf{U}_k^{(i)} - \mathbf{i}\mathbf{V}_k^{(i)}. \end{aligned} \tag{1.33}$$

根据式 (1.25), 有

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\alpha_i-\mathbf{i}\beta_i & \mathbf{b}_{1\times(n-1)} \\ \mathbf{c}_{(n-1)\times 1} & \mathbf{A}_{11}-(\alpha_i+\mathbf{i}\beta_i)\mathbf{I}_{(n-1)\times(n-1)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{r}_k^{(i)} \end{bmatrix} C_k^{(i)}=\mathbf{0}, \tag{1.34}$$

于是, 由上式得到

$$\mathbf{c}_{(n-1)\times 1}+((\mathbf{A}_{11}-\alpha_i\mathbf{I})-\mathbf{i}\beta_i\mathbf{I})\mathbf{r}_k^{(i)}=\mathbf{0}, \tag{1.35}$$

$$\mathbf{r}_k^{(i)}=((\mathbf{A}_{11}-\alpha_i\mathbf{I})^2+\beta_i^2\mathbf{I})^{-1}((\mathbf{A}_{11}-\alpha_i\mathbf{I})+\mathbf{i}\beta_i\mathbf{I})\mathbf{c}_{(n-1)\times 1}=\mathbf{U}_k^{(i)}+\mathbf{i}\mathbf{V}_k^{(i)}. \tag{1.36}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_k^{(i)}&=((\mathbf{A}_{11}-\alpha_i\mathbf{I})^2+\beta_i^2\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A}_{11}-\alpha_i\mathbf{I})\mathbf{c}_{(n-1)\times 1}, \\ \mathbf{V}_k^{(i)}&=((\mathbf{A}_{11}-\alpha_i\mathbf{I})^2+\beta_i^2\mathbf{I})^{-1}\beta_i\mathbf{c}_{(n-1)\times 1}. \end{aligned} \tag{1.37}$$

式 (1.2) 中系统的解为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1}&=\sum\nolimits_{i=1}^{n}(C_k^{(i)}(\mathbf{u}_k^{(i)}+\mathbf{i}\mathbf{v}_k^{(i)})(\alpha_i+\mathbf{i}\beta_i)+\overline{C}_k^{(i)}(\mathbf{u}_k^{(i)}-\mathbf{i}\mathbf{v}_k^{(i)})(\alpha_i-\mathbf{i}\beta_i)) \\ &=\sum\nolimits_{i=1}^{n}r_i\left(\begin{bmatrix} M_k^{(i)} \\ M_k^{(i)}\mathbf{U}_k^{(i)}+N_k^{(i)}\mathbf{V}_k^{(i)} \end{bmatrix}\cos\theta_i+\begin{bmatrix} N_k^{(i)} \\ N_k^{(i)}\mathbf{U}_k^{(i)}-M_k^{(i)}\mathbf{V}_k^{(i)} \end{bmatrix}\sin\theta_i\right) \\ &=\sum\nolimits_{i=1}^{n}(\mathbf{u}_k^{(i)},\mathbf{v}_k^{(i)})r_i\begin{bmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i \\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_k^{(i)} \\ N_k^{(i)} \end{bmatrix} \\ &=\mathbf{PEC}, \end{aligned} \tag{1.38}$$

其中

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}=[\mathbf{u}_k^{(1)},\mathbf{v}_k^{(1)},\cdots,\mathbf{u}_k^{(n)},\mathbf{v}_k^{(n)}], \quad \mathbf{E}=diag[\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2,\cdots,\mathbf{E}_n], \\ &\mathbf{C}=(M_k^{(1)},N_k^{(1)},\cdots,M_k^{(n)},N_k^{(n)})^{\mathrm{T}}, \\ &\mathbf{E}_i=r_i\begin{bmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i \\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_k^{(i)}=\begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{U}_k^{(i)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_k^{(i)}=\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{V}_k^{(i)} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{1.39}$$

根据 $\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{x}_k$ 的初始状态, 可知 $\mathbf{E}=\mathbf{I}$. 于是

$$\mathbf{C}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_k. \tag{1.40}$$

因此, 解的表达式为

$$\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{P}diag[\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2,\cdots,\mathbf{E}_n]\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_k=\mathbf{PEP}^{-1}\mathbf{x}_k. \tag{1.41}$$

可见两种方法给出了相同的解的表达式.

定理 1.3 考虑式 (1.2) 中给定初始状态的线性离散系统 $\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{A}\mathbf{x}_k$. 若 $n\times n$ 矩阵 $\mathbf{A}$ 的互异复特征值是 $\lambda_i=\alpha_i+\mathbf{i}\beta_i$ 和 $\overline{\lambda}_i=\alpha_i-\mathbf{i}\beta_i$ ($i=1,2,\cdots,p$ 且 $\mathbf{i}=\sqrt{-1}$), 对应的特征向量是 $\mathbf{w}_k^{(i)}=\mathbf{u}_k^{(i)}+\mathbf{i}\mathbf{v}_k^{(i)}$ 和 $\overline{\mathbf{w}}_k^{(i)}=\mathbf{u}_k^{(i)}-\mathbf{i}\mathbf{v}_k^{(i)}$, 另外还有 $n-2p$ 个互异实特征值 $\lambda_{2p+1},\lambda_{2p+2},\cdots,\lambda_n$, 则可用下式解出复特征值 $(\lambda_i,\overline{\lambda}_i)$ $(i=1,2,\cdots,p)$ 对应的特征向量中的 $\mathbf{u}_k^{(i)}$ 及 $\mathbf{v}_k^{(i)}$

$$(\mathbf{A}-(\alpha_i+\mathbf{i}\beta_i)\mathbf{I})(\mathbf{u}_k^{(i)}+\mathbf{i}\mathbf{v}_k^{(i)})=\mathbf{0},\quad 或\quad (\mathbf{A}-(\alpha_i-\mathbf{i}\beta_i)\mathbf{I})(\mathbf{u}_k^{(i)}-\mathbf{i}\mathbf{v}_k^{(i)})=\mathbf{0}. \tag{1.42}$$

而特征向量 $\{\mathbf{v}_k^{(2p+1)},\mathbf{v}_k^{(2p+2)},\cdots,\mathbf{v}_k^{(n)}\}$ 由下式解出

$$(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})\mathbf{v}_k^{(i)}=\mathbf{0}. \tag{1.43}$$

特征向量矩阵

$$\mathbf{P}=[\mathbf{u}_k^{(1)},\mathbf{v}_k^{(1)},\mathbf{u}_k^{(2)},\mathbf{v}_k^{(2)},\cdots,\mathbf{u}_k^{(p)},\mathbf{v}_k^{(p)},\mathbf{v}_k^{(2p+1)},\mathbf{v}_k^{(2p+2)},\cdots,\mathbf{v}_k^{(n)}] \tag{1.44}$$

构成了 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ 中的一组基, 且

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=diag[\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2,\cdots,\mathbf{E}_p,\lambda_{2p+1},\lambda_{2p+2},\cdots,\lambda_n], \tag{1.45}$$

其中对 $i=1,2,\cdots,n$, 有

$$\mathbf{E}_i=r_i\begin{bmatrix}\cos\theta_i & \sin\theta_i\\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i\end{bmatrix},\quad \alpha_i=r_i\cos\theta_i,\quad \beta_i=r_i\sin\theta_i. \tag{1.46}$$

于是, 当给定 $\mathbf{x}_k$ 的初始状态后, 式 (1.2) 中系统的解为

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1}&=\mathbf{P}diag[\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2,\cdots,\mathbf{E}_p,\lambda_{2p+1},\lambda_{2p+2},\cdots,\lambda_n]\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_k\\ &=\mathbf{P}\mathbf{E}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_k.\end{aligned} \tag{1.47}$$

其迭代形式的解为

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k&=\mathbf{P}diag[\mathbf{E}_1(k),\mathbf{E}_2(k),\cdots,\mathbf{E}_p(k),\lambda_{2p+1}^k,\lambda_{2p+2}^k,\cdots,\lambda_n^k]\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_0\\ &=\mathbf{P}\mathbf{E}(k)\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_0,\end{aligned} \tag{1.48}$$

其中

$$\mathbf{E}_i(k)=r_i^k\begin{bmatrix}\cos k\theta_i & \sin k\theta_i\\ -\sin k\theta_i & \cos k\theta_i\end{bmatrix},\quad i=1,2,\cdots,p. \tag{1.49}$$

证明 证明参见 Luo (2011). ■

1.3 具有重特征值的线性离散系统

本节讨论具有重特征值的线性离散系统的解. 首先研究具有重实特征值的系统, 接下来讨论具有重的复特征值的情况, 最后给出非齐次离散动力系统的解.

定理 1.4 考虑式 (1.2) 中初始状态给定的线性离散系统 $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k$. $n \times n$ 矩阵 $\mathbf{A}$ 的实特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 中有一个 m 重特征值 λ_i. 设广义特征向量 $\{\mathbf{v}_k^{(1)}, \mathbf{v}_k^{(2)}, \cdots, \mathbf{v}_k^{(n)}\}$ 构成了 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 的基. 特征向量矩阵 $\mathbf{P} = [\mathbf{v}_k^{(1)}, \mathbf{v}_k^{(2)}, \cdots, \mathbf{v}_k^{(n)}]$ 可逆. 对重特征值 λ_i, $\mathbf{A}$ 阵可以分解为

$$\mathbf{A} = \mathbf{S} + \mathbf{N}, \tag{1.50}$$

其中

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{P} = diag[\lambda_i]_{n\times n}, \tag{1.51}$$

矩阵 $\mathbf{N} = \mathbf{A} - \mathbf{S}$ 是 $m \leqslant n$ 阶幂零阵 ($\mathbf{N}^m = \mathbf{0}$), 且满足 $\mathbf{S}\mathbf{N} = \mathbf{N}\mathbf{S}$.

$$\begin{gathered}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = diag[\lambda_1, \cdots, \lambda_{i-1}, \mathbf{B}_k^{(i)}|_{m\times m}, \lambda_{i+m}, \cdots, \lambda_n], \\ \mathbf{B}_k^{(i)} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_i \end{bmatrix}_{m\times m}.\end{gathered} \tag{1.52}$$

于是, 对于给定的 $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k$ 的初始状态, 式 (1.2) 中线性离散系统的解为

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{P}(\mathbf{E} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{P})\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_k, \tag{1.53}$$

其中

$$\mathbf{E} = diag[\lambda_1, \cdots, \lambda_{i-1}, \underbrace{\lambda_i, \cdots, \lambda_i}_{m}, \lambda_{i+m}, \cdots, \lambda_n]. \tag{1.54}$$

系统 (1.2) 迭代形式的解为

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{P}(\mathbf{E} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{P})^k\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_0. \tag{1.55}$$

证明 证明参见 Luo (2011). ■