

普通高等教育“十二五”规划教材


$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

微积分

WEIJIFEN

主 编 姚志鹏 何 丹 崔 唯

主 审 陈盛双

 华中师范大学出版社


普通高等教育“十二五”规划教材

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

微积分

WEIJIFEN

主 编 姚志鹏 何 丹 崔 唯
主 审 陈盛双

 华中师范大学出版社

内 容 提 要

本书是按照培养高层次应用型人才的目标,考虑新时期高校自身的教学特点和学生的实际状况,结合编者多年的教学经验编写而成。全书共分十章,内容包括:函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、微分方程、多元函数微分学、二重积分、无穷级数。各章节后面均配有较多不同类型的习题,书末附有习题参考答案,这些均有助于读者更好地掌握高等数学知识。

书中概念引入自然,理论条理清晰,讲解深入浅出,可作为相关院校数学课程教学的教材,也可作为相关科研工作者的参考用书。

新出图证(鄂)字 10 号

图书在版编目(CIP)数据

微积分/姚志鹏,何丹,崔唯主编. —武汉:华中师范大学出版社,2015. 5

(普通高等教育“十二五”规划教材)

ISBN 978-7-5622-7010-2

I. ①微… II. ①姚… ②何… ③崔… III. ①微积分—高等学院—教材 IV. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 117626 号

微积分

©姚志鹏 何丹 崔唯 主编

责任编辑:陈艳 袁正科

编辑室:第二编辑室

出版发行:华中师范大学出版社

社址:湖北省武汉市珞喻路 152 号

销售电话:027-67863426/67863280(发行部) 027-67861321(邮购) 027-67863291(传真)

网 址:<http://www.ccnupress.com>

印刷:湖北万隆印务有限公司

开本:787mm×1092mm 1/16

版次:2015年6月第1版

印数:1-3000

责任校对:易雯

电 话:027-67867362

邮 编:430079

电子信箱:hscbs@public.wh.hb.cn

督 印:王兴平

印 张:24.5

印 次:2015年6月第1次印刷

定 价:45.00元

封面设计:胡 灿

字 数:550千字

欢迎上网查询、购书

敬告读者:欢迎举报盗版,请打举报电话 027-67861321

前 言

为了适应各地方高校向应用技术型高校转型发展的时代要求,落实高等院校培养高层次应用型人才的目标,我们遵循“以应用为目的,以够用为原则”,特编写了适用于高等学校专科生和经济管理类本科生的基础课教材《微积分》。

微积分的主要内容在经济、金融、管理、电子技术等学科中有着十分广泛的应用。微积分的学习,不但能使学生掌握现代数学的基本理论和方法,而且在培养学生的逻辑推理能力、综合概括能力、计算能力等方面发挥着其他课程无法替代的作用。因此,编写一本既满足培养高层次应用型人才的主要目标,又符合新时期高校自身的教学特点和学生的实际状况的教材是当前的重要任务。为此,我们在吸收国内外同类教材优点的基础上,结合自己丰富的教学经验编写了这本《微积分》教材。本教材的主要特点如下:

1. 虽然本教材的主要内容涵盖函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、一元积分学、微分方程、多元微积分学、无穷级数等基本知识,但不过分追求理论体系的深度和运算技巧。在遵循科学性、系统性、严谨性的前提下,以突出数学思想、数学方法的应用为核心。

2. 适当淡化理论推导,精选教学内容。内容叙述上力求深入浅出、通俗易懂、循序渐进,注重以实例引入概念和定理,由具体到抽象,以培养学生用数学的原理和方法解决问题的能力,激发学生的学习兴趣。

3. 本书每节都配有大量的典型范例和习题。例题和习题的选择紧扣该节的主要概念和定理。注重难度的循序渐进、知识点的覆盖面及内容的多样性,以利于学生自学。每章后还配有总复习题,供学有余力的学生复习、提高。

4. 增强专业特色与实用性。介绍了微积分知识在经济管理等学科中的基本应用,有利于学生对相关专业课程的学习。

本书由姚志鹏、何丹、崔唯担任主编,其中,崔唯老师编写了本书的第一章,姚志鹏、何丹老师编写了本书的其余章节。在本书的编写过程中,崔唯老师、陈盛双教授对编写大纲和编写内容提出了许多宝贵的修改意见和建议,崔唯老师还对书稿内容进行了全面、深入、仔细地审阅和修订,李宇皓、程晓、朱洁、赵巍巍、夏蕾、姚碧涛、吴少芹、祝杰对本书的出版也提供了许多帮助,在此向他们一并表示诚挚的感谢。

由于编者水平有限,编写时间仓促,教材中难免存在诸多不妥和疏漏之处,恳请广大读者批评指正。

编 者
2015年4月

目 录

第一章 函数与极限	1
第一节 函数	1
一、函数概念及其表示	1
二、函数的几种特性	4
三、初等函数	5
四、极坐标与参数方程	8
习题一	11
第二节 数列的极限	12
一、数列极限的定义	12
二、收敛数列的性质	14
习题二	15
第三节 函数的极限	16
一、函数极限的定义	16
二、函数极限的性质	20
习题三	20
第四节 无穷小与无穷大	21
一、无穷小	21
二、无穷大	22
习题四	23
第五节 极限运算法则	24
习题五	26
第六节 极限存在准则 两个重要极限	27
一、极限存在准则	27
二、两个重要极限	28
习题六	32
第七节 无穷小的比较	32
习题七	34
第八节 函数的连续性与间断点	35

一、函数的连续性·····	35
二、函数的间断点·····	37
习题八·····	39
第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性·····	40
习题九·····	42
第十节 闭区间上连续函数的性质·····	43
一、有界性与最大值最小值定理·····	43
二、零点定理与介值定理·····	43
习题十·····	45
总习题一·····	45
第二章 导数与微分·····	48
第一节 导数的概念·····	48
一、引例·····	48
二、导数的定义·····	49
三、导数的几何意义·····	53
四、函数可导性与连续性的关系·····	54
习题一·····	56
第二节 函数的求导法则·····	57
一、函数的和、差、积、商的求导法则·····	57
二、反函数的求导法则·····	59
三、复合函数的求导法则·····	60
四、基本求导法则与导数公式·····	63
习题二·····	64
第三节 高阶导数·····	65
习题三·····	68
第四节 隐函数及由参数方程确定的函数的导数·····	69
一、隐函数的导数·····	69
二、对数求导法·····	71
三、由参数方程所确定的函数的导数·····	73
习题四·····	75
第五节 函数的微分·····	76
一、微分的定义·····	76
二、微分的几何意义·····	78
三、基本初等函数的微分公式与微分的运算法则·····	79
四、微分在近似计算中的应用·····	82

习题五	83
总习题二	84
第三章 中值定理与导数的应用	87
第一节 微分中值定理	87
一、罗尔定理	87
二、拉格朗日中值定理	90
三、柯西中值定理	92
习题一	93
第二节 洛必达法则	94
一、 $x \rightarrow a$ 时的 $\frac{0}{0}$ 型未定式	94
二、 $x \rightarrow \infty$ 时的 $\frac{0}{0}$ 型未定式及 $x \rightarrow a$ 或 $x \rightarrow \infty$ 时的 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	96
三、其他型未定式	97
习题二	99
第三节 函数的单调性	100
习题三	103
第四节 函数的极值与最大值最小值	104
一、函数的极值及其求法	104
二、最大值最小值问题	108
习题四	110
第五节 曲线的凹凸性与拐点	111
习题五	115
第六节 函数图形的描绘	115
一、曲线的渐近线	115
二、函数图形的描绘	116
习题六	119
第七节 导数在经济分析中的应用	119
一、经济学中的常用函数	119
二、边际函数	120
三、函数的弹性	124
习题七	126
总习题三	127
第四章 不定积分	130
第一节 不定积分的概念与性质	130
一、原函数与不定积分的概念	130

二、基本积分表	132
三、不定积分的性质	134
习题一	136
第二节 换元积分法	137
一、第一类换元积分法	138
二、第二类换元积分法	143
习题二	148
第三节 分部积分法	150
习题三	153
总习题四	154
第五章 定积分	156
第一节 定积分的概念与性质	156
一、定积分问题举例	156
二、定积分的定义	158
三、定积分的几何意义	159
四、定积分的性质	159
习题一	163
第二节 微积分基本公式	164
一、积分上限函数及其导数	165
二、牛顿-莱布尼茨公式	167
习题二	169
第三节 定积分的计算	171
一、定积分的换元积分法	171
二、定积分的分部积分法	175
三、反常积分	177
习题三	182
总习题五	184
第六章 定积分的应用	187
第一节 定积分的微元法	187
第二节 定积分在几何学中的应用	188
一、平面图形的面积	188
二、旋转体的体积	192
三、平面曲线的弧长	194
习题二	197
第三节 定积分在经济学中的应用	198

一、由变化率求总量	198
二、由边际函数求总量函数	199
习题三	200
总习题六	201
第七章 微分方程	203
第一节 微分方程的基本概念	203
一、引例	203
二、微分方程及其类型	204
三、微分方程的解	206
习题一	207
第二节 一阶微分方程	208
一、可分离变量的微分方程	208
二、齐次方程	210
三、一阶线性微分方程	212
习题二	216
第三节 可降阶的高阶微分方程	217
一、 $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程	217
二、 $y''=f(x, y')$ 型的微分方程	218
三、 $y''=f(y, y')$ 型的微分方程	219
习题三	220
第四节 二阶常系数线性微分方程	221
一、解的结构	221
二、二阶常系数齐次线性微分方程	223
三、二阶常系数非齐次线性微分方程	224
习题四	228
第五节 一阶差分方程	230
一、基本概念	230
二、一阶常系数线性差分方程	232
习题五	235
总习题七	236
第八章 多元函数微分学	239
第一节 空间解析几何简介	239
一、空间直角坐标系	239
二、空间两点间的距离	240
三、曲面与方程	241

第二节 多元函数的概念	245
一、多元函数的基本概念	245
二、二元函数的极限	248
三、二元函数的连续性	250
习题二	251
第三节 偏导数	252
一、偏导数的概念	252
二、高阶偏导数	256
习题三	257
第四节 全微分	258
一、全微分的概念	258
二、全微分在近似计算中的应用	260
习题四	261
第五节 多元复合函数的求导法则	262
习题五	266
第六节 多元隐函数的求导法则	267
习题六	270
第七节 多元函数的极值及其求法	270
一、二元函数的极值	270
二、二元函数的最大值与最小值	272
三、条件极值 拉格朗日乘法	274
习题七	278
总习题八	278
第九章 二重积分	282
第一节 二重积分的概念与性质	282
一、二重积分的概念	282
二、二重积分的性质	284
习题一	287
第二节 二重积分的计算	288
一、利用直角坐标计算二重积分	288
二、利用极坐标计算二重积分	295
习题二	300
总习题九	302
第十章 无穷级数	306
第一节 常数项级数的概念和性质	306

一、常数项级数的概念	306
二、收敛级数的基本性质	309
习题一	312
第二节 常数项级数的审敛法	313
一、正项级数及其审敛性	313
二、交错级数及其审敛法	321
三、绝对收敛与条件收敛	322
习题二	323
第三节 幂级数	325
一、函数项级数的概念	325
二、幂级数及其收敛域	326
三、幂级数的运算	329
习题三	332
第四节 泰勒公式与泰勒级数	332
一、泰勒公式	332
二、泰勒级数	335
三、函数展开成幂级数	337
习题四	341
总习题十	341
附录一 初等数学中的一些计算公式	345
附录二 基本初等函数的图形及主要性质	347
习题参考答案	349

第一章 函数与极限

函数是现代数学基本概念之一,是高等数学研究的主要对象。函数关系是变量间的依赖关系,而极限的思想方法则是研究变量的基本方法。本章介绍函数、极限、函数的连续性等基本概念以及基本性质。

第一节 函数

一、函数概念及其表示

1. 变量与函数

所谓变量是指在某一过程中不断变化的量。例如某地的气温、某时刻世界人口的总数等都是变量。在任何一种自然现象或任何一个经济活动中,各个变量的变化不是孤立的,而是彼此联系并遵循着一定的变化规律,这种变量之间的依赖关系就是数学上要讨论的函数关系。

在某一研究过程中变量往往在某个指定的范围内取值。这个取值范围常用区间来表示。

2. 区间与邻域

本书中涉及的数都是实数,所以,若不特别说明,书中提到的数均为实数,数集均为实数集。

设 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a < b$ 。

称数集 $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ 为闭区间, 记为 $[a, b]$;

称数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 为开区间, 记为 (a, b) ;

称数集 $\{x \mid a \leq x < b\}, \{x \mid a < x \leq b\}$ 为半开区间, 分别记为 $[a, b), (a, b]$;

以上这些区间都为有限区间, a, b 称为区间的端点, 数 $b - a$ 称为区间的长度。

引入记号 $+\infty$ (读作正无穷大), $-\infty$ (读作负无穷大), 则下列区间为无限区间。

$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$, $[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}$, $(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$,
 $(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}$, $(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\} = \mathbf{R}$ 。

注意 $+\infty$ 与 $-\infty$ 是两个符号, 不是实数。

设 a 与 δ 是两个实数, 且 $\delta > 0$ 。数集 $\{x \mid a - \delta < x < a + \delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域, 记作 $U(a, \delta)$, 即

$$U(a, \delta) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\}。$$

点 a 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径(图 1-1)。此邻域还可表示为 $\{x \mid |x - a| < \delta\}$ 。



图 1-1

在数轴上, $|x-a|$ 表示点 x 与点 a 之间的距离, 因此, $U(a, \delta)$ 表示数轴上与点 a 的距离小于 δ 的一切点 x 的集合。

如果把邻域中心去掉, 称集合 $\{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$ 为点 a 的去心 δ 邻域, 记作 $\overset{\circ}{U}(a, \delta)$ 。

3. 函数的概念

定义 1 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定的非空数集, 如果对于每个数 $x \in D$, 变量 y 按照某个对应法则总有唯一确定的值与之对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作

$$y = f(x), x \in D.$$

数集 D 称为函数的定义域, x 称为自变量, y 称为因变量。

对于 $x_0 \in D$, 按照对应法则 f , 总有确定的值 y_0 (记作 $f(x_0)$) 与之对应, 称 $f(x_0)$ 为函数在点 x_0 处的函数值。因变量与自变量的这种相依关系通常称为函数。当 x 取遍 D 中所有值时, 对应的函数值的全体组成的数集

$$f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数的值域。

由函数的定义可知, 构成函数的要素有两个, 一个是函数的定义域, 另一个是对应法则, 而函数的值域是由定义域和对应法则所确定的。若两个函数的定义域和对应法则都相同, 则这两个函数是相同的, 而不管它们的自变量和因变量选用什么字母表示, 例如:

$f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ 与 $f(x) = x-1$ 是不同的, 因为它们的定义域不同; 而函数 $f(x) =$

$\sqrt{x^2+2} + 3\sin^2 x + 3\cos^2 x$ 与 $g(x) = 3 + \sqrt{x^2+2}$ 是相同的, 因为它们的定义域和对应法则完全相同。

表示函数的主要方法有三种: 表格法、图形法、解析法(公式法)。

例 1 绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

其定义域 $D = \mathbf{R}$, 值域 $f(D) = [0, +\infty)$, 其图形如图 1-2 所示。

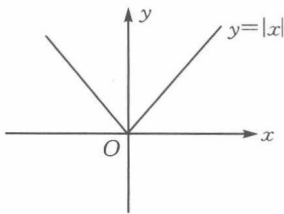


图 1-2

例 2 符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

其定义域 $D = \mathbf{R}$, 值域 $f(D) = \{-1, 0, 1\}$, 其图形如图 1-3 所示。

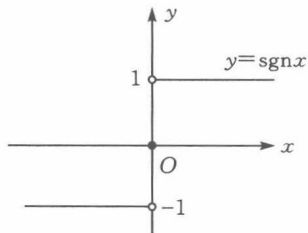


图 1-3

例 3 取整函数 $y = [x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 其定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $f(D) = \mathbf{Z}$, 其图形如图 1-4 所示。该图形称为阶梯曲线, 在 x 为整数时, 图形发生跳跃, 跃度为 1。

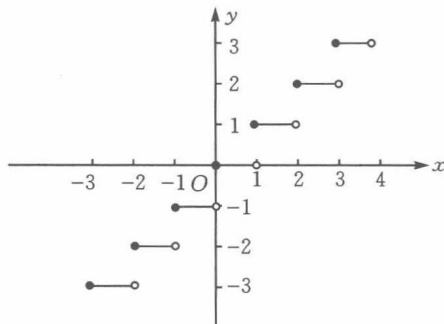


图 1-4

从以上三个例子可以看到, 有时一个函数要用几个式子表示, 这种在自变量不同变化范围中, 对应法则用不同式子来表示的函数, 通常称为分段函数。

例 4 设 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ 1, & 0 < x < 1, \\ 2x-1, & 1 \leq x < 2, \end{cases}$ 它是一个分段函数, 定义域为 $(-\infty, 0) \cup$

$(0, 2)$, 其图形如图 1-5 所示。

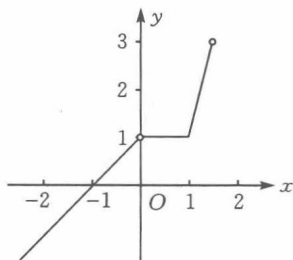


图 1-5

二、函数的几种特性

1. 函数的有界性

定义 2 设函数 $f(x)$ 在某区间上有定义,若存在正数 M ,使得对于该区间上任意点 x ,都有 $|f(x)| \leq M$ 成立,则称函数 $f(x)$ 在该区间上有界;否则,就称函数 $f(x)$ 在该区间上无界。

显然,在某区间上有界函数 $f(x)$ 的图形一定在该区间上介于两条平行直线 $y = \pm M$ 之间。

例如,函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界。因为 $|\sin x| \leq 1 (x \in \mathbf{R})$ 。而 $y = \frac{1}{x}$ 在开区间 $(0, 1)$ 内无界,但在区间 $[1, +\infty)$ 内是有界的。由此可见,函数的有界性与所选的区间有关。

2. 函数的单调性

定义 3 设函数 $f(x)$ 在某区间 I 上有定义,若对于该区间上任意两点 x_1, x_2 ,当 $x_1 < x_2$ 时,恒有 $f(x_1) < f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的(图 1-6);如果对于区间 I 上任意两点 x_1, x_2 ,当 $x_1 < x_2$ 时,恒有 $f(x_1) > f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的(图 1-7)。

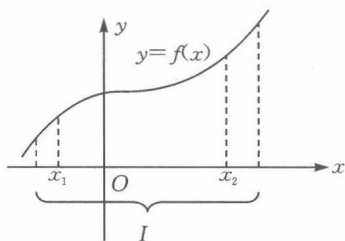


图 1-6

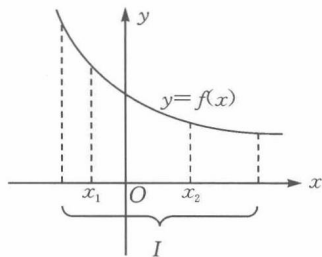


图 1-7

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数。例如 $y = x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 内单调减少,在 $(0, +\infty)$ 内单调增加,但在整个定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内不是单调函数。

3. 函数的奇偶性

定义 4 如果函数 $f(x)$ 在一个关于原点对称的定义域 D 内有定义,若对每一个 $x \in D$,都有 $f(-x) = f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数;若对每一个 $x \in D$,都有 $f(-x) = -f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数。

例如, $y = 3x^2$ 与 $y = \cos x - x^4$ 是偶函数, $y = -2x^3$ 与 $y = \sin x$ 是奇函数。

显然,奇函数的图形关于原点对称,而偶函数的图形关于 y 轴对称。

例 5 判断下列函数的奇偶性。

$$(1) f(x) = \frac{1}{a^x + 1} - \frac{1}{2} \quad (\text{其中 } a > 0 \text{ 且 } a \neq 1);$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} -x^3 + 1, & x < 0, \\ x^3 + 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad (1) f(-x) &= \frac{1}{a^{-x}+1} - \frac{1}{2} = \frac{a^x}{1+a^x} - \frac{1}{2} = \frac{1+a^x-1}{1+a^x} - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{1+a^x} + \frac{1}{2} = -f(x), \end{aligned}$$

因此, $f(x)$ 是奇函数。

$$\begin{aligned} (2) f(-x) &= \begin{cases} -(-x)^3+1, & -x < 0 \\ (-x)^3+1, & -x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} x^3+1, & x > 0 \\ -x^3+1, & x \leq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x^3+1, & x \geq 0 \\ -x^3+1, & x < 0 \end{cases} = f(x), \end{aligned}$$

因此, $f(x)$ 是偶函数。

4. 函数的周期性

定义 5 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个非零常数 T , 使得对于 D 内的任意 $x \in D, (x+T) \in D$, 都有 $f(x+T) = f(x)$ 成立, 则称 $f(x)$ 为周期函数, T 称为 $f(x)$ 的周期, 通常我们说周期函数的周期是指最小正周期。

例如, $y = \sin x$ 与 $y = \cos x$ 都是周期为 2π 的周期函数, 而 $y = \tan x$ 与 $y = \cot x$ 都是周期为 π 的周期函数。

例 6 求函数 $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ 的周期。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad y &= \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x \\ &= 1 - \frac{\sin^2 2x}{2} = 1 - \frac{1 - \cos 4x}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x, \end{aligned}$$

所以, 函数 y 的周期 $T = \frac{\pi}{2}$ 。

三、初等函数

1. 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数统称为基本初等函数。

(1) 幂函数 $y = x^\alpha (\alpha \in \mathbf{R})$, 其定义域随 α 的不同而不同。

(2) 指数函数 $y = a^x (a > 0$ 且 $a \neq 1)$, 其定义域为 \mathbf{R} 。当 $0 < a < 1$ 时, $y = a^x$ 为单调减函数; 当 $a > 1$ 时, $y = a^x$ 为单调增函数。

在实际中, 常出现以 e 为底的指数函数 $y = e^x$, 其中 $e = 2.71828 \cdots$ 是一个无理数。

(3) 对数函数 $y = \log_a x$, 其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 其定义域为 $(0, +\infty)$ 。

以 10 为底的对数函数记为 $y = \lg x$, 称为常用对数; 而以 e 为底的对数函数记为 $y = \ln x$, 称为自然对数。

(4) 三角函数 正弦函数 $y = \sin x$; 余弦函数 $y = \cos x$; 正切函数 $y = \tan x$; 余切函数 $y = \cot x$; 正割函数 $y = \sec x$; 余割函数 $y = \csc x$ 。

$y = \sin x, y = \cos x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$;

$y = \tan x, y = \sec x$ 的定义域为 $\{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$;

$y = \cot x, y = \csc x$ 的定义域为 $\{x \mid x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ 。

(5) 反三角函数

反正弦函数 $y = \arcsin x$, 它是正弦函数 $y = \sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的反函数, 其定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 如图 1-8 所示。

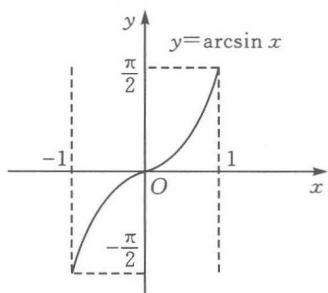


图 1-8

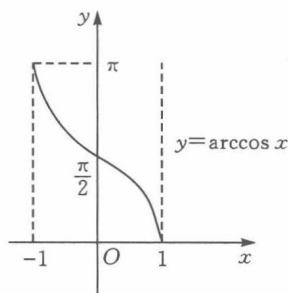


图 1-9

反正切函数 $y = \arctan x$, 它是正切函数 $y = \tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上的反函数, 其定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 如图 1-10 所示。

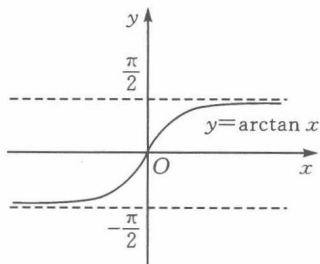


图 1-10

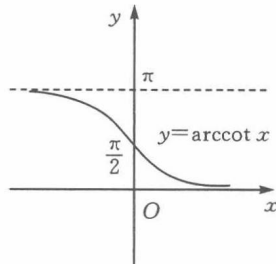


图 1-11

反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$, 它是余切函数 $y = \cot x$ 在 $(0, \pi)$ 上的反函数, 其定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(0, \pi)$, 如图 1-11 所示。

2. 反函数

设函数 $y = f(x)$, 若将 y 作为自变量, x 作为因变量, 则由关系式 $y = f(x)$ 唯一确定的函数 $x = \varphi(y)$ 称为 $y = f(x)$ 的反函数。习惯上, 自变量用 x 表示, 因变量用 y 表示, 因此, $x = \varphi(y)$ 可写成 $y = \varphi(x)$, 或用 $y = f^{-1}(x)$ 表示。

显然 $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 互为反函数。它们的图形关于直线 $y = x$ 对称。

需要指出的是, 并非所有的函数都存在反函数。例如, $y = x^2$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内