普通高等教育"十二五"规划教材

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

微积分

WEIJIFEN

主　编　姚志鹏　何　丹　崔　唯
主　审　陈盛双

華中師範大學出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

微积分

WEIJIFEN

主　编　姚志鹏　何　丹　崔　唯
主　审　陈盛双

华中师范大学出版社

内 容 提 要

本书是按照培养高层次应用型人才的目标，考虑新时期高校自身的教学特点和学生的实际状况，结合编者多年的教学经验编写而成。全书共分十章，内容包括：函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、微分方程、多元函数微分学、二重积分、无穷级数。各章节后面均配有较多不同类型的习题，书末附有习题参考答案，这些均有助于读者更好地掌握高等数学知识。

书中概念引入自然，理论条理清晰，讲解深入浅出，可作为相关院校数学课程教学的教材，也可作为相关科研工作者的参考用书。

新出图证(鄂)字 10 号

图书在版编目(CIP)数据

微积分/姚志鹏，何丹，崔唯主编. —武汉：华中师范大学出版社，2015.5
(普通高等教育"十二五"规划教材)
ISBN 978-7-5622-7010-2

Ⅰ.①微… Ⅱ.①姚… ②何… ③崔… Ⅲ.①微积分—高等学院—教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 117626 号

微积分

©姚志鹏 何 丹 崔 唯 主编

责任编辑：陈 艳 袁正科　**责任校对**：易 雯　**封面设计**：胡 灿
编 辑 室：第二编辑室　**电　　话**：027—67867362
出版发行：华中师范大学出版社
社　　址：湖北省武汉市珞喻路 152 号　**邮　　编**：430079
销售电话：027—67863426/67863280(发行部)　027—67861321(邮购)　027—67863291(传真)
网　　址：http://www.ccnupress.com　**电子信箱**：hscbs@public.wh.hb.cn
印　　刷：湖北万隆印务有限公司　**督　　印**：王兴平
开　　本：787mm×1092mm　1/16　**印　　张**：24.5　**字　　数**：550 千字
版　　次：2015 年 6 月第 1 版　**印　　次**：2015 年 6 月第 1 次印刷
印　　数：1—3000　**定　　价**：45.00 元

欢迎上网查询、购书

前　　言

为了适应各地方高校向应用技术型高校转型发展的时代要求，落实高等院校培养高层次应用型人才的目标，我们遵循“以应用为目的，以够用为原则”，特编写了适用于高等学校专科生和经济管理类本科生的基础课教材《微积分》。

微积分的主要内容在经济、金融、管理、电子技术等学科中有着十分广泛的应用。微积分的学习，不但能使学生掌握现代数学的基本理论和方法，而且在培养学生的逻辑推理能力、综合概括能力、计算能力等方面发挥着其他课程无法替代的作用。因此，编写一本既满足培养高层次应用型人才的主要目标，又符合新时期高校自身的教学特点和学生的实际状况的教材是当前的重要任务。为此，我们在吸收国内外同类教材优点的基础上，结合自己丰富的教学经验编写了这本《微积分》教材。本教材的主要特点如下：

1. 虽然本教材的主要内容涵盖函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、一元积分学、微分方程、多元微积分学、无穷级数等基本知识，但不过分追求理论体系的深度和运算技巧。在遵循科学性、系统性、严谨性的前提下，以突出数学思想、数学方法的应用为核心。

2. 适当淡化理论推导，精选教学内容。内容叙述上力求深入浅出、通俗易懂、循序渐进，注重以实例引入概念和定理，由具体到抽象，以培养学生用数学的原理和方法解决问题的能力，激发学生的学习兴趣。

3. 本书每节都配有大量的典型范例和习题。例题和习题的选择紧扣该节的主要概念和定理。注重难度的循序渐进、知识点的覆盖面及内容的多样性，以利于学生自学。每章后还配有总复习题，供学有余力的学生复习、提高。

4. 增强专业特色与实用性。介绍了微积分知识在经济管理等学科中的基本应用，有利于学生对相关专业课程的学习。

本书由姚志鹏、何丹、崔唯担任主编，其中，崔唯老师编写了本书的第一章，姚志鹏、何丹老师编写了本书的其余章节。在本书的编写过程中，崔唯老师、陈盛双教授对编写大纲和编写内容提出了许多宝贵的修改意见和建议，崔唯老师还对书稿内容进行了全面、深入、仔细地审阅和修订，李宇皓、程晓、朱洁、赵巍巍、夏蕾、姚碧涛、吴少芹、祝杰对本书的出版也提供了许多帮助，在此向他们一并表示诚挚的感谢。

由于编者水平有限，编写时间仓促，教材中难免存在诸多不妥和疏漏之处，恳请广大读者批评指正。

编　者

2015 年 4 月

目　　录

第一章　函数与极限

函数是现代数学基本概念之一，是高等数学研究的主要对象。函数关系是变量间的依赖关系，而极限的思想方法则是研究变量的基本方法。本章介绍函数、极限、函数的连续性等基本概念以及基本性质。

第一节　函数

一、函数概念及其表示

1. 变量与函数

所谓变量是指在某一过程中不断变化的量。例如某地的气温、某时刻世界人口的总数等都是变量。在任何一种自然现象或任何一个经济活动中，各个变量的变化不是孤立的，而是彼此联系并遵循着一定的变化规律，这种变量之间的依赖关系就是数学上要讨论的函数关系。

在某一研究过程中变量往往在某个指定的范围内取值。这个取值范围常用区间来表示。

2. 区间与邻域

本书中涉及的数都是实数，所以，若不特别说明，书中提到的数均为实数，数集均为实数集。

设 $a,b \in \mathbf{R}$，且 $a < b$。

称数集 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 为**闭区间**，记为 $[a,b]$；

称数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 为**开区间**，记为 (a,b)；

称数集 $\{x \mid a \leqslant x < b\}$，$\{x \mid a < x \leqslant b\}$ 为**半开区间**，分别记为 $[a,b)$，$(a,b]$；

以上这些区间都为**有限区间**，a，b 称为区间的**端点**，数 $b-a$ 称为区间的**长度**。

引入记号 $+\infty$（读作正无穷大），$-\infty$（读作负无穷大），则下列区间为**无限区间**。

$(a,+\infty)=\{x \mid x>a\}$，$[a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a\}$，$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$，$(-\infty,b]=\{x \mid x \leqslant b\}$，$(-\infty,+\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}=\mathbf{R}$。

注意　$+\infty$ 与 $-\infty$ 是两个符号，不是实数。

设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$。数集 $\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$ 称为点 a 的 **δ 邻域**，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}。$$

点 a 称为邻域的**中心**，δ 称为邻域的**半径**（图 1-1）。此邻域还可表示为 $\{x \mid |x-a|<\delta\}$。

图 1-1

在数轴上，$|x-a|$ 表示点 x 与点 a 之间的距离，因此，$U(a,\delta)$ 表示数轴上与点 a 的距离小于 δ 的一切点 x 的集合。

如果把邻域中心去掉，称集合 $\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$ 为点 a 的**去心 $\boldsymbol{\delta}$ 邻域**，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$。

3. 函数的概念

定义 1　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集，如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照某个对应法则总有唯一确定的值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x),\ x\in D。$$

数集 D 称为函数的**定义域**，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**。

对于 $x_0\in D$，按照对应法则 f，总有确定的值 y_0（记作 $f(x_0)$）与之对应，称 $f(x_0)$ 为函数在点 x_0 处的**函数值**。因变量与自变量的这种相依关系通常称为**函数**。当 x 取遍 D 中所有值时，对应的函数值的全体组成的数集

$$f(D)=\{y \mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数的值域。

由函数的定义可知，构成函数的要素有两个，一个是函数的定义域，另一个是对应法则，而函数的值域是由定义域和对应法则所确定的。若两个函数的定义域和对应法则都相同，则这两个函数是相同的，而不管它们的自变量和因变量选用什么字母表示，例如：$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ 与 $f(x)=x-1$ 是不同的，因为它们的定义域不同；而函数 $f(x)=\sqrt{x^2+2}+3\sin^2x+3\cos^2x$ 与 $g(x)=3+\sqrt{x^2+2}$ 是相同的，因为它们的定义域和对应法则完全相同。

表示函数的主要方法有三种：**表格法**、**图形法**、**解析法（公式法）**。

例 1　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$$

其定义域 $D=\mathbf{R}$，值域 $f(D)=[0,+\infty)$，其图形如图 1-2 所示。

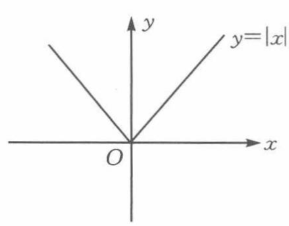

图 1-2

例 2　符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

其定义域 $D=\mathbf{R}$,值域 $f(D)=\{-1,0,1\}$,其图形如图 1-3 所示。

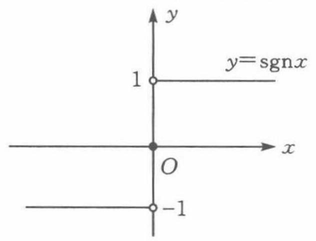

图 1-3

例 3　取整函数 $y=[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $f(D)=\mathbf{Z}$,其图形如图 1-4 所示。该图形称为**阶梯曲线**,在 x 为整数值时,图形发生跳跃,跃度为 1。

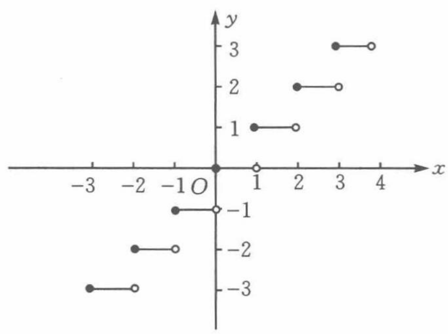

图 1-4

从以上三个例子可以看到,有时一个函数要用几个式子表示,这种在自变量不同变化范围中,对应法则用不同式子来表示的函数,通常称为**分段函数**。

例 4　设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ 1, & 0<x<1,\\ 2x-1, & 1\leqslant x<2,\end{cases}$ 它是一个分段函数,定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,2)$,其图形如图 1-5 所示。

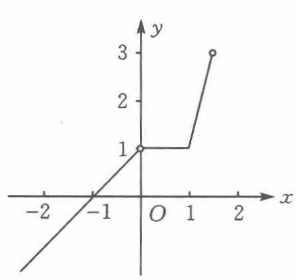

图 1-5

二、函数的几种特性

1. 函数的有界性

定义 2 设函数 $f(x)$ 在某区间上有定义，若存在正数 M，使得对于该区间上任意点 x，都有 $|f(x)| \leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在该区间上**有界**；否则，就称函数 $f(x)$ 在该区间上**无界**。

显然，在某区间上有界函数 $f(x)$ 的图形一定在该区间上介于两条平行直线 $y=\pm M$ 之间。

例如，函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界。因为 $|\sin x| \leqslant 1 (x \in \mathbf{R})$。而 $y=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内无界，但在区间 $[1,+\infty)$ 内是有界的。由此可见，函数的有界性与所选的区间有关。

2. 函数的单调性

定义 3 设函数 $f(x)$ 在某区间 I 上有定义，若对于该区间上任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加**的(图 1-6)；如果对于区间 I 上任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少的**(图 1-7)。

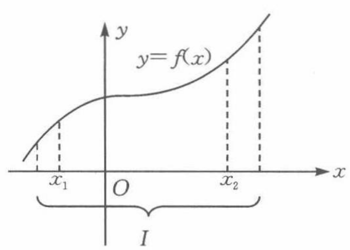

图 1-6

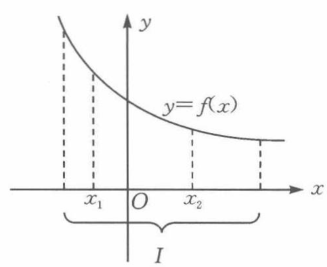

图 1-7

单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**。例如 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 内单调减少，在 $(0,+\infty)$ 内单调增加，但在整个定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调函数。

3. 函数的奇偶性

定义 4 如果函数 $f(x)$ 在一个关于原点对称的定义域 D 内有定义，若对每一个 $x \in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；若对每一个 $x \in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**。

例如，$y=3x^2$ 与 $y=\cos x-x^4$ 是偶函数，$y=-2x^3$ 与 $y=\sin x$ 是奇函数。

显然，奇函数的图形关于原点对称，而偶函数的图形关于 y 轴对称。

例 5 判断下列函数的奇偶性。

(1) $f(x)=\dfrac{1}{a^x+1}-\dfrac{1}{2}$（其中 $a>0$ 且 $a \neq 1$）；

(2) $f(x)=\begin{cases}-x^3+1, & x<0, \\ x^3+1, & x \geqslant 0.\end{cases}$

解　(1) $f(-x)=\dfrac{1}{a^{-x}+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{a^x}{1+a^x}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1+a^x-1}{1+a^x}-\dfrac{1}{2}$

$$=-\frac{1}{1+a^x}+\frac{1}{2}=-f(x),$$

因此，$f(x)$ 是奇函数。

(2) $f(-x)=\begin{cases}-(-x)^3+1, & -x<0\\ (-x)^3+1, & -x\geqslant 0\end{cases}=\begin{cases}x^3+1, & x>0\\ -x^3+1, & x\leqslant 0\end{cases}$

$$=\begin{cases}x^3+1, & x\geqslant 0\\ -x^3+1, & x<0\end{cases}=f(x),$$

因此，$f(x)$ 是偶函数。

4. 函数的周期性

定义 5　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个非零常数 T，使得对于 D 内的任意 $x\in D$，$(x+T)\in D$，都有 $f(x+T)=f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，T 称为 $f(x)$ 的**周期**，通常我们说周期函数的周期是指**最小正周期**。

例如，$y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 都是周期为 2π 的周期函数，而 $y=\tan x$ 与 $y=\cot x$ 都是周期为 π 的周期函数。

例 6　求函数 $y=\sin^4 x+\cos^4 x$ 的周期。

解　$y=\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x$

$$=1-\frac{\sin^2 2x}{2}=1-\frac{1-\cos 4x}{4}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x,$$

所以，函数 y 的周期 $T=\dfrac{\pi}{2}$。

三、初等函数

1. 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数统称为**基本初等函数**。

(1) 幂函数　$y=x^\alpha(\alpha\in\mathbf{R})$，其定义域随 α 的不同而不同。

(2) 指数函数　$y=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$，其定义域为 $\mathbf{R}$。当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 为单调减函数；当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 为单调增函数。

在实际中，常出现以 e 为底的指数函数 $y=e^x$，其中 $e=2.71828\cdots$ 是一个无理数。

(3) 对数函数　$y=\log_a x$，其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$，其定义域为 $(0,+\infty)$。

以 10 为底的对数函数记为 $y=\lg x$，称为**常用对数**；而以 e 为底的对数函数记为 $y=\ln x$，称为**自然对数**。

(4) 三角函数　正弦函数 $y=\sin x$；余弦函数 $y=\cos x$；正切函数 $y=\tan x$；余切函数 $y=\cot x$；正割函数 $y=\sec x$；余割函数 $y=\csc x$。

$y=\sin x$，$y=\cos x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$；

$y=\tan x, y=\sec x$ 的定义域为$\{x \mid x \neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$；

$y=\cot x, y=\csc x$ 的定义域为$\{x \mid x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$。

(5) 反三角函数

反正弦函数 $y=\arcsin x$，它是正弦函数 $y=\sin x$ 在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的反函数，其定义域为$[-1,1]$，值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，如图 1-8 所示。

反余弦函数 $y=\arccos x$，它是余弦函数 $y=\cos x$ 在$[0,\pi]$上的反函数，其定义域为$[-1,1]$，值域为$[0,\pi]$，如图 1-9 所示。

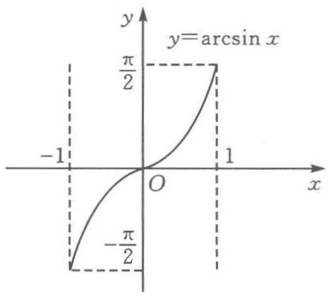

图 1-8

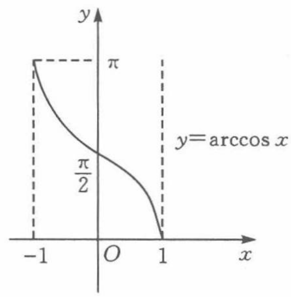

图 1-9

反正切函数 $y=\arctan x$，它是正切函数 $y=\tan x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上的反函数，其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，如图 1-10 所示。

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$，它是余切函数 $y=\cot x$ 在$(0,\pi)$上的反函数，其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,\pi)$，如图 1-11 所示。

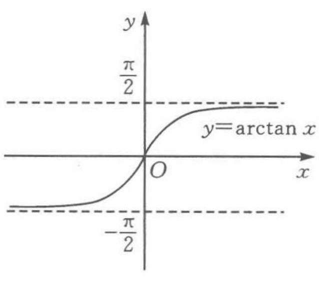

图 1-10

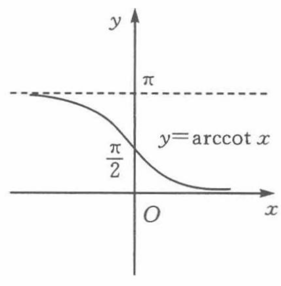

图 1-11

2. 反函数

设函数 $y=f(x)$，若将 y 作为自变量，x 作为因变量，则由关系式 $y=f(x)$ 唯一确定的函数 $x=\varphi(y)$ 称为 $y=f(x)$ 的**反函数**。习惯上，自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，因此，$x=\varphi(y)$ 可写成 $y=\varphi(x)$，或用 $y=f^{-1}(x)$ 表示。

显然 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数。它们的图形关于直线 $y=x$ 对称。

需要指出的是，并非所有的函数都存在反函数。例如，$y=x^2$ 在定义域$(-\infty,+\infty)$内