

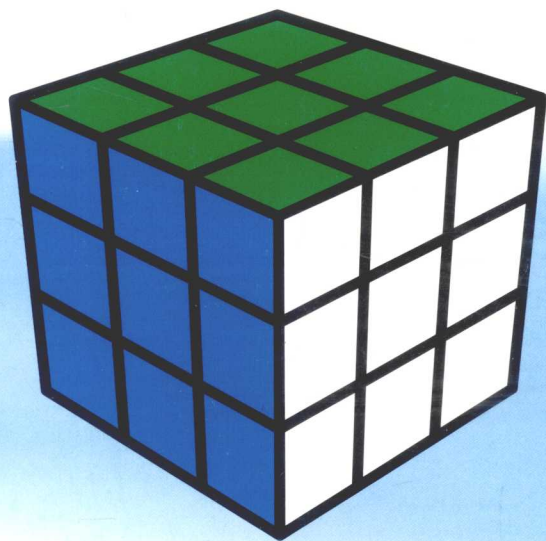


iCourse · 教材  
高等学校通识课程系列

# 魔方里的 科学和文化

The Science  
and Culture  
in Rubik's Cube

李世春



高等教育出版社



iCourse · 教材  
高等学校通识课程系列

# 魔方里的 科学和文化

李世春

The Science  
and Culture  
in Rubik's Cube

高等教育出版社·北京

## 内容提要

本书是作者 30 年魔方研究的总结, 结合“魔方和数学建模”国家精品视频公开课, 论述了魔方里的文化内涵、科学隐喻和魔方的复位, 将魔方起源追溯到中国 5000 年前的洛书, 探究了匈牙利产生和传播魔方的科学文化背景。本书使用晶体学符号和群论的方法, 创立了能描述  $N$  阶魔方的数学模型, 给出了二阶至十一阶魔方的复位方法, 建立了魔方和准晶体等多种科学隐喻关系。本书同步制作了电子书, 以便读者更多地了解魔方的历史文化、更直观地掌握魔方的复位。

本书可作为科学和文化传播案例的教材, 也可供魔方、数学和计算机编程爱好者参考。

## 图书在版编目(CIP)数据

魔方里的科学和文化 / 李世春编. — 北京: 高等教育出版社, 2015. 10  
iCourse·教材. 高等学校通识课程系列  
ISBN 978-7-04-043864-2

I. ①魔… II. ①李… III. ①智力游戏—研究—高等学校—教材 IV. ①G898.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第228458号

策划编辑 蒋青  
插图绘制 于博

责任编辑 蒋青  
责任校对 窦丽娜

封面设计 张志奇  
责任印制 田甜

版式设计 王艳红

出版发行 高等教育出版社  
社址 北京市西城区德外大街4号  
邮政编码 100120  
印刷 北京宏伟双华印刷有限公司  
开本 787 mm×1092 mm 1/16  
印张 16  
字数 230 千字  
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598  
网 址 <http://www.hep.edu.cn>  
<http://www.hep.com.cn>  
网上订购 <http://www.landaco.com>  
<http://www.landaco.com.cn>  
版次 2015 年10月第1版  
印次 2015 年10月第1次印刷  
定价 36.50 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换  
版权所有 侵权必究  
物料号 43864-00

## 序

李世春将魔方的起源追溯到中国 5000 年前的洛书,而且科学地阐述了从洛书到魔方的演化过程。李世春使用晶体学符号,根据点群理论建立了能描述  $N$  阶魔方的数学模型,在数学模型的基础上,给出了求解魔方问题的计算机程序。李世春还以魔方为模型,讨论了晶体学、群论、晶体电子衍射、夸克、混沌和基因等科学问题,在多种科学领域建立了新颖的魔方和科学的隐喻关系。

《魔方里的科学和文化》是第一部关于魔方的综合性著作,是李世春教授积 30 年研究所取得的丰硕成果。我衷心祝贺这部著作的出版,并且相信这部著作对普及科学的观念和传播相关的科学将起到积极的作用。

程开甲

2015 年 3 月

## 前言

我围绕魔方(Rubik's cube)这个主题开展的积累、写作和计算,前后有30多年的跨度。

1982年3月,我第一次接触魔方。那时我大学毕业参加工作不久,我的一位同事主动将他的魔方借给我。在两天之内,我以自己的方式复位了两层。那位同事对我的表现评价很好,认定我的天资不错。后来我在学校图书馆看到《科学》(Scientific America的中译本)上有关于魔方的文章,并且记下了基本的信息。当时我对魔方表现得非常平静,慢慢积累、慢慢琢磨。

1991年,我写了本小册子《魔方及其应用》,1992年由中国广播电视出版社出版。全书6章:魔方和八卦,魔方转动及其描述,魔方谱,魔方和健康,魔方隐喻,魔方和智力开发。此时,我的魔方计算机程序已经现成在手,但是我没有把数学模型和计算机程序写进书里,因为我认为发表数学模型和计算机程序的时机还不成熟。我也不担心别人在短期内能搞出同样的模型,这一等就是10年。

2002年,我写了《魔方的科学和计算机表现》,2003年由中国石油大学出版社出版,全书12章:魔方和洛书,魔方和八卦,魔方转动及其概念,魔方和点群,魔方投影和置换表示,魔方状态函数,魔方的循环操作和复位,高阶魔方,低阶魔方,魔方的科学隐喻,魔方转动的数学模型,魔方转动的计算机程序。书后附录了三阶魔方、四阶魔方和五阶魔方的VB程序源代码。书出版后,我在《中国科学基金》发表了一篇封面文章,题目为《魔方中的科学》,我的魔方方程被刊登在封面上。

2004年,我在中国石油大学(华东)开了一门公选课《魔方和数

学建模》,16学时1学分。

2012年,“魔方和数学建模”作为国家精品视频公开课上线,有5讲内容:魔方的文化内涵,魔方的科学隐喻,魔方的复位,魔方转动的数学描述,数学模型和程序设计。

本书是在《魔方的科学和计算机表现》的基础上扩展而成的。第1章、第9章、第10章、第11章是新著的,其他是在《魔方的科学和计算机表现》有关章节的基础上改写而成的。

第1章“魔方的诞生与传播和匈牙利的数学文化”是视频公开课第1讲“魔方的文化内涵”的背景资料,没有出现在视频公开课中。第2章“魔方的演化”是视频公开课第1讲“魔方的文化内涵”的主要内容。第16章“魔方的科学隐喻”对应视频公开课的第2讲“魔方的科学隐喻”,此外,第13章的内容,也出现在视频公开课“魔方的科学隐喻”里。第7章“三阶魔方的复位”对应视频公开课的第3讲“魔方的复位”。第8章、第9章、第10章和第11章的有关内容,以后将会出现在视频公开课的续集中。第14章的内容出现在视频公开课第4讲“魔方转动的数学描述”。第6章和第15章的内容出现在视频公开课第5讲“数学模型和程序设计”。

自1974年匈牙利人鲁毕克(Ernő Rubik)发明魔方,魔方已经走过40多年的发展历程。2014年7月,我用谷歌搜索“魔方40年”,出现了700多万条内容,足见魔方的无穷魅力。

大约在2000年前后,美国玩具市场上出现了四阶魔方和五阶魔方,其英文名称分别为Rubik's Cube Revenge和The Professor's Cube,汉译过来分别为魔方复仇者和(魔方)职业家的魔方。

三阶魔方可转动出的状态数约为 $4.3 \times 10^{19}$ ,如果用每秒百万亿次的上海“魔方”号计算机来清点魔方的状态,需要约120小时。如果用中国天河二号计算机(每秒计算33.86千万亿次)来清点三阶魔方的状态,仅需要21分钟。世界上确实有人用计算机把魔方的状态按照步长进行清点分类,得到了所谓的“上帝之数就是20”的结论,即对于任何一个被搅乱了的三阶魔方,把它复位最多只需要20步。

四阶魔方的状态数约为  $7.4 \times 10^{45}$ , 如果用天河二号计算机来清点四阶魔方的状态, 需要约  $6.88 \times 10^{21}$  年, 宇宙的年龄不到 200 亿 ( $2 \times 10^8$ ) 年。由此可见, 就是用世界上最快的计算机来清点四阶魔方的状态, 也是根本不可能完成的, 也许这就是为什么魔方爱好者们要把四阶魔方称为魔方复仇者的原因。五阶魔方有 8 个角块、6 个心块、36 个边块和 48 个面块, 其状态数约为  $2.8 \times 10^{74}$ , 如此巨大的状态数目怎么玩啊? 因此, 起初魔方爱好者们把它称为魔方职业家的魔方。

目前, 高阶魔方层出不穷, 六到十三阶魔方都可以从网上买到, 更高阶的魔方也可以从网上定做。显然, 这些高阶魔方最吸引人的地方就是如何复位。

本书不但讨论了四阶魔方和五阶魔方的复位, 而且还讨论了六阶魔方、七阶魔方、八阶魔方、九阶魔方、十阶魔方和十一阶魔方的复位问题。《魔方的科学和计算机表现》里分别讨论了四阶魔方和五阶魔方的复位, 随着高阶魔方的普及, 这次把四阶魔方和五阶魔方的复位合并在一起论述。

如果把四阶魔方每面上的 4 个面块用胶带纸贴起来, 这个四阶魔方就变成了一个三阶魔方, 这就是所谓的“降阶法”, 其他任何高阶魔方都可以这么做。由此可见, 降阶是联系三阶魔方和高阶魔方的纽带。

有了降阶概念之后, 高阶魔方的复位就被分解为两步: 一是把搅乱了的高阶魔方拼成一个降阶魔方, 二是按照三阶魔方规则把这个降阶魔方复位。

根据魔方方向指数理论可以判断, 五阶魔方包含了四阶魔方所有的小块。对于方向指数相同的小块, 可以使用同一个操作序列来操作四阶魔方和五阶魔方。这些规律对其他高阶魔方也是适用的。

以此类推, 六阶魔方和七阶魔方放在一起, 八阶魔方和九阶魔方放在一起, 十阶魔方和十一阶魔方放在一起, 等等。

对于魔方复位来说, 三阶魔方是所有魔方的基础, 而四阶魔方又是高阶魔方的基础。对于四阶魔方, 《魔方的科学和计算机表

现》给出了 5 种操作序列来交换面块,给出了 8 种操作序列来置换边块。在本书中,仍然保留了 5 种操作序列交换面块,而置换边块的操作序列保留了 4 种,分别是“左边块配对上边块”和“右边块配对上边块”两类,共有 4 种操作。删去了“下边块配对左边块”和“下边块配对右边块”两类,共 4 种操作。保留的 4 种边块置换操作序列足以应对各种情况。

读者仔细对比后不难发现,六阶魔方的操作序列是由四阶魔方递推而来的,而八阶魔方的操作序列又是由六阶魔方递推而来的,以此类推。但是,为了节约篇幅,六阶和六阶以上魔方的复位只考虑了魔方前面四分之一的面块和底面上对应的面块如何交换。在实际的复位操作中,这些操作足以应对任何情况。

需要强调的是,我在 1991 年选择用晶体学符号来描述魔方小块的方位,一直沿用至今。《魔方的科学和计算机表现》和本书中所有的符号和数学公式都是一模一样的,没有丝毫的改变。这就说明一个问题:科学符号在科学模型中的作用是至关重要的。20 多年过去了,高阶魔方层出不穷,然而我的魔方方程都可以描述它们的转动,不需要做任何修改。

如果能结合关于对称性的知识(点群理论),用我的魔方方程借助计算机可以搜寻复位操作序列,效率很高。

魔方不但可以玩复位,还可以玩图案造型。如果能用魔方来玩科学隐喻,这可能是玩魔方的最高境界。

生物遗传学有两个很重要的概念:基因型和表现型。

用魔方可以恰到好处地隐喻这两个概念。基因型就是魔方的操作序列,表现型就是用这个操作序列操作出的魔方图案(状态)。如果已知操作序列,很容易操作出魔方的图案。相反,如果已知魔方的图案,求解出能产生该图案的操作序列却是非常困难的。特别是根据高阶魔方的复杂图案,要求解出能产生该图案的操作序列,几乎是不可能的。

我本科学的是固体物理,对晶体对称性特别感兴趣。我对魔方感兴趣就是从晶体学符号切入的。后来在读硕士的时候,学了一门

“群论”课,这更加巩固了我对魔方的兴趣。

1895年,德国科学家伦琴(Wilhelm Röntgen)发现了X射线,此前人们认识晶体只是从矿物晶体的外形和数学理论的推断。直到1912年劳厄(Max Theodor Felix von Laue)发现晶体X射线衍射后才开创了从微观上研究晶体的新时代。但是在此之前,关于晶体对称性的数学理论(点群和230空间群),各国的数学家和晶体学家们都已经完成了推导。1890年,俄国晶体学家Evgraf Fedorov首先从理论上推导出了230空间群;1891年德国晶体学家Arthur Moritz Schoenflies关于230空间群,完成了同样的推导;1894年英国晶体学家William Barlow关于230空间群,也完成了同样的推导。

虽然230空间群理论(国际空间群表)经历了120多年的进化,日臻完美,但是如何准确解读和轻松理解230空间群仍有另辟蹊径的必要。我以魔方为模型,娱乐一般地把230空间群推导了一遍,收获了从阅读科学文献中体会不到的东西。

固体化学键理论和电子密度理论都需要空间群知识,例如中国科学家程开甲先生的“TFDC电子理论模型”,余瑞璜先生的“固体与分子经验电子理论”,张思远先生的“晶体分解理论”,加拿大科学家Brown的“键价理论”,等等,这些理论都需要把晶体中原子的环境搞清楚,问题的实质就是对230空间群的把握。如果遇到结构复杂的晶体,搞清楚原子环境就成难点了。于是,我在多年用计算机玩魔方的基础上,搞了一个“原子环境计算”的程序,其计算方法发表在2011年*Materials Science Forum*(材料科学论坛)。

对于准晶体,要搞清楚原子在空间中的占位,也需要借助230空间群理论。“魔方和数学建模”视频公开课第5讲播放到39分的时候,屏幕上出现了一个动画:在空间中20个棱形体头尾相接,其整体却表现出正20面体的对称性。这个动画是我用晶体学软件制作的,也就是说,是我借助晶体空间群表达了准晶体。当读者在“魔方的科学隐喻”里看到用魔方能轻松求解正20面体12个顶点坐标时,对用晶体空间群理论表达准晶体的问题,就不会感到奇怪了。

总而言之,魔方不但是个好玩的玩具,还是个好玩的科学工具,更是个好玩的科学模型。

由于水平有限,再加上《魔方里的科学和文化》是一本原创性著作,因此,书中的不妥和缺点在所难免,恳请读者批评指正。

最后,感谢我国“两弹一星”功勋科学家、国家最高科学技术奖获得者程开甲院士同意把 2003 年写给《魔方的科学和计算机表现》的序言稍加改动再次作为本书的序。

**李世春**

2015 年 3 月

## 郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010) 58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010) 82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

# 目 录

|                                  |     |
|----------------------------------|-----|
| 第 1 章 魔方的诞生与传播和匈牙利的数学文化 .....    | 001 |
| § 1.1 魔方诞生的时代背景 .....            | 002 |
| 1.1.1 美国 15 子棋对世界的影响 .....       | 002 |
| 1.1.2 20 世纪 70 年代魔方诞生在四个国家 ..... | 003 |
| 1.1.3 鲁毕克和他的魔方 .....             | 004 |
| § 1.2 群星灿烂的匈牙利数学家和魔方的传播 .....    | 005 |
| 1.2.1 群星灿烂的匈牙利数学家 .....          | 005 |
| 1.2.2 匈牙利的数学文化 .....             | 006 |
| 第 2 章 魔方的演化 .....                | 009 |
| § 2.1 魔方演化的文化路线 .....            | 010 |
| 2.1.1 洛书 .....                   | 010 |
| 2.1.2 太乙九宫占盘 .....               | 010 |
| § 2.2 魔方演化的数学路线 .....            | 011 |
| 2.2.1 汉代九宫图 .....                | 011 |
| 2.2.2 宋代杨辉的纵横图 .....             | 012 |
| 2.2.3 清代保其寿的立体幻方 .....           | 012 |
| § 2.3 魔方演化的游戏路线 .....            | 012 |
| 2.3.1 中国古代的重排九宫游戏棋 .....         | 013 |
| 2.3.2 美国 15 子棋游戏 .....           | 014 |
| 2.3.3 组合立方体游戏 .....              | 015 |

|                        |     |
|------------------------|-----|
| 第 3 章 魔方的构造和状态 .....   | 017 |
| § 3.1 魔方的力学构造 .....    | 018 |
| § 3.2 魔方的数学构造 .....    | 018 |
| 3.2.1 魔方组装状态 .....     | 018 |
| 3.2.2 魔方转动状态 .....     | 019 |
| § 3.3 魔方的心理学构造 .....   | 020 |
| 第 4 章 魔方和八卦 .....      | 021 |
| § 4.1 太极八卦坐标系 .....    | 022 |
| 4.1.1 八卦的符号体系 .....    | 022 |
| 4.1.2 八卦坐标和笛卡儿坐标 ..... | 022 |
| 4.1.3 魔方和六十四卦 .....    | 023 |
| § 4.2 八卦的对称性和周期性 ..... | 024 |
| 4.2.1 八卦的对称性 .....     | 025 |
| 4.2.2 八卦的周期性 .....     | 026 |
| § 4.3 魔方的八卦描述 .....    | 027 |
| 4.3.1 魔方八卦坐标系 .....    | 028 |
| 4.3.2 八卦九宫展开表示 .....   | 028 |
| 4.3.3 箱式展开表示 .....     | 029 |
| 第 5 章 三阶魔方转动及其描述 ..... | 031 |
| § 5.1 标准魔方 .....       | 032 |
| 5.1.1 角块的块位和色位 .....   | 032 |
| 5.1.2 边块的块位和色位 .....   | 033 |
| 5.1.3 心块的块位和色位 .....   | 033 |
| § 5.2 魔方转动参照坐标系 .....  | 033 |
| 5.2.1 魔方坐标系 .....      | 033 |
| 5.2.2 转动操作的概念 .....    | 034 |
| 5.2.3 魔方转动的表示 .....    | 035 |
| 5.2.4 魔方方位坐标系 .....    | 035 |

|                               |     |
|-------------------------------|-----|
| § 5.3 魔方的晶体学表示 .....          | 036 |
| 5.3.1 晶向指数 .....              | 036 |
| 5.3.2 魔方的方向指数 .....           | 037 |
| 5.3.3 魔方的对称性 .....            | 038 |
| 5.3.4 魔方转动的周期性 .....          | 039 |
| <br>第 6 章 $N$ 阶魔方转动及其描述 ..... | 041 |
| § 6.1 魔方的阶和方向指数 .....         | 042 |
| 6.1.1 四阶魔方 .....              | 042 |
| 6.1.2 五阶魔方 .....              | 044 |
| 6.1.3 $N$ 阶魔方问题 .....         | 046 |
| § 6.2 高阶魔方的转动符号 .....         | 047 |
| 6.2.1 四阶魔方的转动符号 .....         | 048 |
| 6.2.2 五阶魔方的转动符号 .....         | 049 |
| 6.2.3 $N$ 阶魔方的转动符号 .....      | 049 |
| <br>第 7 章 三阶魔方的复位 .....       | 051 |
| § 7.1 魔方的复位操作 .....           | 052 |
| 7.1.1 魔方复位问题 .....            | 052 |
| 7.1.2 方位坐标系 .....             | 053 |
| § 7.2 复位第一层 .....             | 054 |
| 7.2.1 上边位 .....               | 055 |
| 7.2.2 上角位 .....               | 055 |
| § 7.3 复位第二层 .....             | 056 |
| 7.3.1 前邻共轭 .....              | 056 |
| 7.3.2 右邻共轭 .....              | 057 |
| 7.3.3 调出操作 .....              | 057 |
| § 7.4 复位第三层 .....             | 057 |
| 7.4.1 边块和角块都运动的操作 .....       | 057 |
| 7.4.2 边块块位复位操作 .....          | 058 |

|              |                                                |            |
|--------------|------------------------------------------------|------------|
| 7.4.3        | 边块色位复位操作                                       | 060        |
| 7.4.4        | 角块块位复位操作                                       | 061        |
| 7.4.5        | 角块色位复位操作                                       | 063        |
| <b>第 8 章</b> | <b>四阶和五阶魔方的复位</b>                              | <b>067</b> |
| § 8.1        | 四阶和五阶魔方小块的指数                                   | 068        |
| 8.1.1        | 四阶魔方的方向指数                                      | 068        |
| 8.1.2        | 五阶魔方的方向指数                                      | 068        |
| § 8.2        | 降阶魔方                                           | 068        |
| 8.2.1        | 降阶心块                                           | 070        |
| 8.2.2        | 降阶边块                                           | 070        |
| § 8.3        | $\langle 211 \rangle$ 交换操作                     | 070        |
| 8.3.1        | $[2\bar{1}1]$ 和 $[\bar{1}\bar{1}2]$ 交换操作       | 072        |
| 8.3.2        | $[21\bar{1}]$ 和 $[\bar{1}1\bar{2}]$ 交换操作       | 073        |
| 8.3.3        | $[2\bar{1}\bar{1}]$ 和 $[\bar{1}\bar{1}2]$ 交换操作 | 074        |
| 8.3.4        | $[21\bar{1}]$ 和 $[\bar{1}\bar{1}2]$ 交换操作       | 074        |
| 8.3.5        | 四个小块的交换操作                                      | 076        |
| § 8.4        | $\langle 221 \rangle$ 交换操作                     | 076        |
| 8.4.1        | 左边块配对到上边块                                      | 077        |
| 8.4.2        | 右边块配对到上边块                                      | 079        |
| § 8.5        | $\langle 210 \rangle$ 小块的同色                    | 082        |
| 8.5.1        | 左邻关系换位操作                                       | 083        |
| 8.5.2        | 右邻关系换位操作                                       | 084        |
| 8.5.3        | 对面关系换位操作                                       | 084        |
| § 8.6        | 特殊的错位情况                                        | 084        |
| 8.6.1        | 两个边块色位错位                                       | 085        |
| 8.6.2        | 两对边块块位错位                                       | 085        |
| <b>第 9 章</b> | <b>六阶和七阶魔方的复位</b>                              | <b>087</b> |
| § 9.1        | 六阶和七阶魔方小块的指数                                   | 088        |

|                                                               |         |
|---------------------------------------------------------------|---------|
| 9.1.1 六阶魔方的方向指数 .....                                         | 088     |
| 9.1.2 七阶魔方的方向指数 .....                                         | 088     |
| § 9.2 降阶魔方 .....                                              | 089     |
| 9.2.1 降阶心块 .....                                              | 090     |
| 9.2.2 降阶边块 .....                                              | 090     |
| § 9.3 面块的操作 .....                                             | 091     |
| 9.3.1 $[311]$ 和 $[11\bar{3}]$ 交换操作 .....                      | 092     |
| 9.3.2 $\langle 321 \rangle$ 交换操作 .....                        | 092     |
| 9.3.3 $[322]$ 和 $[22\bar{3}]$ 交换操作 .....                      | 093     |
| § 9.4 边块的操作 .....                                             | 093     |
| 9.4.1 $\langle 331 \rangle$ 交换操作 .....                        | 093     |
| 9.4.2 $\langle 332 \rangle$ 交换操作 .....                        | 095     |
| § 9.5 $\langle 310 \rangle$ 和 $\langle 320 \rangle$ 的处理 ..... | 099     |
| 9.5.1 左邻关系换位操作 .....                                          | 099     |
| 9.5.2 右邻关系换位操作 .....                                          | 100     |
| 9.5.3 对面关系换位操作 .....                                          | 100     |
| <br>第 10 章 八阶和九阶魔方的复位 .....                                   | <br>101 |
| § 10.1 八阶和九阶魔方小块的指数 .....                                     | 102     |
| 10.1.1 八阶魔方的方向指数 .....                                        | 102     |
| 10.1.2 九阶魔方的方向指数 .....                                        | 103     |
| § 10.2 降阶魔方 .....                                             | 104     |
| 10.2.1 降阶心块 .....                                             | 104     |
| 10.2.2 降阶边块 .....                                             | 105     |
| § 10.3 面块的操作 .....                                            | 106     |
| 10.3.1 $[411]$ 和 $[11\bar{4}]$ 交换操作 .....                     | 106     |
| 10.3.2 $\langle 421 \rangle$ 交换操作 .....                       | 107     |
| 10.3.3 $[422]$ 和 $[22\bar{4}]$ 交换操作 .....                     | 107     |
| 10.3.4 $\langle 431 \rangle$ 交换操作 .....                       | 107     |
| 10.3.5 $\langle 432 \rangle$ 交换操作 .....                       | 108     |

|         |                                                                           |     |
|---------|---------------------------------------------------------------------------|-----|
| 10.3.6  | $[433]$ 和 $[3\bar{3}4]$ 交换操作                                              | 108 |
| § 10.4  | 边块的操作                                                                     | 109 |
| 10.4.1  | $\langle 441 \rangle$ 置换操作                                                | 109 |
| 10.4.2  | $\langle 442 \rangle$ 置换操作                                                | 111 |
| 10.4.3  | $\langle 443 \rangle$ 置换操作                                                | 114 |
| § 10.5  | $\langle 410 \rangle$ , $\langle 420 \rangle$ 和 $\langle 430 \rangle$ 的处理 | 118 |
| 10.5.1  | 左邻关系换位操作                                                                  | 119 |
| 10.5.2  | 右邻关系换位操作                                                                  | 119 |
| 10.5.3  | 对面关系换位操作                                                                  | 119 |
| <br>    |                                                                           |     |
| 第 11 章  | 十阶和十一阶魔方的复位                                                               | 121 |
| § 11.1  | 十阶和十一阶魔方小块的指数                                                             | 122 |
| 11.1.1  | 十阶魔方的方向指数                                                                 | 122 |
| 11.1.2  | 十一阶魔方的方向指数                                                                | 123 |
| § 11.2  | 降阶魔方                                                                      | 124 |
| 11.2.1  | 降阶心块                                                                      | 124 |
| 11.2.2  | 降阶边块                                                                      | 125 |
| § 11.3  | 面块的操作                                                                     | 126 |
| 11.3.1  | $[511]$ 和 $[1\bar{1}5]$ 交换操作                                              | 127 |
| 11.3.2  | $\langle 521 \rangle$ 交换操作                                                | 127 |
| 11.3.3  | $[522]$ 和 $[2\bar{2}5]$ 交换操作                                              | 128 |
| 11.3.4  | $\langle 531 \rangle$ 交换操作                                                | 128 |
| 11.3.5  | $\langle 532 \rangle$ 交换操作                                                | 129 |
| 11.3.6  | $[533]$ 和 $[3\bar{3}5]$ 交换操作                                              | 129 |
| 11.3.7  | $\langle 541 \rangle$ 交换操作                                                | 129 |
| 11.3.8  | $\langle 542 \rangle$ 交换操作                                                | 130 |
| 11.3.9  | $\langle 543 \rangle$ 交换操作                                                | 130 |
| 11.3.10 | $[544]$ 和 $[4\bar{4}5]$ 交换操作                                              | 131 |
| § 11.4  | 边块的操作                                                                     | 131 |
| 11.4.1  | $\langle 551 \rangle$ 置换操作                                                | 131 |