无穷维系统的可控性与稳定性研究

郜治新 著

Stability and Controllability of Infinite Dimensional System Research

科学出版社

无穷维系统的可控性与稳定性研究

邰治新 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

无穷维系统有时也称分布参数系统，是指由抽象空间上一般微分方程、偏微分方程或泛函微分方程描述的系统。本书采用不同方法分别研究无穷维Banach空间上抽象时滞系统的可控性问题、由偏微分方程描述的无穷维系统以及中立型泛函定常时滞系统的稳定性问题，其中包括不动点定理方法、无穷维模糊T-S模型方法以及特征方程频域法等。本书是作者多年研究工作的积累，强调基础性、深入性、严谨性和前沿性，对主要研究成果尽可能从基本概念和基本定理出发作详尽论述。

本书可供从事无穷维系统控制理论研究的高等院校自动控制、应用数学等相关专业的教师、高年级学生及研究生参考和借鉴。

图书在版编目（CIP）数据

无穷维系统的可控性与稳定性研究/郇治新著. —北京：科学出版社，2016.1
ISBN 978-7-03-046252-7

Ⅰ.①无… Ⅱ.①郇… Ⅲ.①自动控制理论-研究 Ⅳ.①TP13

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第264452号

责任编辑：姜 红 张 震 / 责任校对：胡小洁
责任印制：徐晓晨 / 封面设计：无极书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http：//www.sciencep.com
北京教图印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2016年1月第 一 版 开本：B5（720×1000）
2016年1月第一次印刷 印张：7 7/8
字数：113 000

定价：65.00元
（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

无穷维系统有时也称分布参数系统，是指由抽象空间上一般微分方程、偏微分方程或泛函微分方程描述的系统。实际中出现的多数系统，如柔性机械结构的振动过程、化工过程中活塞流反应器化学反应动态过程以及物理学中描述量子运动状态的薛定谔量子力学方程等都属于无穷维系统。

本书采用不同方法分别研究无穷维 Banach 空间上抽象时滞系统的可控性问题、由偏微分方程描述的无穷维系统以及中立型泛函定常时滞系统的稳定性问题，其中包括不动点定理方法、无穷维模糊 T-S 模型方法以及特征方程频域法等。

全书共分 7 章。第 1 章是绪论；第 2 章和第 3 章针对无穷维抽象时滞系统的可控性研究目前仅局限于整数阶的无穷维系统问题，研究了 Banach 空间上分式阶抽象脉冲中立型无穷时滞泛函和发展两类积-微分系统的可控性，利用分式阶微积分学、算子半群、豫解算子和 Krasnoselskii 不动点定理，建立了上述两类系统的可控性判据。由于算子具有多值映射性质，还研究了作为抽象时滞系统更一般扩展化模型的分式阶抽象脉冲中立型无穷时滞泛函积-微分包含的可控性问题，利用 Leray-Schauder 多值不动点定理，建立了该积-微分包含的可控性判据。除无穷时滞以外，还采用了加权相空间和 Dhage 多值不动点定理研究了分式阶抽象脉冲中立型状态依赖时滞发展积-微分包含的可控性问题，得到了一些有意义结果，丰富了 Banach 空间上抽象系统的可控性理论。

针对由线性偏微分方程描述的线性无穷维系统的稳定性分析问题，Fridman 等提出了统一框架：首先将线性无穷维系统转化为 Hilbert 空间上的线性系统，利用线性算子不等式，给出相应系统的稳定性条件，其中决策变量为 Hilbert 空间上的算子；然后，将线性算子不等式应用于热传导方程和波动方程，转化为可数值求解的有穷维线性矩阵不等式。因此，

如何将线性算子不等式技术应用于非线性和随机偏微分方程这两类无穷维系统的稳定性研究中将成为本书第 4 章和第 5 章主要研究的问题。

第 6 章针对作为线性中立型定常时滞系统一般化扩展模型的线性不确定中立型泛函定常时滞系统鲁棒稳定性问题，首先从确定有界长方形不稳定区域的角度，利用由系统矩阵函数的有界变差定义的系统矩阵函数范数，建立了范数有界不确定泛函系统的鲁棒稳定性判据，并以不平凡方式推广了文献中有关线性确定性中立型多时滞系统的稳定性结果；其次提出了变差有界不确定性这一新概念，该新概念是中立型泛函时滞系统所独有的，因为在具体中立型时滞系统中，仅能讨论范数有界或多面体不确定性。在此概念基础上，利用了由系统矩阵函数有界变差所形成的非负矩阵的谱半径，推导得到了变差有界不确定泛函系统的鲁棒稳定性判据，并作为特例给出了与文献中有关线性确定性中立型单时滞系统稳定性结果相平行的判据，计算表明所给出的稳定性判据提供了能保证线性中立型泛函系统渐近稳定性的更大的时滞上界和系统参数鲁棒区间，是不保守的，因而改进了以往文献中所给出的结果。

第 7 章研究了非线性状态中立型泛函定常时滞系统的稳定性问题。利用由系统矩阵函数有界变差所形成的非负矩阵的谱半径、一阶近似稳定性理论以及特征方程频域法，建立了非线性状态中立型泛函系统的稳定性判据，并以不平凡方式推广了有关非线性状态中立型定常时滞系统的稳定性结果，数值例子表明了所给出的稳定性判据的有效性。

本书的多数内容是我在攻读博士学位期间完成的，部分研究工作曾得到国家自然科学基金面上项目“不确定无穷维系统鲁棒控制研究与应用”（项目编号：60574018）的资助。因此，首先衷心感谢大连海事大学博士生导师王兴成教授的栽培和辛勤培养，同时也感谢众多关心和帮助过我的人。

本书仓促之间不免有不妥之处，恳请专家、学者和同仁多加批评指正。

著　者

2015 年 7 月

目　录

第 1 章　绪　　论

针对由抽象空间上一般微分方程、偏微分方程或泛函微分方程描述的无穷维系统，曾经有人试图得到能为一大类无穷维系统应用的普遍的算子形式，而另外有些人则从特殊的无穷维系统开始研究，如时滞微分方程或弦波动方程。经过一段时间的研究，发现不可能找到一种求解所有无穷维问题的普遍形式，只能是具体问题具体分析[1]。

因此，本书采用不同方法分别研究无穷维 Banach 空间上抽象时滞系统的可控性问题、由偏微分方程描述的无穷维系统以及中立型泛函定常时滞系统的稳定性问题，其中包括不动点定理方法、无穷维模糊 T-S 模型方法以及特征方程频域法等。

1.1　无穷维系统的可控性研究

无穷维系统一个最重要的定性行为就是可控性，即利用可允许的控制使系统在某有限时间内从任意初始状态到任意终止状态的可能性[2]。描述为无穷维空间中抽象微分系统的可控性问题来自于物理学和技术科学的许多分支，如材料中依赖过去状态的热流、黏弹性和其他物理现象[3]。

一方面，无穷维空间中抽象微分系统的可控性问题已经得到许多学者的研究。Balachandran 在文献[4]中研究了 Banach 空间上二阶非线性积-微分系统的可控性，利用有界线性算子所形成的强连续余弦族理论和 Schaefer 不动点定理，建立了该系统可控性的一些充分判据。在文献[5]中，Balachandran 等研究了 Banach 空间上带无穷时滞的中立型泛函发展积-微分系统的可控性问题，利用解析半群理论和 Nussbaum 不动点定理，建立了该系统可控性的一些充分条件，该结果推广了文献[6]～[8]中的判据结果。Sakthivel[9]研究了 Banach 空间上非线性中立

型发展积-微分系统的可控性问题，通过豫解算子和 Schaefer 不动点定理，得到了有关该系统可控性的结果，并应用于偏积-微分方程。在文献[10]中，Sakthivel 研究了 Banach 空间上非线性发展积-微分系统的可控性问题，并采用与文献[9]相似的方法，建立了该可控性的充分判据。在文献[11]中，Sakthivel 研究了 Banach 空间上非自治半线性发展积-微分系统的存在性与可控性问题，在并未像以往文献那样对豫解算子施加严格的紧性条件的情况下，利用不动点分析方法，建立了该存在性和可控性结果的充分条件。

另一方面，在工程实践中，许多发展过程在某些瞬间时刻经历着发展状态的突变，因而研究带脉冲效应的动态系统具有更重要的意义[12]。文献[13]指出，这些过程常常受到短期摄动的影响，而这些摄动的持续时间相对过程的持续时间是可以忽略的，因此很自然地假设这些摄动是瞬时动作的，即以脉冲形式动作的。在文献[12]中，Li 等研究了 Banach 空间上一阶脉冲泛函微分系统的可控性，利用 Schaefer 不动点定理，给出了该可控性的充分条件。Park 在文献[13]中，指出文献[12]中的结果仅与有穷时滞有关并且脉冲函数被假设为有界，因而在文献[13]中利用半群理论与 Schauder 不动点定理，研究了 Banach 空间上带无穷时滞的脉冲中立型积-微分系统的可控性，对该系统并没有施加脉冲函数有界性条件。文献[14]在研究 Banach 空间上带无穷时滞的脉冲泛函微分系统可控性时，也同文献[13]一样，未对脉冲函数施加有界性条件。

由于算子具有多值映射性质，作为无穷维空间中抽象微分系统更一般扩展化模型的抽象微分包含的可控性问题也得到了广泛的研究。在文献[15]中，Liu 考虑了以往相关文献未曾讨论过的带无穷时滞和脉冲效应的泛函微分包含，研究了带无穷时滞的一阶脉冲中立型泛函微分包含的可控性，利用 Martelli 多值不动点定理，建立了该可控性的充分条件。在文献[16]中，针对文献[15]中研究的相同系统，利用算子的分式幂和 Dhage 多值不动点定理，给出了该系统的可控性判据。Chang 等[17]利用 Dhage 多值不动点定理和发展系统，研究了 Banach 空间上发展微分包含的可控性。

除以上研究的无穷时滞抽象微分系统以外，状态依赖时滞的抽象微

分系统也得到了许多学者的关注。Hernandez 等研究了带状态依赖时滞的脉冲抽象偏微分方程[18]、偏中立型泛函微分方程[19]、脉冲发展微分方程[20]和偏中立型泛函微分方程[21]的存在性问题。在文献[22]中，Li 等研究了带状态依赖时滞的脉冲中立型发展微分包含的可解性。但是，带状态依赖时滞的抽象微分系统可控性还尚未研究。

另外，最近 Balachandran 等[2]研究了 Banach 空间上分式阶积-微分系统的可控性。到目前为止，除文献[2]以外，大部分研究的都是整数阶抽象微分系统的可控性，分式阶脉冲中立型无穷时滞和状态依赖时滞抽象积-微分系统和包含的可控性还有待系统地研究。

1.2　无穷维系统的稳定性研究

除可控性以外，无穷维系统另一个最重要的定性行为就是稳定性。针对由线性偏微分方程描述的线性无穷维系统的稳定性分析，Fridman 等提出了统一框架[23]：首先将线性无穷维系统转化为 Hilbert 空间上的线性系统，利用线性算子不等式，给出相应系统的稳定性条件，其中决策变量为 Hilbert 空间上的算子；然后，将线性算子不等式应用于热传导方程和波动方程，转化为可数值求解的有穷维线性矩阵不等式。因此，如何将线性算子不等式技术应用于非线性和随机偏微分方程这两类无穷维系统的稳定性研究中将成为本书主要研究的问题之一。

目前，关于作为一类无穷维系统的中立型泛函微分系统的稳定性问题的研究成果仍是有限的[24-26]。在文献[24]中，以不平凡的方式将最近得到的关于线性中立型微分系统稳定性问题的研究结果推广到线性中立型泛函微分系统。具体来说，在文献[24]中，首先从检验复平面某一合适半圆盘中该泛函微分系统特征方程根的角度，给出线性自治算子型中立型泛函微分系统稳定性的一个判据，然后又给出三个稳定性充分条件，其中两个条件是利用变差有界系统矩阵函数所形成的非负矩阵谱半径推导得到的，另一个条件是从系统矩阵函数相应的非负矩阵测度和范数的角度给出的，最后通过一个例子表明了所得判据的可应用性。但是关于线性不确定中立型泛函微分系统鲁棒稳定性分析的问题目前仍尚待

解决。事实上，由于存在外部未知噪声、环境影响以及不确定或慢变参数等，系统模型总是包含某些不确定性，不确定性可以影响系统的动态特性。因此，研究不确定中立型泛函微分系统鲁棒稳定性分析的问题以便更好地理解该系统行为和结构属性是有价值的。

另外，除了研究线性中立型泛函微分系统稳定性以外，有关非线性中立型泛函微分系统的稳定性分析在以往文献中尚未得到研究，这类系统在应用中是一般的和实用的。在文献[27]中指出，关于非线性中立型微分方程稳定性问题的讨论在实际应用中，如在模式识别、图像处理和组合优化中，具有相当的重要性。于是文献[27]研究了以往很少讨论的非线性状态中立型系统的稳定性问题，根据一阶近似稳定性理论和特征方程频域方法，给出了相应的稳定性判据。但是，对于其一般化扩展模型的非线性状态中立型泛函微分系统稳定性分析的问题还有待深入地研究。

1.3 本书论述的主要内容

本书采用不动点定理方法、无穷维模糊 T-S 模型方法以及特征方程频域法等分别研究了无穷维 Banach 空间上抽象时滞系统的可控性问题、由偏微分方程描述的无穷维系统以及中立型泛函定常时滞系统的稳定性问题。

全书共分 7 章。第 1 章绪论；第 2 章研究了带无穷时滞的分式阶脉冲中立型泛函和发展两类积-微分系统的可控性问题。到目前为止，绝大多数无穷维系统可控性结果仅适用于整数阶的无穷维系统，但是对分式阶无穷维系统可控性的研究并不多见。本章利用了分式阶微积分学、算子半群、豫解算子和 Krasnoselskii 不动点定理，建立了中立型泛函和发展两类无穷维积-微分系统可控性的充分判据。在推导可控性充分判据中，对脉冲函数分别施加了非线性 Lipschitz 条件和具有连续非减函数的上确界条件，并将可控性问题转换为和算子 $\Gamma+\Theta$ 的不动点问题，首先证明了和算子 $\Gamma+\Theta$ 对有界集合的封闭性；其次，通过表明算子 Γ 对有界集合值域的相对紧性以及该值域中函数的一致有界性和等度连续性，根

据 Arzela-Ascoli 定理，证明了算子 $\varGamma$ 对有界集合值域闭包的紧性，接着又证明了算子 $\varGamma$ 的连续性，从而满足了 Krasnoselskii 不动点定理中有关算子 $\varGamma$ 为全连续算子的条件；再次，证明了有关算子 $\varTheta$ 为压缩算子的条件；最后，根据 Krasnoselskii 不动点定理，表明了和算子 $\varGamma+\varTheta$ 不动点的存在性，从而最终证明了该两类无穷维积-微分系统的可控性判据。

第 3 章研究了带无穷时滞和状态依赖时滞的分式阶脉冲中立型泛函和发展两类积-微分包含系统的可控性问题。本章利用了分式阶微积分学、算子半群、豫解算子和 Leray-Schauder 多值不动点定理、Dhage 多值不动点定理，分别建立了中立型无穷时滞泛函和状态依赖时滞发展两类无穷维积-微分包含系统可控性的充分判据。在推导无穷时滞抽象包含系统可控性充分判据中，对脉冲函数施加了具有连续非减函数的上确界条件，并将可控性问题转换为多值算子 $\varGamma$ 的不动点问题，首先通过表明多值算子 $\varGamma$ 对有界集合值域的相对紧性以及该值域中函数的一致有界性和等度连续性，根据 Arzela-Ascoli 定理，证明了多值算子 $\varGamma$ 为全连续的，并具有非空紧值；其次，根据 Lasota-Opial 引理，证明了多值算子 $\varGamma$ 有闭图，进而利用多值算子上半连续的充要判据，证明了多值算子 $\varGamma$ 为上半连续的；再次，根据系统多值算子的凸性，证明了多值算子 $\varGamma$ 为凸的；最后，根据 Leray-Schauder 多值不动点定理，通过表明定理中边界条件是不成立的，因而证明了多值算子 $\varGamma$ 不动点的存在性以及相应的无穷时滞抽象包含系统的可控性判据。类似地，在推导状态依赖时滞抽象包含系统可控性充分判据中，将可控性问题转换为多值算子 $\varGamma+\varTheta$ 的不动点问题，首先证明了多值算子 $\varGamma$ 为上半连续紧算子，并具有非空闭凸值；其次，证明了多值算子 $\varTheta$ 为有界、闭凸和压缩算子；最后，根据 Dhage 多值不动点定理，通过表明定理中边界条件是不成立的，因而证明了多值算子 $\varGamma+\varTheta$ 不动点的存在性以及相应的状态依赖时滞抽象包含系统的可控性判据。

第 4 章将由常微分方程描述的有穷维非线性系统控制问题的模糊 T-S 模型方法推广到由偏微分方程描述的无穷维非线性控制问题中，提出了无穷维模糊 T-S 模型方法。依据模糊 T-S 模型对非线性动态系统的万能逼近理论，针对非线性双曲型和抛物型无穷维复值参数系统，分别

建立了由线性双曲型和抛物型偏微分方程描述的动态 T-S 模糊系统，利用线性算子不等式，分析了复 Hilbert 空间上无穷维模糊 T-S 系统的指数稳定性和耗散性，并利用 Wirtinger 不等式，给出了可数值求解的相应稳定性和耗散性条件。另外，值得一提的是，本章在研究无穷维系统耗散性问题中，提出了无穷维版能量供给率（$\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{R}_1$），其中算子$\boldsymbol{Q}_1$为负半定无界算子，这表征了无穷维版能量供给率的特点。

第 5 章针对 Lur'e 随机无穷维控制系统的绝对随机输入-状态稳定性以及均方指数稳定性问题，首先利用线性算子不等式技术，给出了 Hilbert 空间中扇区[0，$\boldsymbol{K}$]的相应稳定性条件，然后利用回环变换技术，给出了相应扇区[$\boldsymbol{K}_1, \boldsymbol{K}_2$]的稳定性结果，其中算子$\boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}_1, \boldsymbol{K}_2$为线性无界算子，并将相应 Hilbert 空间中稳定性结果应用于随机波动方程，给出了可数值求解的随机稳定性条件。

第 6 章研究了针对作为线性中立型定常时滞系统一般化扩展模型的线性不确定中立型泛函定常时滞系统鲁棒稳定性问题，首先从确定有界长方形不稳定区域的角度，利用由系统矩阵函数的有界变差定义的系统矩阵函数范数，建立了范数有界不确定泛函系统的鲁棒稳定性判据，并以不平凡方式推广了文献中有关线性确定性中立型多时滞系统的稳定性结果；其次提出了变差有界不确定性这一新概念，该新概念是中立型泛函时滞系统所独有的，因为在具体中立型时滞系统中，仅能讨论范数有界或多面体不确定性。在此概念基础上，利用了由系统矩阵函数有界变差所形成的非负矩阵的谱半径，推导得到了变差有界不确定泛函系统的鲁棒稳定性判据，并作为特例给出了与文献中有关线性确定性中立型单时滞系统稳定性结果相平行的判据，Matlab 计算表明本书的稳定性判据提供了能保证线性中立型泛函系统渐近稳定性的更大的时滞上界和系统参数鲁棒区间，是不保守的，因而改进了以往文献中所给出的结果。

有关非线性中立型微分系统稳定性问题的讨论在实际应用中，如在模式识别、图像处理和组合优化中，具有相当的重要性。除线性中立型泛函定常时滞系统以外，第 7 章研究了非线性状态中立型泛函定常时滞系统的稳定性问题。利用由系统矩阵函数有界变差所形成的非负矩阵的谱半径、一阶近似稳定性理论以及特征方程频域法，建立了非线性状态

中立型泛函系统的稳定性判据，并以不平凡方式推广了有关非线性状态中立型定常时滞系统的稳定性结果，数值例子表明了所给出的稳定性判据的有效性。

参 考 文 献

[1] 刘豹. 现代控制理论. 第2版. 北京：机械工业出版社，1997.

[2] Balachandran K，Park J Y. Controllability of fractional integrodifferential systems in Banach spaces. Nonlinear Analysis：Hybrid Systems，2009，3（4）：363-367.

[3] Chang Y K. Controllability of impulsive functional differential systems with infinite delay in Banach spaces. Chaos，Solitons and Fractals，2007，33（5）：1601-1609.

[4] Balachandran K. Controllability of second-order integrodifferential evolution systems in Banach spaces. Computers and Mathematics with Applications，2005，49（11-12）：1623-1642.

[5] Balachandran K，Leelamani A，Kim J H. Controllability of neutral functional evolution integrodifferential systems with infinite delay. IMA Journal of Mathematical Control and Information，2008，25（2）：157-171.

[6] Wang L，Wang Z. Controllability of abstract neutral functional differential systems with infinite delay. Dynamic Continuous and Discrete Impulsive System Series B Applied Algorithms，2002，9（1）：59-70.

[7] Fu X. Controllability of neutral functional differential systems in abstract space. Applied Mathematics and Computation，2003，141（2-3）：281-296.

[8] Balachandran K，Anandhi E R. Controllability of neutral functional integrodifferential infinite delay systems in Banach spaces. Taiwanese Journal of Mathematics，2004，8（4）：689-702.

[9] Sakthivel R. Controllability of nonlinear neutral evolution integro-differential systems. Journal of Mathematical Analysis and Application，2002，275（1）：402-417.

[10] Sakthivel R. Controllability result for nonlinear evolution integro-differential systems. Applied Mathematics Letters，2004，17（9）：1015-1023.

[11] Sakthivel R. Existence and controllability result for semilinear evolution integro-

differential systems. Mathematical and Computer Modelling，2005，41（8-9）：1005-1011.

[12] Li M，Wang M，Zhang F. Controllability of impulsive functional differential systems in Banach spaces. Chaos， Solitons and Fractals，2006，29（1）：175-181.

[13] Park J Y. Controllability of impulsive neutral integrodifferential systems with infinite delay in Banach spaces. Nonlinear Analysis：Hybrid Systems，2009，3（3）：184-194.

[14] Chang Y K. Controllability of impulsive functional differential systems with infinite delay in Banach spaces. Chaos， Solitons and Fractals，2007，33（5）：1601-1609.

[15] Liu B. Controllability of impulsive neutral functional differential inclusions with infinite delay. Nonlinear Analysis，2005，60（8）：1533-1552.

[16] Chang Y K. Controllability of impulsive neutral functional differential inclusions with infinite delay in Banach spaces. Chaos，Solitons and Fractals，2009，39（4）：1864-1876.

[17] Chang Y K， Li W T， Nieto J J. Controllability of evolution differential inclusions in Banach spaces. Nonlinear Analysis，2007，67（2）：623-632.

[18] Hernandez E， Pierri M， Goncalves G. Existence results for an impulsive abstract partial differential equation with state-dependent delay. Computers and Mathematics with Applications，2006，52（3-4）：411-420.

[19] Hernandez E， Mckibben M A. On state-dependent delay partial neutral functional-differential equations. Applied Mathematics and Computation，2007，186（1）：294-301.

[20] Hernandez E， Sakthivel R， Aki S T. Existence results for impulsive evolution differential equations with state-dependent delay. Electronic Journal of differential Equations，2008，28：1-11.

[21] Hernandez E， Mckibben M， Henriquez H. Existence results for partial neutral functional differential equations with state-dependent delay. Mathematical and Computer Modelling，2009，49（5-6）：1260-1267.

[22] Li W S，Chang Y K，Nieto J J. Solvability of impulsive neutral evolution differential inclusions with state-dependent delay. Mathematical and Computer Modelling，

2009，49（9-10）：1920-1927.

[23] Fridman E. Exponential stability of linear distributed parameter systems with time-varying delays. Automatica，2009，45（1）：194-201.

[24] Ngoc P H A，Lee B S. Some sufficient conditions for exponential stability of linear neutral functional differential equations. Applied Mathematics and Computation，2005，170（1）：515-530.

[25] Hale J K，Lunel S M V，Sjoerd M. Strong stabilization of neutral functional differential equations，Special issue on analysis and design of delay and propagation systems. IMA Journal of Mathematical Control and Information，2002，19（1-2）：5-23.

[26] Sengadir T，Padhi S. Stability and asymptotic stability of neutral functional differential equations. Differential Equations and Dynamic System，1999，2：239-249.

[27] Xiong W，Liang J. Novel stability criteria for neutral systems with multiple time delays. Chaos，Solitons and Fractals，2007，32（5）：1735-1741.