高等学校教材

Linear Algebra

线性代数

姜广峰　崔丽鸿　主编

育出版社

高等学校教材

线性代数

Xianxing Daishu

主编　姜广峰　崔丽鸿

高等教育出版社·北京

内容简介

本书内容兼具传统性和现代性，教学可读性和实践性强。全书共分 8 章，内容包括：矩阵及其运算，行列式，线性方程组解的判定及其求解，*n* 维向量与向量组的线性相关性，线性方程组解的性质和解的结构，矩阵的特征值和相似对角化，二次型，线性空间与线性变换。每章都配备了相应的应用实例和 MATLAB 软件计算方法，各节按难易度配备了阶梯式习题，例题和总习题还融入了最新的考研试题。书中用 * 号标注的内容要求较高，教学时可自行取舍。

本书既可作为我国高等学校理工类和经济管理类各专业线性代数课程的教材或教学参考书，也可作为全国硕士研究生入学统一考试的复习参考书，同时还可供相关科技工作者参考。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 姜广峰，崔丽鸿主编 . -- 北京 : 高等教育出版社，2015. 9

ISBN 978-7-04-043595-5

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①姜… ②崔… Ⅲ. ①线性代数 - 高等学校 - 教材 Ⅳ. ① O151.23

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 169376 号

策划编辑 兰莹莹　责任编辑 杨 帆　封面设计 赵 阳　版式设计 马 云
插图绘制 邓 超　责任校对 刁丽丽　责任印制 朱学忠

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 高教社（天津）印务有限公司
开　　本 787 mm×960 mm 1/16
印　　张 18.5
字　　数 330 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 2015年9月第1版
印　　次 2015年10月第2次印刷
定　　价 30.10 元

物 料 号　43595-00

前言

线性代数在我国高等学校各专业培养计划中是一门重要的公共基础课程，在自然科学、工程技术、社会科学、经济管理等众多领域具有十分广泛的应用，是非常重要的数学工具之一。

本书根据教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会制定的线性代数课程教学基本要求，借鉴国内外线性代数优秀教材，以现代教学理念为依托，融入课程改革新思维和新模式，并结合作者长期教学实践的经验和体会，不断修改编写完成。

本书内容组织特色

为适应现代化教育理念和手段，并结合线性代数具有抽象性和大计算的双重数学特点，在继承传统教材的精华之上，本书力求彰显如下几个方面：

(1) 重视概念的引入背景和实例的可接受性，兼顾严格理论推导和计算方法的严密和统一，凸显矩阵和行列式的工具作用，强调初等变换的功能，注重呈现线性方程组求解与矩阵初等变换和矩阵秩的密切联系，同时精选新颖丰富的典型例题，注重借题释理，以例示法。

(2) 每章增加应用实例及 MATLAB 计算举例和相应练习题，强调融入数学建模思想，呈现数学软件与计算方法的密切结合，突出对学生综合能力和实际应用能力的培养。

(3) 按节配备习题，按章配备总习题，题目的配置与全书各章节内容不仅具有“匹配性”“阶段性”“渐进性”，而且具有“新颖性”“多层次性”和“综合性”。

(4) 本书配套的数字课程网站上有各章的扩展阅读、习题参考答案以及 MATLAB 基本命令及其在线性代数中的应用。扩展阅读简述相关趣味小故事或发展史，或给出某一概念的外延和内涵。注重开启拓展思维大门，开阔学生视野。

本书编写任务分工

本书由姜广峰教授、崔丽鸿教授担任主编，其他主要作者为(按照姓氏汉语拼音排序)：郭玲、郭敏茹、姜冬青、李秋姝。具体分工详情如下：第 1 章由姜广峰执笔，第 2 章和第 3 章由李秋姝执笔，第 4 章由郭敏茹执笔，第 5 章和第 8 章由郭玲执笔，第 6 章和第 7 章由崔丽鸿执笔。每章的 MATLAB 应用及其程序和 MATLAB 网上资源由姜冬青执笔，全书统稿由姜广峰和崔丽鸿完成。

本书适用范围

本书既可作为我国高等学校理工类和经济管理类各专业线性代数课程的教材或教学参考书，也可作为报考全国硕士研究生入学统一考试的参考书，还可供相关科技、工程人员参考。

致谢

在本书的编写出版过程中，得到了北京化工大学教务处、数学系领导的关心与支持，收到了全体线性代数课程组同仁的教学实践反馈。西安电子科技大学刘三阳教授对书稿进行了审阅并提出了宝贵建议，还得到了高等教育出版社数学分社的指导帮助，借此机会致以诚挚的谢意！

限于编者水平，对书中疏漏不妥之处，恳请同仁读者，不吝赐教批评指正！

编者

2015 年 3 月

目 录

第 1 章　矩阵及其运算

在科学研究和工程技术开发工作中，人们经常需要处理一定规模的数据组．把数据组中的数据按某种方式或者顺序排成一个长方形的数表，就形成了一个矩阵．对数据组的研究就转化为对矩阵的研究．因此，掌握矩阵的基本知识及其运算规律对学习与研究科学技术具有重要意义．

本章主要介绍矩阵的概念及其基本运算规律．

1.1　矩阵的概念

本节从具体实例给出矩阵的概念，并介绍几种特殊矩阵．

1.1.1　矩阵的概念

【引例 1.1】　某宿舍甲、乙、丙、丁四位同学每天把早、中、晚三餐的餐费花销记录在一张表中．假设表 1.1 记录了这四位同学在 2013 年 6 月份的第一周的星期一的餐费情况：

表 1.1　星期一餐费花销表　　　　单位:元

	早餐	中餐	晚餐
甲	2	6	8
乙	2	7	7
丙	2	8	6
丁	3	8	9

那么表1.1可以简写为4行3列的数表：

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}2&6&8\\2&7&7\\2&8&6\\3&8&9\end{pmatrix}.$$

例如,其中 $a_{43}=9$ 表示第4个同学(即丁同学)第3顿饭(即晚饭)消费的金额,我们把这种数表叫做**矩阵**.

定义1.1(矩阵)　由 $m\times n$ 个数排成的 m 行 n 列数表

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\tag{1.1}$$

称为一个 m 行 n 列**矩阵**(matrix),简称为 $m\times n$ 矩阵(m-by-n matrix),其中 a_{ij} 为第 i 行(row)第 j 列(column)处的数,而称 i 为 a_{ij} 的**行指标**(row index),j 称为 a_{ij} 的**列指标**(column index).

矩阵通常用大写黑体英文字母如 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$ 或 $\boldsymbol{A}_{m\times n},\boldsymbol{B}_{m\times n},\boldsymbol{C}_{m\times n},\cdots$ 表示,也常表示为 $(a_{ij})_{m\times n}$,或者当行数和列数很清楚时表示为 (a_{ij}).

【注】　按照定义1.1,矩阵是由数组成的,但在实际应用中,矩阵可以是由别的东西组成的表.因此 a_{ij} 也称为第 i 行第 j 列处的元素(element 或 entry).在用计算机处理问题时,经常要考虑零行零列的矩阵,这种矩阵叫做**空矩阵**(empty matrix).另外,如无特殊说明,本书涉及内容只限于实数域上进行讨论.

【例1.1】　矩阵在实际生活和工程应用中的实例很多,例如:

(1)如下矩阵记录了某三款手机在某四个商家的网站上的单位售价(单位:千元),常称为**价格矩阵**:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1.98&5.00&0.88&3.86\\1.96&4.88&0.59&3.66\\2.00&4.98&0.68&3.98\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 中的元素 a_{ij} 表示第 i 款手机在第 j 个商家的网上单位售价.

(2)如下矩阵记录了首都北京在上午和下午两个时段到其他6个城市的高铁信息,常称为**通路矩阵**:

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&2&3&1&2\\2&1&0&3&2&1\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{B}$ 中的元素 b_{ij} 表示的第 i 个时段到第 j 个城市的高铁班次.

(3)对于学生成绩登记表、公司员工业绩表、企业产值统计表、工厂产量统

计表等都可以用矩阵表达,常称这样的矩阵为**统计矩阵**:

(4)对于**线性方程组**(system of linear equations)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.2}$$

若将各个未知量的系数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 和常数项 $b_j(j=1,2,\cdots,m)$ 排成矩阵,并记为

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \tag{1.3}$$

称矩阵$\widetilde{\boldsymbol{A}}$为线性方程组(1.2)的**增广矩阵**(augmented matrix),其中虚竖线是为了使方程组系数与常数项有明显的区分.

由此可见:线性方程组(1.2)的系数和常数项唯一确定了矩阵(1.3),反之有了矩阵(1.3)也就唯一确定了线性方程组(1.2),因此任何一个线性方程组与它的增广矩阵是一一对应关系,与未知量的记号无关,进而对方程组的研究就可以转化为对它的增广矩阵的研究.

在矩阵的概念中,特别需要说明以下几点:

(1)1×1 矩阵(a_{11})经常被看成数 a_{11}.

(2)由零组成的矩阵称为**零矩阵**(zero matrix).零矩阵有很多,例如

$$\boldsymbol{O}_{1\times1} = (0),\boldsymbol{O}_{1\times2} = (0 \quad 0),\boldsymbol{O}_{2\times1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{O}_{3\times4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3)只有 1 行的矩阵$(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)$,即 $1\times n$ 矩阵叫做**行矩阵**(row matrix);只有 1 列的矩阵$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$,即 $m\times1$ 矩阵叫做**列矩阵**(column matrix).

为了避免元素间的混淆,有时将行矩阵元素之间的空格用逗号替代,写作$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

(4)若矩阵的行数 m 与列数 n 相等即 $m=n$,则称 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n **阶方阵**(square matrix),其中,从左上角到右下角(想象中)的直线叫做**主对角线**(main diagonal),主对角线上的元素 $a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$ 叫做 $\boldsymbol{A}$ 的**对角元**(entries on the main diagonal). 我们把 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 记为 $\boldsymbol{A}_n$ 或者 $(a_{ij})_n$. 从右上角到左下角(想象中)的直线叫做副对角线(anti-diagonal 或 counter diagonal).

1.1.2 几种特殊矩阵

本节介绍几种常见的特殊矩阵,这些特殊矩阵在线性代数的许多运算中占有非常重要的地位.

(1)**对角矩阵**

若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有非对角元 $a_{ij}=0(i\neq j)$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为(n 阶)**对角矩阵**(diagonal matrix). 记为

$$\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

(2)**数量矩阵**

若 n 阶对角矩阵 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(a_{11},\ a_{22},\ \cdots\ ,a_{nn})$ 中对角线上元素相等,即 $a_{ii}=k(i=1,2,\cdots,n)$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为**数量矩阵**(scalar matrix).

(3)**单位矩阵**

若 n 阶对角矩阵 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(a_{11},\ a_{22},\ \cdots\ ,a_{nn})$ 中对角线上元素都等于 1,即 $a_{ii}=1$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为(n 阶)**单位矩阵**(identity matrix). 记为

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

(4)**上(下)三角形矩阵**

若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 中 $a_{ij}=0(i>j)$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为**上三角形矩阵**(upper triangular matrix);若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 中 $a_{ij}=0(i<j)$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为**下三角形矩阵**(lower triangular matrix). 例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} 和 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ 分别是 4 阶和 n 阶上三角形矩阵.

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&2&0&0\\3&3&3&0\\4&4&4&4\end{pmatrix}\text{和}\begin{pmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$分别是 4 阶和 n 阶下三角形矩阵.

(5)**行阶梯形矩阵**

具有下列特征的矩阵称为**行阶梯形矩阵**(row echelon form matrix):

① 零行(即元素全为零的行)位于非零行的下方;

② 各非零行的首非零元(即左起第一个不为零的元素)都在其上一行非零首元右边的列中.

例如,

$$\begin{pmatrix}1&2&3&0&-2\\0&-3&2&4&5\\0&0&0&-2&3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&3\\0&0&-1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-2&3&0\\0&2&-1&2\\0&0&3&4\end{pmatrix}$$

都是行阶梯形矩阵.

(6)**简化行阶梯形矩阵**

具有下列特征的矩阵称为**简化行阶梯形矩阵**(reduced row echelon form matrix).

① 是行阶梯形矩阵;

② 各非零行的首非零元都是 1;

③ 每个首非零元所在列的其余元均为 0.

例如:下列矩阵

$$\begin{pmatrix}1&0&-3&0&2\\0&1&2&0&-3\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&-7\\0&0&1&6\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&3\end{pmatrix}$$

都是简化行阶梯形矩阵.

习题 1.1

1. 列举 3 个生活中矩阵的例子.

2. 写出下列方程组的增广矩阵,并指出是否为行阶梯形矩阵.

$$(1)\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ \quad x_2-x_3+x_4=2, \\ \quad x_2-x_3-x_4=3, \\ \quad\quad x_3-x_4=4; \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} 2x_1-3x_2+4x_3-5x_4=0, \\ \quad 4x_2+\ x_3-6x_4=0, \\ \quad\quad 2x_3-2x_4=0; \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} \quad 4x_2+\ x_3-6x_4=0, \\ 2x_1-3x_2+4x_3-5x_4=0, \\ \quad\quad 2x_3-2x_4=0; \end{cases} \qquad (4)\begin{cases} x_1+x_2+\quad x_4+x_5=1, \\ \quad x_2-x_3+x_4-x_5=2, \\ \quad\quad x_4-x_5=3, \\ \quad\quad\quad x_5=4. \end{cases}$$

1.2 矩阵的运算

考虑矩阵的某种运算是很自然的. 为了定义矩阵的运算,首先给出矩阵相等的概念. 行数和列数分别相等的矩阵称为**同型矩阵**(matrix with the same type).

如果两个同型矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 对应位置的元素相等即 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **相等**(equal),记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

【例 1.2】 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} s & t & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & u \\ 2 & v & 3 \end{pmatrix}$,且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$,求 s,t,u,v 的值.

【解】 因为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$,所以必有 $s=1,t=0,u=1,v=4$.

1.2.1 矩阵的加法

如果引例 1.1 中某宿舍同学星期一与星期二的餐费花销分别为

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 2 & 7 & 7 \\ 2 & 8 & 6 \\ 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 7 \\ 3 & 8 & 7 \\ 2 & 9 & 9 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix},$$

那么星期一与星期二总共的餐费花销仍是一个矩阵,其中的元素就是 $\boldsymbol{A}_1$ 与 $\boldsymbol{A}_2$ 这两个矩阵对应位置的元素的和,即

$$\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix} 2+2 & 6+7 & 8+7 \\ 2+3 & 7+8 & 7+7 \\ 2+2 & 8+9 & 6+9 \\ 3+3 & 8+6 & 9+8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 13 & 15 \\ 5 & 15 & 14 \\ 4 & 17 & 15 \\ 6 & 14 & 17 \end{pmatrix}.$$

一般地,我们可以定义如下矩阵的加法.

定义 1.2（**矩阵的加法**（addition of matrix）） 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 是两个矩阵，定义

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n},$$

则称 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和.

例如，

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\0 & -1 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\2 & 3 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 5\\2 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

【注】 只有同型矩阵才能相加，同型矩阵的和与原来矩阵同型.

对矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 我们定义它的**负矩阵**为 $-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})_{m\times n}$，显然有

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}.$$

因此，可以定义 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的差，即**矩阵的减法**（subtraction of matrix）：

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n}\\a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn}\end{pmatrix}.$$

1.2.2 矩阵的数乘

在引例 1.1 中，如果每位同学都在星期一改善伙食，同时都把三餐费用提高到原来的 1.2 倍，那么提高后的餐费花销表仍然可以用矩阵表示，这个矩阵就是 $\boldsymbol{A}_1$ 中每个元素都乘以 1.2，即

$$1.2\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1.2\times2 & 1.2\times6 & 1.2\times8\\1.2\times2 & 1.2\times7 & 1.2\times7\\1.2\times2 & 1.2\times8 & 1.2\times6\\1.2\times3 & 1.2\times8 & 1.2\times9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.4 & 7.2 & 9.6\\2.4 & 8.4 & 8.4\\2.4 & 9.6 & 7.2\\3.6 & 9.6 & 10.8\end{pmatrix},$$

这就引出数与矩阵相乘的概念.

定义 1.3（**矩阵的数乘**） 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 是一个矩阵，k 是一个数，定义

$$k\boldsymbol{A}=k(a_{ij})_{m\times n}=(ka_{ij})_{m\times n},$$

则称 $k\boldsymbol{A}$ 为数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**乘积**，简称**矩阵的数乘**，或**数乘**（scalar multiplication）.

例如，一个 n 阶数量矩阵 $\mathrm{diag}(a,a,\cdots,a)$ 可以写成

$$a\boldsymbol{E}_n=\mathrm{diag}(a,a,\cdots,a).$$

矩阵的加法与数乘统称为矩阵的**线性运算**（linear operation）. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 都是同型矩阵，k,l 是数，容易证明，**线性运算满足下面八条运算规律**：

（1）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

(2)$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$;

(3)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$;

(4)$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$;

(5)$1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$;

(6)$k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$;

(7)$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$;

(8)$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$.

1.2.3　矩阵的乘法

在引例1.1中,如果甲、乙、丙、丁四位同学在第二周和第三周的星期一都考虑提高餐费.与第一周相比,第二周星期一提高的餐费是:早餐都提高到a_1倍,午餐都提高到b_1倍,晚餐都提高到c_1倍,第三周星期一提高的餐费是:早餐都提高到a_2倍,午餐都提高到b_2倍,晚餐都提高到c_2倍,则我们容易得到:

甲同学第二周星期一的餐费为$2a_1+6b_1+8c_1$,第三周星期一的餐费为$2a_2+6b_2+8c_2$,其他三位同学的餐费也可以类似得到,于是这四位同学提高餐费之后的花销记录可以用矩阵表示为

$$\begin{pmatrix}2&6&8\\2&7&7\\2&8&6\\3&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\\c_1&c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a_1+6b_1+8c_1&2a_2+6b_2+8c_2\\2a_1+7b_1+7c_1&2a_2+7b_2+7c_2\\2a_1+8b_1+6c_1&2a_2+8b_2+6c_2\\3a_1+8b_1+9c_1&3a_2+8b_2+9c_2\end{pmatrix}.$$

例如,其中的$3a_2+8b_2+9c_2$表示丁同学在第三周星期一的餐费花销.

由此我们看到:为实际的应用,有必要引入矩阵的乘法定义.

定义1.4(矩阵的乘法)　设$m\times s$矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$和$s\times n$矩阵$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$,定义一个$m\times n$矩阵$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$,其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),$$

则称$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$是矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的乘积(multipLication),记为$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

【注】　只有当矩阵$\boldsymbol{A}$的列数等于$\boldsymbol{B}$的行数时,$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的乘积$\boldsymbol{C}$才有定义,并且乘积矩阵$\boldsymbol{C}$的行数与列数分别等于$\boldsymbol{A}$的行数与$\boldsymbol{B}$的列数.

【例1.3】　设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&1\\9&8&5\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&9\\1&1&0\end{pmatrix}$.求$\boldsymbol{AB}$.

【解】　按定义$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}2&1&1\\9&8&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&9\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&6&9\\22&31&72\end{pmatrix}$.

但是,$\boldsymbol{BA}$ 无定义.

【例 1.4】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=(b_1\quad b_2\quad\cdots\quad b_n)$,求 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$.

【解】 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1\quad b_2\quad\cdots\quad b_n)=\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n\end{pmatrix}$.

$$\boldsymbol{BA}=(b_1\quad b_2\quad\cdots\quad b_n)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=b_1a_1+b_2a_2+\cdots+b_na_n.$$

【例 1.5】 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & -1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$.

【解】 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2\\2 & -2\end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}.$$

从以上几个例题看出:(1)$\boldsymbol{AB}$ 有定义并不意味着 $\boldsymbol{BA}$ 有定义,即使有,两者也未必相等;(2)非零矩阵的乘积可能是零矩阵.

【例 1.6】 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\operatorname{diag}(b_1,b_2,\cdots,b_n),\boldsymbol{C}=\operatorname{diag}(c_1,c_2,\cdots,c_m),$$

求 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{CA}$.

【解】 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1 & 0 & \cdots & 0\\0 & b_2 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}b_1 & a_{12}b_2 & \cdots & a_{1n}b_n\\a_{21}b_1 & a_{22}b_2 & \cdots & a_{2n}b_n\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{m1}b_1 & a_{m2}b_2 & \cdots & a_{mn}b_n\end{pmatrix}$,

$$CA=\begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}c_1 & a_{12}c_1 & \cdots & a_{1n}c_1 \\ a_{21}c_2 & a_{22}c_2 & \cdots & a_{2n}c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}c_m & a_{m2}c_m & \cdots & a_{mn}c_m \end{pmatrix}.$$

如果 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}_n$ 为 n 阶单位矩阵，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}_m$ 为 m 阶单位矩阵，则 $\boldsymbol{AE}_n=\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}$.

矩阵乘法满足以下运算规律：

(1) **结合律**(associative law)　$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$，
特别地，对于数 k 有 $(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=k(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$；

(2) **分配律**(distributive law)　$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AD}$，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{F})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{FB}$.

这里我们已经假定所有矩阵乘积都是有定义的.

【证】　我们只证明结合律，分配律的证明留给读者.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times p}$，$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{p\times s}$，$\boldsymbol{AB}=(u_{ij})_{m\times p}$，$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=(\bar{u}_{ij})_{m\times s}$，$\boldsymbol{BC}=(v_{ij})_{n\times s}$，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\bar{v}_{ij})_{m\times s}$. 因为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ 与 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$ 为同型矩阵，只要证明 $\bar{u}_{ij}=\bar{v}_{ij}$ 即可. 实际上，根据矩阵乘积定义 $u_{ik}=\sum\limits_{l=1}^{n}a_{il}b_{lk}$，$v_{lj}=\sum\limits_{k=1}^{p}b_{lk}c_{kj}$，所以

$$\bar{u}_{ij}=\sum_{k=1}^{p}u_{ik}c_{kj}=\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{l=1}^{n}a_{il}b_{lk}\right)c_{kj}=\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{n}a_{il}b_{lk}c_{kj},$$

$$\bar{v}_{ij}=\sum_{l=1}^{n}a_{il}v_{lj}=\sum_{l=1}^{n}a_{il}\left(\sum_{k=1}^{p}b_{lk}c_{kj}\right)=\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}a_{il}b_{lk}c_{kj}.$$

【注】　(1) 矩阵乘法没有交换律，一般地，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$. 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **是可交换的**(commutative)；

(2) 矩阵乘法没有消去律，一般地，由 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 和 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 推不出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

1.2.4　方阵的幂与多项式

定义 1.5(方阵的幂)　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，k 为非负整数. 定义 $\boldsymbol{A}$ 的**幂**(power)

$$\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}_n,\boldsymbol{A}^1=\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^{k+1}=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}\quad(k=1,2,\cdots).$$

以下等式的证明留给读者. 对于非负整数 k,l 有

(1) $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}$；

(2) $(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$.

一般地，$(\boldsymbol{AB})^k\neq\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$.

定义 1.6(方阵的多项式)　设有一个 x 的 k 次多项式

$$f(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1x+a_0,a_k\neq 0.$$

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，则称

$$f(\boldsymbol{A})=a_k\boldsymbol{A}^k+a_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{E}_n$$