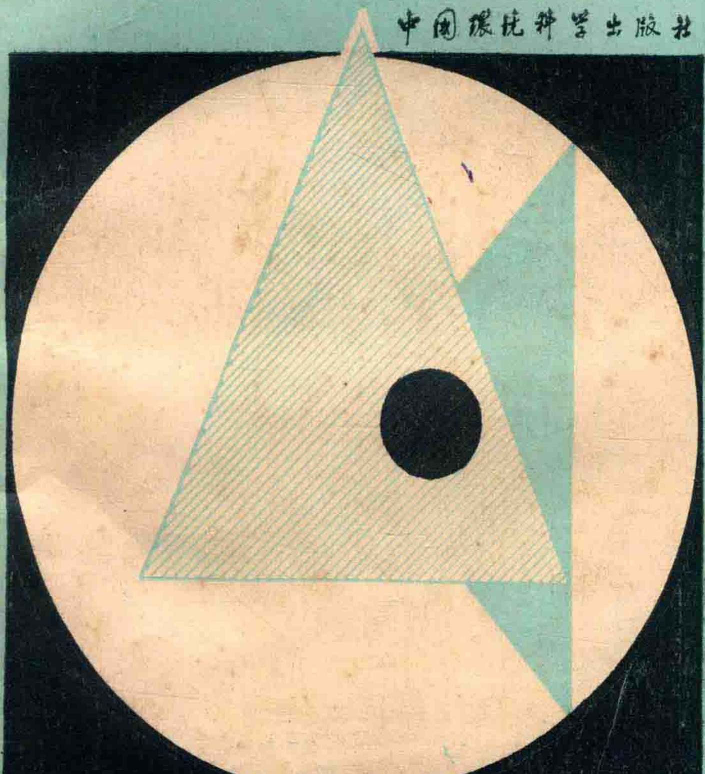
标准化训练与能力培养

高中代数　第一册

编写组顾问　崔孟明

周去难　梁子木　徐望根　刘　春　编

中国环境科学出版社



标准化训练与能力培养

高中代数 第一册

编写组顾问 崔孟明

周去难 梁子木 徐望根 刘 春 编

中国环境科学出版社

1989

内 容 简 介

本书根据教学改革精神编写。全书包括三章，分别介绍了幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、两角和与差的三角函数等知识，每章都有重点知识与能力要求、解题方法指导、标准化训练题、自学阅读参考等内容，根据教与学的基本要求，本书重点在于加强所学知识的“双基”训练和应用知识的能力的培养，目的是配合课堂教学，提高学习效果。本书适合高中学生，教师以及广大自学青年阅读。

标准化训练与能力培养

高中代数　第一册

编写组顾问　崔孟明

周去难　梁子木　徐望根　刘　春　编

*

中国环境科学出版社出版

北京崇文区东兴隆街69号

北京昌平兴华印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行　　各地新华书店经售

*

1989年12月 第 一 版　　开本 787×1092 1/32

1989年12月 第一次印刷　　印张 10 1/2 插页 1

印数 1—31 000　　字数 243千字

ISBN 7-80010-572-5/G·193

定价：3.60元

前　言

《标准化训练与教学》和《能力培养与标准化命题》两套教法与学法丛书问世以来，受到了广大读者的欢迎。为了减轻读者的负担，提高学习效率，现将两套丛书合并精简，定名为《标准化训练与能力培养》。

《标准化训练与能力培养》集中了前两套丛书的优点，弥补了它们各自的不足，以更丰富的内容和更高的质量奉献给读者。

《标准化训练与能力培养》突出了知识结构（包括知识的纵的和横的关系等诸方面），并根据知识的规律划分出单元，作出“重点知识分析”，提高“能力要求”。这就从联系和对比等角度指点了基本概念、基本理论、基本计算、基本事实以及它们的一些基本关系，就把住了各段知识的“双基”训练，并指导了学生的学习方法。

这套丛书是依据中，外学者的研究成果，如美国心理学家布鲁姆的认知理论，苏联教育家巴班斯基的最佳教学过程理论，并结合我国教学中的具体情况，把能力要求分为记忆理解、应用、分析综合等能力层次，做到掌握学习，提高能力。

为了把知识结构与训练相结合，本书备有“解题方法指导”，着重指导“解题思路”。这就突出了思维的基本训练，奠定了提高能力的基础，使学生排除“就题论题”，注意培养“双基”运用的基本思路及程序，从而摆脱“题海”的束缚。

这套书根据教学目标管理的原理和"双基"要求，编有"标准化训练题"，朝着"科学化"、"标准化"的方向改革，其目的是为教师进行教学改革提供必要的参考。这套书指的标准化则是更广义的，它的主要内容是：

1.训练的内容与所学"双基"诸内容具有对应性，可检查基本知识，又检查学生分析问题和解决问题的能力；

2.训练的覆盖面大，涉及到教学的所有主要部分，而且往往带有各部分知识的交叉、综合和对比；

3.训练的难度适当；

4.训练题目的表达语和指导语要标准规范，尽量明确无误；

5.训练的方式、题型较多，包括最佳答案选择题、因果选择题、多解选择题、配伍选择题、组合选择题、比较选择题、填空选择题、是非判断题、程序性选择题以及规范性的填空简答题、计算题、改错题等。有正面、侧面、反面不同角度的训练等等。

相信这种"标准化题"有利于把住基本的教学要求，减轻学生负担，并方便师生教学上的反馈、控制、自我测试，达到提高教学质量的目的。

这套丛书中所列举的"自学阅读参考"，课内外知识结合，扩大了视野，引发了兴趣，为第二课堂提供了教材，为教师研究调动非智力因素提供参考。

这套书由北京景山学校校长、特级教师崔孟明为编写组顾问，编著者大多是第一线有经验的教师，部分是教学研究人员。他们在教学改革中，特别是在落实"双基"和学生训练上有较丰富的实践，有些教师在"知识结构单元"的教法上卓有成效。有些教师在落实"双基"、"培养能力"的训练程序上取得成绩。这套书中有许多标准化训练题就是从他

们的训练实践中经过测试和科学比较筛选出来的。他们从实践中认识到片面追求升学率不但违背教学规律，而且建立在“猜题压题”的不可靠的基础上。平时抓住“双基”，搞“结构化”，抓住“标准训练”则负担轻、质量高，不但可以符合国家的要求，而且能面向大多数学生，减轻学生过重的负担。实践证明，平时能这样教学，遵循教育科学规律，就能提高教学质量。当然，由于这套书的整理比较仓促，虽几经审阅修改，也难免出现不足和错误。我们诚恳地希望广大师生和社会青年读者多提宝贵意见，并跟我们一起进行教与学的改革，提高教学质量。

中国环境科学出版社是为环境科学宣传教育和学术研究服务的。我们意识到要提高全民族的环境意识，必须提高人民的文化素质，要提高文化素质又必须发展基础教育，因此我们按照邓小平同志的有关指示精神竭诚地为基础教育改革服务。我们特请有经验的基础教育专家学者和教师当我们的顾问，与我们合作，编写适合中小学教师和学生阅读的有关教法、学法改革的系列读物，这套《标准化训练与能力培养》列入“环境基础文化教育丛书”，还将继续出版供中小学师生阅读的“环境科学教育丛书”及青少年环境科学普及读物，欢迎基础教育界广大中小学师生给予指导和合作。

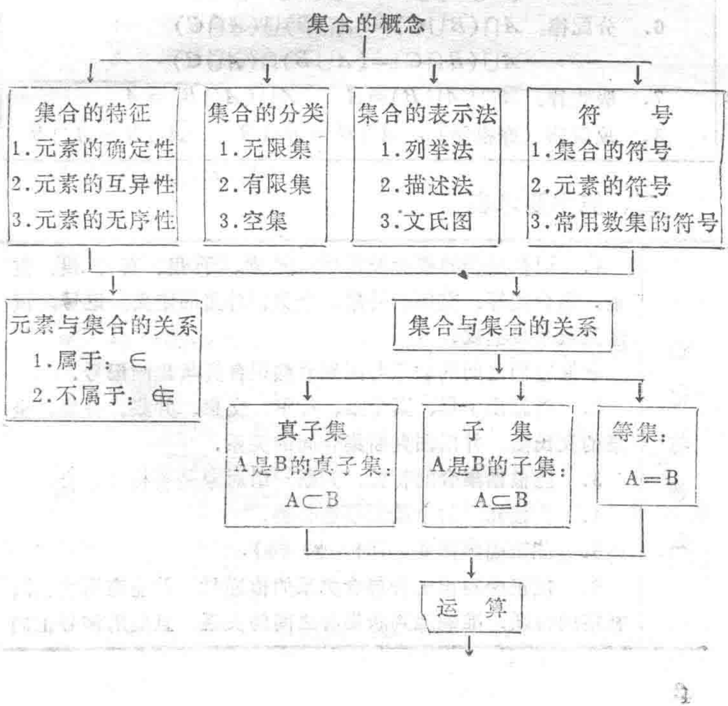
目　录

第一章 幂函数、指数函数和对数函数

第一单元 集 合

〔重点知识与能力要求〕

一、知识联系表



交集：$A\cap B$ 并集：$A\cup B$ 全集 I 与补集 $\overline{A}$

运算性质

1. 等幂律：$A\cap A=A$ $A\cup A=A$
2. 同一律：$A\cap \mathrm{I}=A$ $A\cup \mathrm{I}=\mathrm{I}$
   $A\cap \phi=\phi$ $A\cup \phi=A$
3. 互补律：$A\cap \overline{A}=\phi$ $A\cup \overline{A}=\mathrm{I}$
   $\overline{\overline{A}}=A$ $\overline{\mathrm{I}}=\phi$, $\overline{\phi}=\mathrm{I}$
4. 交换律：$A\cap B=B\cap A$ $A\cup B=B\cup A$
5. 结合律：$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
   $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$
6. 分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
   $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
7. 吸收律：$A\cap(A\cup B)=A$ $A\cup(A\cap B)=A$
8. 反演律（摩根律）：$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

二、能力要求表

识记与领会	1. 记住集合的概念及记号：元素、子集、真子集、空集、集合相等、交集、并集、全集、补集的定义，记号，读法及数学表达式． 掌握它们之间的联系与区别并熟记各类数集的记号． 2. 能画出子集、真子集、等集、交集、并集、补集、全集的文氏图，并用图判断集合间的关系． 3. 能根据集合的特征，判断一组对象是否构成集合． 4. 会按元素的个数对集合分类． 5. 能正确解释 0，{0}，ϕ，{ϕ}． 6. 能正确写出集合包含关系的传递性，并能应用交、并、补集的性质，准确地判断集合之间的关系，且能用符号正确

续表

	表示.
应用	1、能用列举法、描述法及根据集合元素的特点选用适当的方法表示集合. 2. 能准确地用各类符号表示元素与集合间、集合与集合间的关系. 3. 能写出含有少量元素的所有子集、真子集. 4. 能用集合表示一些数学命题并化简. 5. 能根据集合的定义、性质. 由已知一些集合求集合的交、并、补集或已知集合的一些关系求原集合. 6. 能用区间及集合的形式准确地表达一元二次不等式的解.
分析与综合	1. 培养推理论证能力 2. 培养数形结合能力 3. 培养综合运用能力

〔解题方法指导〕

例1 下列语句中不能描述为集合的是（　　）.

A．自然数的全体；

B．与一条线段两个端点的距离相等的所有的点；

C．平面α内的多边形；

D．著名的艺术家；

E．细长的长方形的全体.

解：因为“著名的艺术家”与“细长的长方形”都不满足给定集合的元素应具有确定性的要求，所以都不能描述为集合．答案应选D和E．

小结：集合是数学中最原始最基本的概念之一，同几何

中的点（没有形状、大小），线（没有粗细），面（没有厚薄）等原始概念一样，没有必要也不能用其它的概念给它下定义，对它只作描述性的说明.

从“每一组对象的全体形成一个集合”描述性的说明中，了解到概念的内涵很小，只要求一组对象，甚至连一组对象是否具有共同性质都未要求，但集合的外延却很大，它的对象可以是数、式、点、图形、小到粒子大到宇宙，万事万物，无所不包，即使是同一个集合中的元素也可以是各式各样的，因此要认识到它的“整体性”与“任意性”.

对于一个给定的集合，它的对象应是确定的，互不相同的及在集合中的位置顺序是无关的，即集合的特性：确定性、互异性、无序性.

例2 选择适当的关系符号填空

(1) 0 ____ ϕ；　　(2) 0 ____ $\{0\}$；

(3) $\{0\}$ ____ ϕ；　　(4) $\{0\}\cap\{\phi\}$ ____ ϕ；

(5) $\{0\}$ ____ $\{\{0\},\ \phi\}$；　　(6) ϕ ____ $\{\phi\}$.

解 (1) $\notin$；　(2) $\in$；　(3) $\supseteq$；

(4) $=$；　(5) $\in$；　(6) $\in$ 或 $\subset$.

小结：①$0$表示数0是元素不是集合，$\{0\}$表示只含有一个元素0的集合，ϕ表示不含有任何元素的空集，$\{\phi\}$表示含有一个元素ϕ的单元素集.

②元素与集合的关系只有“$\in$”与“$\notin$”两种关系，集合与集合的关系有“$\subseteq$、$\supseteq$、$\subset$、$\supset$、$=$与$\nsubseteq$、$\nsupseteq$、$\not\subset$、$\not\supset$、$\neq$十种关系.

③ϕ与$\{\phi\}$的关系，若将ϕ看作是$\{\phi\}$中的元素，则$\phi\in\{\phi\}$，若将ϕ看作集合，则$\phi\subset\{\phi\}$.

④不含任何元素的集合叫空集，记作ϕ，把空集表示为$\{\phi\}$或$\{0\}$或$\{空集\}$都是错误的. 空集具有给定集合的三个

特征，它确实是一个集合，在客观世界中确实存在空集这样的集合．如：$\{x|(x-1)^2<0\}$．在集合中有了空集，类似于实数中有了数0一样，对集合的研究和应用带来诸多方便．

例3　用列举法表示下列集合

（1）不大于10的非负偶数集；

（2）{两边分别在坐标轴的正半轴上，且边长为1的正方形的顶点}；

（3）{15的正约数}；

（4）自然数中不大于10的质数集．

解　（1）∵不大于10是小于等于10；非负是大于等于零的意思．∴不大于10的非负偶数集是{0，2，4，6，8，10}；

（2）{(0，0)，(1，0)，(1，1)，(0，1)}；

（3）∵1和自然数本身是当然约数，答案是{1，3，5，15}；

（4）在自然数中，除1以外只能被1和本身整除的数叫质数，1既不是质数也不是合数，但2是质数，所以答案是{2，3，5，7}．

小结：列举法是把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合的方法．

所谓一一列举就是将集合中的元素不重复、不计次序、不遗漏地列出且元素与元素之间用“，”逗号隔开．其优点是集合中的元素一目了然，但有时书写费事，有些集合如：有理数集Q、实数集R等不能用列举法表示．

例4　用描述法表示下列集合：

（1）自然数集合、整数集合、有理数集合、实数集合；

（2）被5除余1的正整数集合；

（3）使$y=\dfrac{1}{x^2+x-6}$有意义的实数x的集合；

（4）不在一、三象限的点的集合；

（5）坐标平面内，两坐标轴上的点集；

（6）坐标平面内，以x轴为中心轴线，宽度为2的带形区域（包括边界）中的点的集合；

（7）$A\cap\overline{B}$；

（8）$A\cup B$；

（9）$\overline{A}\cap\overline{B}$；

（10）$\overline{A}\cup\overline{B}$.

解：（1）$N=\{$自然数$\}=\{n|n$为自然数$\}$；

$Z=\{$整数$\}=\{x|x=\pm n,\ n\in N$或$n=0\}$；

$Q=\{$有理数$\}=\{x|x=\frac{q}{p},\ p,\ q\in Z$且$q\neq 0\}$；

$R=\{$实数$\}=\{x|x\in R\}$；

（2）$\{x|x=5k+1,\ k\in Z^{+}$或$k=0\}$；

（3）$\{x|x\neq 2$且$x\neq -3,\ x\in R\}$；

（4）$\{(x,\ y)|xy\leqslant 0,\ x\in R,\ y\in R\}$，

（5）$\{(x,\ y)|xy=0\}$；

（6）$\{(x,\ y)||y|\leqslant 1,\ x\in R\}$；

（7）$A\cap\overline{B}=\{x|x\in A$且$x\notin B\}$；

（8）$A\cup B=\{x|x\in A$或$x\in B\}$；

（9）$\overline{A}\cap\overline{B}=\{x|x\in \mathrm{I}$且$x\notin A$且$x\notin B\}$

$=\{x|x\in \mathrm{I}$且$x\notin A\cup B\}$；

（10）$\overline{A}\cup\overline{B}=\{x|x\in \mathrm{I}$且$x\notin A$或$x\notin B\}$

$=\{x|x\in \mathrm{I}$且$x\notin A\cap B\}$.

小结：描述法表示集合时，大括号内可以是文字描述，也可以是数学式子描述．若用文字描述时，要注意文字精练，概念准确．如：整数的集合应写作$Z=\{$整数$\}$，防止写成$\{$全体整数$\}$、$\{$整数集$\}$、$\{Z\}$的错误．$\{$整数集$\}$、$\{Z\}$、$\{$实数集$\}$、$\{R\}$、$\{\phi\}$等分别表示只有一个元素Z、R、ϕ

的单元素集合；如果用数学式子描述，它有一种常用的模式是$\{x|P\}$，x是集合的代表元素，竖线是隔开符号，P是指元素x所具有的公共属性，需要多层次描述属性时，可选择关联词"且"、"或"等联结，若描述部分出现元素记号以外的字母时，要进一步对新字母说明其含义或指出取值范围.

两种表达方式都是把集合中的元素的公共属性描述出来写在大括号内. 因此，描述法的优点就是突出了集合元素的公共属性，有较大的普遍性，但有些集合无法用描述法表达.

例5 方程组 $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=-1 \end{cases}$ 的解集是 （　　）

A. $\{x=0, y=1\}$；　　B. $\{0, 1\}$；

C. $\{(0, 1)\}$；　　D. $\{(x, y)|x=0$或$y=1\}$.

解： $\because$ $\left\{(x, y)\middle|\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=-1 \end{cases}\right\}$

$$=\left\{(x, y)\middle|\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}\right\}$$

$$=\{(0, 1)\}.$$

$\therefore$ 选择C.

小结：因为方程组的解是一对有序实数对$(0, 1)$，所以用列举法表示解集应是$\{(0, 1)\}$.

$\{x=0, y=1\}$不符合集合表示法的基本模式，既不是列举法也不是描述法；$\{0, 1\}\neq\{(0, 1)\}$，集合$\{0, 1\}$中包含0，1两个元素，集合$\{(0, 1)\}$是单元素集合；集合$\{(x, y)|x=0$或$y=1\}$的元素是$(0, y)$或$(x, 1)$其中x，y是实数，这个集合有无限多个元素.

用描述法表示集合时如：$\{(x, y)|x=0$且$y=1\}$，又

如：$\left\{(x,\ y,\ z)\ \middle|\ \begin{cases}x+y=3\\y+z=4\\z+x=5\end{cases}\right\}$ 竖线前面的代表元素可以是一维的，也可以是二维、三维、多维的。当用列举法表示时，应分别是$\{(0,\ 1)\}$、$\{(2,\ 1,\ 3)\}$，切忌写成$\{0,\ 1\}$，$\{2,\ 1,\ 3\}$；因为前者表示集合内是由一个不可分割的有序实数组的元素构成的单元素集，后者的集合内分别有2个或3个元素．

例6 设$A=\{0,\ a\}$，且$B=\{x\mid x\subseteq A\}$，则集合A与集合B的关系是

A．$A\subset B$；　　　B．$B\subseteq A$；

C．$A=B$；　　　D．$A\in B$．

解：$\because\quad B=\{x\mid x\subseteq A\}=\{\ \phi,\ \{0\},\ \{a\},\ \{0,\ a\}\ \}$

$\therefore\quad A\in B$，故选D．

小结：只要深刻理解构成集合的法则，就不难理解一个元素可以是一个集合，同时一个集合也可以是由许多集合作元素而构成．因此，要区分同一事物在不同研究场合，有时被当作元素，有时被当作集合．但是集合本身不能作为自己的元素，也不存在包含所有集合的集合．

因为集合的元素的任意性，该题的集合A是集合B中的一个元素，集合B又是由4个集合作元素构成，A又成B中的一个元素，A和B的关系便成为从属关系．

例7 下列命题中正确的是　　　　　　　　（　）

A．任意一个集合都有真子集；

B．空集无子集；

C．B的子集是由B的部分元素组成；

D．空集是任何集合的真子集；

E．设$A\subseteq B$，若$a\notin B$，则$a\notin A$；

F．$f(x)=0$ 的解集是 $f(x)\cdot g(x)=0$ 解集的子集．

G．分别在两条平行线上的点，组成的两个集合无交集．

解：∵空集 ϕ 没有真子集，空集是任何非空集合的真子集，空集是任何集合的子集，一个集合是它本身的子集，∴A，B，D 都是错误的．C 不符合子集的定义，而两条平行线上的点，组成的两个集合的交集是空集，故 C、G 也是错误的．

对于命题 E，用反证法：

假设 $a\notin A$ 不成立，则 $a\in A$ 成立

∵ $A\subseteq B$，∴ $a\in B$ 与已知 $a\notin B$ 矛盾

∴ $a\notin A$，命题 E 正确．

对于命题 F

设 $f(x)=0$ 与 $g(x)=0$ 的解集分别为 A 和 B，则 $f(x)\cdot g(x)=0$ 的解集为 $A\cup B$，所以 F 是正确的．

小结：只要深刻理解概念的实质，抓住概念与概念之间的内在联系与区别，就能准确地判断命题及纠正一些似是而非的认识，如：集合 A 是集合 B 的子集，最本质的东西是“集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素”，理解这句话的含义注意两点：第一，不管集合 A 是否含有元素，也不管集合 A 含有有限个元素还是含有无限个元素；第二，只要是 A 的元素一定是 B 的元素．抓住这两点，就能判断出空集是任何集合的子集，空集的子集是空集．同时集合 A 不但可以含有集合 B 的部分元素，也可以不含有任何元素或者含有集合 B 的全部元素．

又如：集合 A 是集合 B 的真子集的概念要注意两点：第一，A 是 B 的子集是 A 是 B 的真子集的必要条件；第二，B 中至少有一个元素不属于 A，即属于 B 但不属于 A 的元素可以是

有限个，也可以是无限个．从而判断出空集是任何非空集合的真子集，空集没有真子集．

例8　设全集 $I=R$，$M=Z^-$，$N=Q^-$，则 $\overline{M}$ 与 $\overline{N}$ 的关系正确的是　　　（　　）

A．$\overline{M}\subset\overline{N}$；　　　B．$\overline{M}\supset\overline{N}$；

C．$\overline{M}=\overline{N}$；　　　D．上述关系都不正确

解：$\because$　$\overline{M}=\{x|x\in R$，且 $x\notin Z^-\}$

$\overline{N}=\{x|x\in R$，且 $x\notin Q^-\}$

$\therefore$　$\overline{M}\supset\overline{N}$，故选 B．

小结：在研究集合与集合间的关系时，如果这些集合都是某一个给定的集合的子集，这个给定的集合叫全集．理解全集的概念，要注意三点：第一，在所研究问题中的所有集合都是全集的子集；第二，全集含有所研究集合的全部元素；第三，对于已给的集合来说，全集不是唯一的．

若已知全集 I，集合 $A\subseteq I$，由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做集合 A 在集合 I 中的补集，即 $\overline{A}=\{x|x\in I$ 且 $x\notin A\}$．理解补集的概念要注意两点：第一，一个确定的集合，对于不同的全集，有不同的补集，即补集的相对性；如：已知 $I=R$，$A=Q^-$，求 $\overline{A}$？$\because I=R$，$\therefore \overline{A}=\overline{Q}\cup Q^+\cup\{0\}$．若将 I 换成 $I=Q$，则 $\overline{A}=\overline{Q^-}$；第二，对任意的一个集合和它的补集来说，都是"并"则全，"交"则空，即 $A\cup\overline{A}=I$，$A\cap\overline{A}=\phi$．

例9　对任意两个集合 A 和 B，下列命题中正确的是

（　　）

A．$(A\cap B)\subset A$；　　　B．$\phi\subset(A\cap B)$；

C．$(A\cap B)=A$；　　　D．$(A\cap B)\subseteq B$

解：当 $A=B$ 时，$A\cap B=A$；当 $B=\phi$ 时，$A\cap B=\phi$，只有 D 正确，$\therefore$ 选 D．