普通高等学校“十三五”本科数学规划教材

概率论与数理统计

Probalility and Mathematical Statistics

東北大學出版社
Northeastern University Press

普通高等学校“十三五”本科数学规划教材

概率论与数理统计

Probability and Mathematical Statistics

主编　李默涵　李凤艳　刘　颖

东北大学出版社

·沈　阳·

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计 /李默涵，李凤艳，刘颖主编．—沈阳：东北大学出版社，2015.8
（普通高等学校“十三五”本科数学规划教材）
ISBN 978-7-5517-1023-7

Ⅰ.①概…　Ⅱ.①李…　②李…　③刘…　Ⅲ.①概率论—高等学校—教材　②数理统计—高等学校—教材　Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 182454 号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）
E-mail：neuph @ neupress. com
http：//www. neupress. com

印 刷 者：沈阳市第二市政建设工程公司印刷厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
幅面尺寸：184mm × 260mm
印　　张：14
字　　数：359 千字
出版时间：2015 年 8 月第 1 版
印刷时间：2015 年 8 月第 1 次印刷
组稿编辑：刘宗玉
责任编辑：一　川　　　责任校对：申　骄
封面设计：刘江旸　　　责任出版：唐敏智

ISBN 978-7-5517-1023-7　　　定　价：26.00 元

前　言

我国在2016年就将进入“十三五”时期，面对高等教育的迅猛发展和科学技术的日新月异，加之计算机的广泛应用及数学软件的普及，对基础课特别是数学课教材提出了更新、更严格的要求. 数学是本科院校几乎所有专业的公共必修课，更是理、工、农、医、经管各专业学生必须掌握的基础知识，其重要程度是不言而喻的. 正是考虑了这些因素，我们在总结数学教学经验、探索数学教学发展动向、分析国内外同类教材优劣的基础上，编写出这套适于本科院校各专业学生使用的“普通高等学校‘十三五’本科数学规划教材”，本书是其中的《概率论与数理统计》.

本书依据教育部制订的“概率论与数理统计课程教学基本要求”编写而成，是多所学校有丰富教学经验的教师集思广益和通力合作的成果. 本书力求“深化概念，加强计算，联系实际，注重应用”，遵循重视基本概念、培养基本能力、力求贴近实际应用的原则，并充分考虑了概率论与数理统计课程教学时数减少的趋势. 本书具有以下特色：

1. 突出数学的基本思想和基本方法. 概率论与数理统计内容虽然抽象，但其中每一个基本概念都有自己的背景，注意对基本概念、基本定理和重要公式的几何背景、物理意义和实际应用背景的介绍，以加深学生对它们的理解，力求使抽象的数学概念形象化. 突出基本思想和基本方法的目的在于让学生在学习过程中较好地了解各部分内容的内在联系，在总体上把握数学的思想方法；帮助学生掌握基本概念，理顺概念之间的联系，提高教学效果. 在教学理念上不过分强调严密论证、研究过程，而更多的是让学生体会数学的本质和数学的价值.

2. 加强基本能力的培养. 本书安排了较多的例题、习题，在解题方法方面有较深入的论述，其用意就是让学生在掌握基本概念的基础上，熟悉运算过程，精通解题技巧，最后达到加快运算速度、提高解题能力的目的.

3. 强调实际应用. 本书对基本概念的叙述，力求从身边的实际问题出发，自然地引出. 例题和习题多采用一些在客观世界，即自然科学、工程技术领域、经济管理领域和日常生活中经常面临的现实问题，希望以此来提高学生学习概率论与数理统计的兴趣和利用概率论与数理统计知识解决实际问题的意识和能力.

考虑到不同专业的需求有所差别，一些章节用星号“*”标出，供相关专业选择.

本书共有8章，包括随机事件与概率、随机变量及其概率分布、随机变量的联合概率分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计和假设检验等内容. 各章后均配有习题，一些章后还配有测试题，书后附有全部习题和测试题的参考答案.

由于水平所限，加之时间仓促，书中难免有不足甚至是错误之处，敬请读者不吝赐教.

作　者

2015年5月

目　　录

第一章　随机事件与概率

人类的社会活动和纷纭复杂的自然现象，大体可以分成两类，一类是确定性现象，如早晨太阳会从东方升起，水加热到一定程度会沸腾等等. 这种现象是可以预知的，是一种必然现象. 另一类是不确定现象，如扔一枚硬币出现正面的可能性，射击命中标靶的可能性，这些都是不可预知的，是一种偶然现象.

概率论讨论的对象主要是第二类. 这一种现象虽然在试验之前不可预知，但是，经过大量的试验之后，就会发现其统计规律. 概率论就是要揭示这种规律，以此来指导社会实践.

本章的主要内容包括有关随机试验的基本概念和古典概率的重要概念以及重要结论.

第一节　基本概念

一、随机试验

许多试验具有以下特点：

(1) 可以在相同条件下重复进行；

(2) 试验的所有可能结果是明确可知的，并且不止一个；

(3) 每次试验之前不能确定会出现哪种结果.

在概率论中，将具有上述三个特点的试验称为随机试验.

随机试验的每一个可能的结果，称为基本事件或样本点. 因为随机试验的所有结果是明确的. 从而所有的基本事件也是明确的. 它们的全体，称为样本空间，通常用字母 Ω 来表示. Ω 中的点，即基本事件，常用 w 来表示.

例 1.1　一个盒子中有 10 个完全相同的球，分别标以号码 1，2，…，10，从中任取一球，那么取得球的标号的可能结果是 1，2，…，10；$\Omega=\{1, 2, \cdots, 10\}$.

例 1.2　测量某地的水温，那么测得的水温可能出现的结果是 0，1，2，…，40；$\Omega=\{0, \cdots, 40\}$.

例 1.3　记录某电话传呼台 1h 内收到的呼叫数，可能的结果是 0，1，2，…；$\Omega=\{0, 1, 2, \cdots\}$.

例 1.4　抛硬币，出现正面为 1，出现反面为 0. 所有可能的结果是 1，0. $\Omega=\{1,0\}$.

二、随机事件

在随机试验中，除了关心试验的结果本身外，有时人们关心的是带有某些特征的基本事件是否发生，并将这一可观察的特征称为随机事件，也称为事件. 习惯上，人们常用大写字母 A, B, C 等表示事件. 如在例 1.1 中，若 A 表示“球的标号 =6”，B 表示“球的标号是偶数”，C 表示“球的标号≤5”，那么可以得出 $A=\{6\}$，$B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$，$C=\{1, 2, 3, 4, 5\}$. 由一个样本点组成的事件，称为基本事件，其中 A 是一个基本事件，而 B 与 C 则由多个基本事件所组成，相对于基本事件，把它们称为复杂事件.

无论是基本事件还是复杂事件，它们在试验中发生与否，都带有随机性，所以都叫做随机事件．这里 A，B，C 均为随机事件，它们都是由 Ω 中若干个样本点构成的．

我们已经知道样本空间 Ω 包含了全体基本事件，而随机事件由具有某些特征的基本事件所组成，所以从集合论的观点来看，一个随机事件是样本空间 Ω 的某个子集，且随机事件是由若干个样本点组成的集合．若某个事件 A 发生，当且仅当该事件所包含的某个样本点出现．

把样本空间 Ω 也作为一个事件，因为在每次试验中 Ω 必然发生，常称 Ω 为必然事件．类似地，把空集 $\varnothing$ 也作为一个事件，它在每次试验中都不会发生，称为不可能事件．

三、事件的运算及运算律

在一个样本空间 Ω 中，可以有很多的随机事件．概率论的任务之一，就是研究随机事件的规律，通过对较简单事件规律的研究去掌握更复杂事件的规律．为此，需要研究事件之间的关系和事件之间的一些运算．下面给出这些关系和运算在概率论中的提法，并根据“事件发生”的定义，给出它们在概率论中的定义．

1．事件的包含

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，即 A 中的每一个样本点都在 B 中，则称事件 B 包含事件 A，或事件 A 包含于事件 B，记做 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，如图 1.1 所示．

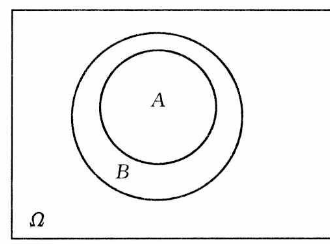

图 1.1

2．事件的相等

事件 A 与事件 B 满足 $A\subset B$ 且 $B\supset A$，即事件 A 与 B 包含完全相同的样本点，则称事件 A 与 B 相等，记做 $A=B$．

3．事件的和

事件 A 与事件 B 至少有一个发生的事件称为事件 A 与 B 的和事件，记做 $A\cup B$．事件的和 $A\cup B$ 是由事件 A 与事件 B 的所有样本点构成的集合．如图 1.2 阴影部分所示．

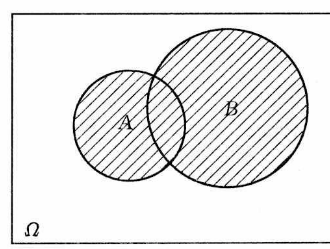

图 1.2

n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 中至少有一个发生的事件称为这 n 个事件的和事件，记做

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i.$$

4．事件的交（或积）

事件 A 与事件 B 同时发生的事件称为事件 A 与 B 的交（或积），记做 AB，如图 1.3 阴影部分所示．

n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 同时发生的事件称为这 n 个事件的交（或积）事件，记做 $A_1A_2\cdots A_n$ 或 $A_1\cap A_2\cap\cdots A_n$．

5．事件的差

事件 A 发生但事件 B 不发生的事件为事件 A 与 B 的差事件，记做 $A-B$．它是属于事件 A 但不属于事件 B 的样本点构成的集合．如图 1.4 阴影部分所示．

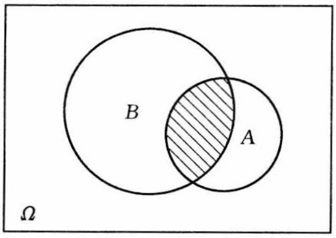

图 1.3

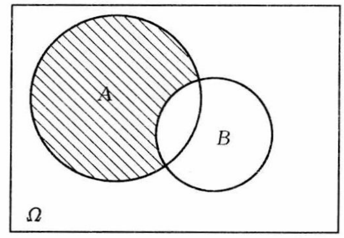

图 1.4

6. 互斥(互不相容)事件

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\emptyset$，则称事件 A 与 B 是互斥事件，也称为互不相容事件. 如图 1.5 所示.

当事件 A 与 B 互斥时，事件 A 与 B 的和记做 $A+B$.

若 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意两个事件互斥，则称这 n 个事件两两互斥，此时这 n 个事件的和事件记做

$$A_1+A_2+\cdots+A_n=\sum_{i=1}^{n}A_i.$$

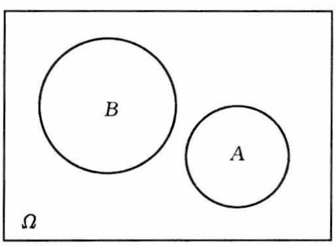

图 1.5

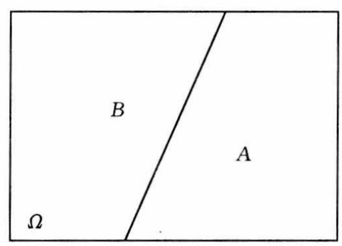

图 1.6

7. 互逆(对立)事件

对于事件 A 与 B，若 $AB=\emptyset$，$A\cup B=\Omega$，则称事件 A 与 B 为对立事件，也称为互逆事件，此时称事件 B 为 A 的逆事件，记作 $\bar{A}$，称做"非 A"，表示 A 不发生，此时显然有 $B=\bar{A}$，$A=\bar{B}$，于是有

$$A\bar{A}=\emptyset,\ A\cup\bar{A}=\Omega,\ \bar{\bar{A}}=A.$$

如图 1.6 所示.

显然，对立事件一定是互斥事件，而互斥事件不一定是对立事件.

8. 事件的运算律

记 A，B，C 是三个事件，由事件的关系及运算的定义，可以得到下述运算性质.

① 交换律　$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$；

② 结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，$A(BC)=(AB)C$；

③ 分配律　$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$，

$A(B\cup C)=(AB)\cup(AC)$；

④ 德·摩尔根定律

$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B},\quad \overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B}.$$

为了帮助大家理解上述概念，现把集合论的有关结论与事件的关系和运算对应情况列举

如下：

符　号	集　合　论	概　率　论
Ω	全集	样本空间，必然事件
$\varnothing$	空集	不可能事件
w	元素	基本事件
A	子集	事件
$\bar{A}$	A 的余集	A 的对立事件
$A \subset B$	A 是 B 的子集	A 发生导致 B 发生
$A = B$	A 与 B 相等	A 与 B 相等
$A \cup B$	A 与 B 的和集	A 与 B 至少有一个发生
AB	A 与 B 的交集	A 与 B 同时发生
$A - B$	A 与 B 的差集	A 发生而 B 不发生
$AB = \varnothing$	A 与 B 无相同元素	A 与 B 是互斥的

例 1.5　设 A，B，C 是三个事件，试用 A，B，C 表示下列事件：

（1）A 发生，B，C 不发生；

（2）A，B，C 都不发生；

（3）A，B，C 至少有一个发生；

（4）A，B，C 至少有两个发生；

（5）A，B，C 恰有一个发生；

解　（1）$A\bar{B}\bar{C}$；　（2）$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$；　（3）$A \cup B \cup C$ 或 $\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$；

（4）$AB \cup AC \cup BC$；　（5）$A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$；

例 1.6　在某班学生中任选一个同学，以事件 A 表示选到男同学，事件 B 表示选到的人不喜欢唱歌，事件 C 表示选到的人是运动员.

（1）表述 $AB\bar{C}$ 及 $A\bar{B}C$；

（2）$ABC = A$ 在什么条件下成立？

（3）$\bar{C} \subset B$ 在什么条件下成立？

解　（1）$AB\bar{C} = \{$抽到的是男同学，又不爱唱歌，又不是运动员$\}$，$A\bar{B}C = \{$抽到的是男同学，又爱唱歌，又是运动员$\}$.

（2）因为 $ABC = A$，故 $BC \supset A$，于是当男同学都不爱唱歌且都是运动员时成立.

（3）当不是运动员的学生必不爱唱歌时，$\bar{C} \subset B$ 成立.

例 1.7　一名射击手连续向某个目标射击三次，事件 A_i 表示该射击手第 i 次射击时击中目标$(i = 1,2,3)$，试用文字叙述下列事件：

（1）$A_1 \cup A_2$；　（2）$\bar{A}_2$；　（3）$A_1 \cup A_2 \cup A_3$；

（4）$A_1A_2A_3$；　（5）$A_3 - A_2$；　（6）$\overline{A_1 \cup A_2}$；

解

（1）前两次至少有一次击中目标；

（2）第二次射击未击中目标；

（3）三次射击中至少有一次击中目标；

（4）三次射击都击中了目标；

(5) 第三次击中但第二次未击中目标;

(6) 前两次射击都没有击中目标;

四、概率的定义及其性质

随机事件在一次试验中发生的可能性大小,呈现出统计的规律性. 这个度量值称为随机事件的概率,记为 $P(A)$. 本节只介绍众多定义中的两种.

1. 概率的统计定义

在一定条件下进行 n 次重复试验,在 n 次试验中事件 A 发生的次数为 r,当试验次数 n 很大时,如果事件 A 发生的频率 r/n 稳定地在某一常数 p 附近摆动,并且,一般来说,这种摆动的幅度会随着试验次数的增加而逐渐减小,则称数值 p 为随机事件 A 在这个条件下发生的概率,记做

$$P(A)=p.$$

这种定义称为概率的统计定义.

由定义,随机事件的概率有如下性质:

(1) 随机事件 A 的概率介于 0 与 1 之间,即 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(2) 必然事件的概率等于 1,即 $P(\Omega)=1$;

(3) 不可能事件的概率等于 0,即 $P(\varnothing)=0$.

概率的统计定义非常直观地解释了事件概率的含义,但在现实生活之中,无法把试验无限次重复下去,因此用这一定义求概率十分困难. 于是出现了概率的古典定义、几何定义和主观定义等,这些定义分别适用于某一类随机现象,但缺乏数学的严密性. 而概率的公理化定义的提出,成为了概率论发展史上的一座里程碑.

2. 概率的公理化定义

定义 1.1 设 Ω 为一个样本空间,A 是其中的任意一个事件,与 A 对应的一个实数 $P(A)$ 如果满足

(1) 非负性: $P(A)\geqslant 0$,

(2) 规律性: $P(\Omega)=1$,

(3) 可列可加性: 若 $A_1, A_2, \cdots$ 互不相容,即 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots)$,

则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

成立,称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

由概率的公理化定义出发,可以证明概率的重要性质.

性质 设 $P(A)$ 表示事件 A 的概率,则

(1) $P(\varnothing)=0$;

证 因为 $\Omega=\Omega\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots$,所以有

$$P(\Omega)=P(\Omega)+P(\varnothing)+\cdots,$$

从而有 $P(\varnothing)=0$.

(2) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容,即 $A_iA_j=\varnothing(1\leqslant i\neq j\leqslant n)$,则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i);$$

证 因为

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots,$$

由可列可加性及 $P(\varnothing)=0$，即可得

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

(3)（逆事件的概率） 对于任一事件 A，有

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A);$$

证 因为 $A\cup\bar{A}=\Omega$，$A\bar{A}=\varnothing$，所以

$$1 = P(\Omega) = P(A\cup\bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}).$$

(4) 若 $A\supset B$，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$；

证 因为当 $A\supset B$ 时，有

$$A = B\cup(A-B),$$

且

$$B\cap(A-B)=\varnothing,$$

由(2)可知

$$P(A) = P(B) + P(A-B).$$

(5) 对于任意两个事件 A，B，有

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

证 因为

$$A\cup B = A\cup(B-AB),$$

且

$$A\cap(B-AB)=\varnothing,$$

所以有

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B-AB).$$

又因为 $AB\subset B$，从而由(4)得

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

性质(5)还可以用归纳法推广到任意有限个事件：设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个随机事件，则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} P(A_iA_j) + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} P(A_iA_jA_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i).$$

这个公式也称为概率的一般加法公式.

推论 1.1 $P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$.

推论 1.2 若 A，B 互斥，则有

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

推论 1.3 设 A，B，C 为任意三个事件，则

$$P(A\cup B\cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

例 1.8 设 $P(A)=a$，$P(B)=b$，$P(AB)=c$，用 a，b，c 表示下列事件的概率：

(1) $P(\bar{A}\cup\bar{B})$； (2) $P(\bar{A}B)$； (3) $P(\bar{A}\cup B)$； (4) $P(\bar{A}\bar{B})$.

解 (1) 因为 $\bar{A}\cup\bar{B}=\overline{AB}$，且 $\overline{AB}=\Omega-AB$，$\Omega\supset AB$，所以有

$$P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\overline{AB})=P(\Omega-AB)=P(\Omega)-P(AB)=1-P(AB)=1-c.$$

(2) $\bar{A}B=B-AB$, 且 $B\supset AB$, 由性质(4), 有

$$P(\bar{A}B)=P(B-AB)=P(B)-P(AB)=b-c.$$

(3) $\bar{A}\cup B=\bar{A}+AB$, 且 $\bar{A}(AB)=\varnothing$, 由性质(2)和性质(3)得

$$P(\bar{A}\cup B)=P(\bar{A}+AB)=P(\bar{A})+P(AB)=1-P(A)+P(AB)=1-a+c.$$

(4) $\bar{A}\bar{B}=\overline{A\cup B}$, 根据性质(3)和性质(5)得

$$P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)=1-a-b+c.$$

例 1.9　已知 $P(\bar{A})=0.5$, $P(\bar{A}B)=0.2$, $P(B)=0.4$, 求(1)$P(AB)$;(2)$P(A-B)$;(3)$P(A\cup B)$;(4)$P\bar{A}\bar{B}$).

解　(1)由于 $AB\cup\bar{A}B=B$,且$(AB)(\bar{A}B)=\varnothing$,于是

$$P(AB)+P(\bar{A}B)=P(B),$$

所以

$$P(AB)=P(B)-P(\bar{A}B)=0.4-0.2=0.2;$$

(2)$P(\bar{A})=0.5$,故 $P(A)=0.5$,由于 $A=(AB)\cup(A-B)$,且 AB 与 $A-B$ 互斥,故

$$P(A)=P(AB)+P(A-B),$$

所以

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.5-0.2=0.3;$$

(3)$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.4-0.2=0.7$;

(4)$P(\bar{A}\bar{B})=\overline{A\cup B}=1-P(A\cup B)=1-0.7=0.3$.

第二节　古典概型和几何概型

一、古典概型

本节将要介绍一种特殊类型——古典概型，它曾经是概率论发展初期的主要研究对象，在概率论中有着很重要的地位. 一方面，它简单且容易理解，另一方面，它概括了很多实际情况，有着广泛的应用.

定义 1.2　若试验具有下述特征：

(1) 样本空间的元素(即基本事件)只有有限个，不妨设为 n 个，记为 $w_1, w_2, \cdots, w_n$;

(2) 每个基本事件出现的可能性是相等的，即

$$P(w_1)=P(w_2)=\cdots=P(w_n),$$

那么就称这种数学模型为古典概型.

定理 1.1　在古典概型中，设样本空间 Ω 中有 n 个样本点，A 是 Ω 中的事件且 A 中有 k 个样本点，则事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{k}{n}.$$

证　设 $\Omega=\{w_1, \cdots, w_n\}$，由古典概型的定义可知 $P(\{w_1\})=P(\{w_2\})=\cdots=P(\{w_n\})$，另外，各样本点之间是两两互斥的，于是有

$$1=P(\Omega)=P(\bigcup_{i=1}^{n}\{w_i\})=\sum_{i=1}^{n}P(\{w_i\})=nP(\{w_i\}),$$

即得

$$P(\{w_i\})=\frac{1}{n}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

由于 A 含有 k 个样本点，不妨设 $A=\{w_{i_1},w_{i_2},\cdots,w_{i_n}\}$，则

$$P(A)=\sum_{j=1}^{k}P(\{w_{i_j}\})=\frac{k}{n}.$$

例 1.10 用 0，1，2，…，9 这 10 个数字中的任意两个(可重复使用)组成一个两位数的字码，求字码的两个数字之和为 3 的概率.

解 此为古典概型，样本空间总数为 10^2，两个数字之和为 3 的有 03，12，21，30 共 4 个字码，设 $A=\{$字码的两个数字之和为 3$\}$，则有

$$P(A)=\frac{4}{10^2}=\frac{1}{25}.$$

例 1.11 一个袋子中装有 6 个红球和 3 个白球，从中任意取出两球，求下列事件的概率：

(1) 两个球都是白球；

(2) 两个球都是红球；

(3) 一个红球和一个白球.

解 设

$$A=\{\text{取出的两个球都是白球}\},$$
$$B=\{\text{取出的两个球都是红球}\},$$
$$C=\{\text{取出一个红球和一个白球}\},$$

则

(1) $P(A)=\dfrac{C_3^2}{C_9^2}=\dfrac{1}{12}$；

(2) $P(B)=\dfrac{C_6^2}{C_9^2}=0.417$；

(3) $P(C)=\dfrac{C_6^1C_3^1}{C_9^2}=0.5$.

例 1.12 在盒子中有 10 个相同的球，号码分别标为 1，2，…，10，从中任取一球，求此球的号码为偶数的概率.

解 令

$$i=\{\text{所取球的号码为 } i\}\quad(i=1,2,\cdots,10),$$

则

$$\Omega=\{1,2,\cdots,10\}.$$

故基本事件的总数 $n=10$. 又令

$$A=\{\text{所取球的号码为偶数}\},$$

显然

$$A=\{2\}\cup\{4\}\cup\{6\}\cup\{8\}\cup\{10\},$$

所以 A 中含有 5 个基本事件，从而

$$P(A)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}.$$

例 1.13　从 1 ~ 100 这 100 个整数中任取 1 个，试求取到的整数能被 6 或 8 整除的概率.

解　Ω 表示从 100 个整数中任取 1 个，则共含 100 个样本点.

设

$$A=\{\text{取到的整数能被 6 整除}\},$$
$$B=\{\text{取到的整数能被 8 整除}\}.$$

考查 A，设 100 个整数中有 x 个数能被 6 整除，则

$$6x\leqslant 100,$$

所以

$$x=16,$$

即 A 中含 16 个样本点. 同理，B 中含 12 个样本点.

考查 AB，类似分析有 $24y\leqslant 100$，所以

$$y=4,$$

即 AB 含有 4 个样本点.

所以

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{16}{100}+\frac{12}{100}-\frac{4}{100}=0.24.$$

例 1.14　甲、乙两人掷均匀的硬币，其中甲掷 $n+1$ 次，乙掷 n 次，求“甲掷出正面的次数大于乙掷出正面的次数”这一事件的概率.

解　令

$$\text{甲}_{\text{正}}=\{\text{甲掷出正面的次数}\},$$
$$\text{甲}_{\text{反}}=\{\text{甲掷出反面的次数}\},$$
$$\text{乙}_{\text{正}}=\{\text{乙掷出正面的次数}\},$$
$$\text{乙}_{\text{反}}=\{\text{乙掷出反面的次数}\},$$

于是所求事件的概率为 $P(\text{甲}_{\text{正}}>\text{乙}_{\text{正}})$. 另一方面，显然有

$$\Omega-\{\text{甲}_{\text{正}}>\text{乙}_{\text{正}}\}=\{\text{甲}_{\text{正}}\leqslant\text{乙}_{\text{正}}\}=\{\text{甲}_{\text{反}}>\text{乙}_{\text{反}}\},$$

且硬币是对称的，由此即得

$$P(\text{甲}_{\text{正}}>\text{乙}_{\text{正}})=P(\text{甲}_{\text{反}}>\text{乙}_{\text{反}}),$$

由此即得

$$P(\text{甲}_{\text{正}}>\text{乙}_{\text{正}})=\frac{1}{2}.$$

例 1.15　一部五卷的文集，按任意次序摆放到书架上，试求

(1) 事件 A 为“第一卷出现在旁边”的概率；

(2) 事件 B 为“第一卷及第三卷出现在旁边”的概率.

解　一部五卷的文集，按任意次序摆放到书架上去共有 $5!$ 种摆法.

(1) 第一卷在旁边，可能在左或右，剩余的 4 卷可在其余 4 个位置上任意排列，所以第一卷出现在旁边的摆法共有 $2\times 4!$ 种，于是有

$$P(A)=\frac{2\times 4!}{5!}=\frac{2}{5}.$$

(2) 第一卷及第三卷出现在旁边，可能是第一卷出现在左边而第三卷出现在右边，或第一卷出现在右边而第三卷出现在左边，剩余的 3 卷可在其余 3 个位置上任意排列. 所以第一卷及第三卷出现在旁边的摆法共有 $2\times 3!$ 种，于是有

$$P(B)=\frac{2\times3!}{5!}=\frac{1}{10}.$$

例 1.16 某班有 10 人是同一年出生的(这一年按 365 天计算)，试求下列事件的概率：

(1) 至少有两人是同一天出生的；

(2) 至少有一人是 10 月 1 日出生的.

解 (1) 样本空间样本点的总数为 365^{10}，没有 2 个人是同一天出生的事件有 P_{365}^{10} 个样本点，设 A 表示"至少有两人是同一天出生的"，所以

$$P(A)=1-\frac{P_{365}^{10}}{365^{10}};$$

(2) 没有人在 10 月 1 日出生的事件数为 364^{10}，设 B 表示"至少有一人是 10 月 1 日出生的"，所以

$$P(B)=1-\frac{364^{10}}{365^{10}}.$$

例 1.17 将 3 个球随机地投入四个盆子中，试求下列事件的概率：

(1) 任意 3 个盆子中各有 1 个球；

(2) 任意一个盆子中有 3 个球；

(3) 任意 1 个盆子中有 2 个球，其他任意 1 个盆子中有 1 个球.

解

(1) $P_1=\dfrac{P_4^3}{4^3}=\dfrac{24}{64}=\dfrac{3}{8}.$

(2) $P_2=\dfrac{4}{4^3}=\dfrac{1}{16}.$

(3) $P_3=\dfrac{C_3^2P_4^1P_3^1}{4^3}=\dfrac{36}{64}=\dfrac{9}{16}.$

例 1.18 将含有 3 名优秀生的 15 名新生随机地分成 3 个 5 人小组，试求每个小组各有一名优秀生的概率.

解

$$P(A)=\frac{3!\dfrac{12!}{4!\ 4!\ 4!}}{C_{10}^5\cdot C_{10}^5\cdot C_5^5}=\frac{25}{91}.$$

例 1.19 把 n 双不同的鞋子任意混合，随机凑为 n 个两只鞋，试求这 n 个两只鞋恰好是 n 双的概率.

解

$$P(A)=\frac{n!}{C_{2n}^2C_{2n-2}^2\cdots C_2^2}=\frac{n!}{\dfrac{(2n)!}{2^n}}=\frac{2^n\cdot n!}{(2n)!}.$$

例 1.20 一个中学有 15 个班，每班选出 3 名代表出席学生代表会议，再从这 45 名代表中任选出 15 名组成委员会，试求下列事件的概率：

(1) 一年组一班在委员会有代表；

(2) 每个班在委员会都有代表.

解