决战新课堂

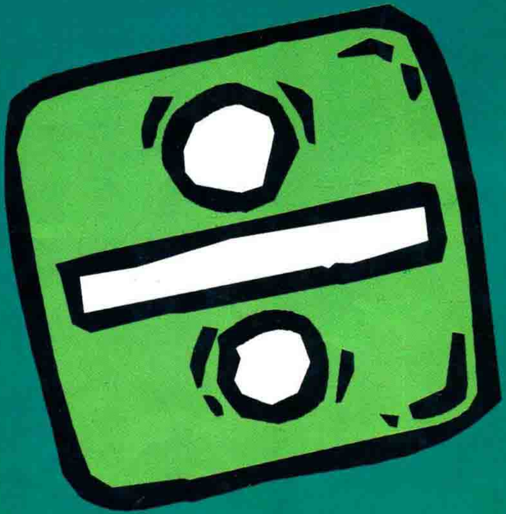
新课程师资培训教程

初中二年级代数

教学设计与课例

JIAOXUE SHEJI YU KELI

根据教育部课程标准编写
北京师联教育科学研究所 主编



$\pi=3.1415926\cdots\cdots$

远方出版社

决战新课堂

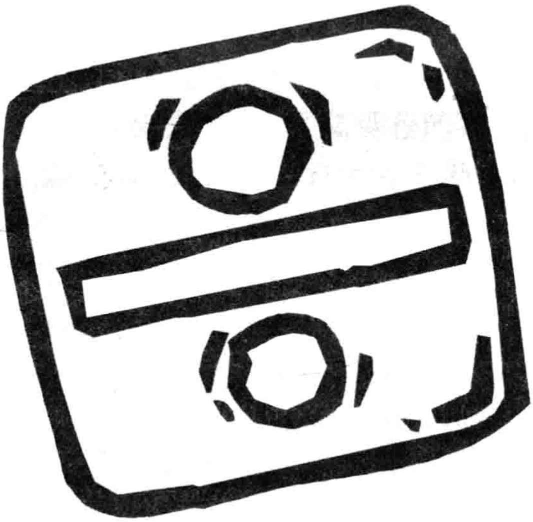
新课程师资培训教程

初中二年级代数

教学设计与课例

JIAOXUE SHEJI YU KELI

根据教育部课程标准编写
北京师联教育科学研究所 主编



π=.1415926……

远方出版社

责任编辑:胡丽娟
封面设计:江小涛

新课程师资培训教程
——教学设计与课例

编著者	北京师联教育科学研究所
出版	远方出版社
社址	呼和浩特市乌兰察布东路666号
邮编	010010
发行	新华书店
印刷	邯郸新华印刷厂
版次	2003年5月第1版
印次	2003年5月第1次印刷
开本	787×960　1/16
印张	260
字数	5200千
印数	1－5000册
标准书号	ISBN 7－80595－855－6/G·263
定价	340.00元(全套共34册)

前　　言

随着以综合国力为核心的国际竞争的日益加剧，为了使中华民族迅速崛起于世界民族之林，我们党和国家高瞻远瞩，适时调整了国家的教育方针，拉开了以培养优秀人才为核心的课程改革的序幕。

为了更好地配合国家的课程改革，推进素质教育的顺利进行，同时也为了向课程改革的具体执行者——教师提供一种新的教学思想和教学模式，我们在认真研究了《基础教育课程改革纲要(试行)》和各科课程标准的基础上，并结合国家教改实验区的经验，综合各种版本教材，推出了《新课程师资培训教程：决战新课堂——教学设计与课例》丛书。

本套丛书涵盖了新课程的各种版本，并严格遵照课程标准的基本要求，根据教学方式的改进和教师的实际需要，分为小学语文、小学数学、小学品德与生活、小学品德与社会、小学英语、小学科学、小学美术、小学艺术、小学体育与健康、小学音乐、小学综合实践活动、初中语文、初中代数、初中几何、初中英语、初中物理、初中化学、初中生物、初中历史、初中地理、初中政治、初中历史与社会、初中体育、初中艺术、初中美术、初中音乐等26科34种。每卷中均含有多媒体、实录式、说课式、互动式、主体式、点拨式教学设计等，具有极高的使用价值和参考价值。

由于编者自身知识水平所限，书中难免有不尽人意之处，望各位教师批评指正。

编　　者

2003年5月

目　　录

因式分解的概念

【教学目标】

1. 使学生正确理解因式分解的概念;
2. 了解因式分解与整式乘法的关系;
3. 了解因式分解的作用.

【教学重点和难点】

重点:因式分解的概念.

难点:因式分解与整式乘法的关系.

【教学过程】

一、导入新课

在小学时,我们学过了把一个整数分解成质因数的方法,例如:

$$24=2\times12=4\times6=2\times2\times2\times3=2^3\times3.(*)$$

问:哪些数是 24 的因数?哪些数是 24 的质因数?为什么?

答:2,3,4,6,12 都能整除 24,所以都是 24 的因数;但其中的 4,6,12 还可以继续分解,故它们都不是 24 的质因数;而 2 与 3 不能再分解了,所以把它们称为 24 的质因数.

指出:(*)式中,两个或两个以上的数相乘得到的积中的每一个数都是乘积的因数,能整除某数的数,都是这个数的因数.

问:42 的因数和质因数是什么?为什么?

答:2,3,6,7,14 都是 42 的因数,因为这些数都能整除 42.其中 2,3,7 是 42 的质因数,因为这些数只能被 1 和自身整除.

指出:**求一个数的因数,把一个数写成它的因数的积的形式,叫做因数分解法.**

因数分解在分数运算中有重要作用.

例 计算:(1) $\frac{15}{28}\times\frac{8}{25}\div2\frac{4}{7}$; (2) $\frac{1}{10}+\frac{11}{15}$.

解 (1) 原式 $=$ (1) $\frac{15}{28}\times\frac{8}{25}\div\frac{18}{7}$ (2) 原式 $=\frac{1}{2\times5}+\frac{11}{3\times5}$

$$= \frac{15}{28} \times \frac{8}{25} \times \frac{7}{18} \qquad\qquad = \frac{1 \times 3 + 11 \times 2}{2 \times 5 \times 3}$$

$$= \frac{3 \times 5}{4 \times 7} \times \frac{2 \times 4}{5 \times 5} \times \frac{7}{2 \times 3 \times 3} \qquad\qquad = \frac{25}{30}$$

$$= \frac{1}{15}; \qquad\qquad = \frac{5}{6}.$$

注意:

1. 乘、除运算中,首先把除法转化为乘法,再进行因数分解、约分,然后再进行乘法运算.

2. 异分母的加减法运算规律是,利用因数分解求出各分母的最小公倍数作为公分母,通分后变为同分母的分数,再进行加、减运算.

请同学思考两个问题

问:如图,在山坡上开垦荒地植树造林.在三层坡面上分别开垦出三块长方形的梯田,从上到下,它们的长分别为 a、b、c,宽都是 m,那么一共开垦荒地的面积是多少?

答:根据矩形的面积公式,得出开垦荒地的总面积为

$$ma + mb + mc. \qquad (1)$$

这个式子要做三次乘法和两次加法,能找出更简单的计算方法吗?

答:如果把三个矩形拼在一起,如图 8 - 2,所得到的长方形的长就变为 $a + b + c$,宽仍然是 m,因此它的面积为

$$m(a + b + c). \qquad (2)$$

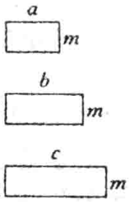


图 8-1

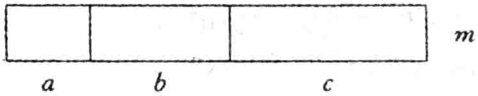


图 8-2

由(1) 式和(2) 式我们可以得到

$$ma + mb + mc = m(a + b + c).$$

两种计算方法得到的结果是相同的,但(2) 式的计算方法比(1) 式更简单,只需做三次加法和一次乘法.

即计算 $ma + mb + mc$ 可改为计算 $m(a + b + c)$.

问:数的平方与这个数本身相等,这个数是几?

(引导学生思考、讨论)

我们可以这样思考,如果设这个数为 x,于是有

$$x^2 = x.$$

移项,得

$$x^2 - x = 0.$$

问:一个数 x 与 $x-1$ 的乘积 $x(x-1)$,由整式乘法可以表示成什么?

答:$x(x-1) = x^2 - x$.

我们把它反过来,即

$$x^2 - x = x(x-1).$$

在上面的两个问题中,我们得到了两个等式

$$ma + mb + mc = m(a+b+c);$$

$$x^2 - x = x(x-1).$$

这两个式子的左边都是一个多项式,右边是两个整式的乘积.

把一个多项式化成几个整式积的形式,把这种变形叫做多项式的因式分解.

本章将学习因式分解的概念及多项式因式分解的方法.

在复习了整数的因数分解的基础上,我们将进一步学习多项式的因式分解.

二、讲授新课

把一个多项式化成几个整式的积的形式,叫做把这个多项式因式分解,也叫做把这个多项式分解因式.

像把 $ma + mb + mc$ 写成 $m(a+b+c)$ 那样,就是把多项式因式分解.

又如,把 $x^2 - x$ 写成 $x(x-1)$ 等等,都是把多项式因式分解.

我们写成等式形式,就是:

$$ma + mb + mc = m(a+b+c),$$

$$x^2 - x = x(x-1).$$

这两个等式的左边都是多项式,而右边都是整式积的形式.

问:下列各题中,从左式到右式的变形,哪些是因式分解?哪些不是因式分解?为什么?

(1)$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$;

(2)$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$;

(3)$(x+2)(x-1) = x^2 + x - 2$;

(4)$x(x+2) = x^3 + 2x$;

(5)$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$;

(6)$m^2 + m - 4 = (m + 3)(m - 2) + 2$.

答:(1),(2),(5)题中,从左式到右式的变形是因式分解,因为各题中的左式都是多项式,而右式都是整式乘积形式,均符合因式分解的定义;而(3),(4),(6)题中,从左式到右式的变形都不是因式分解,各题中的右式都不是整式乘积的形式,因此不符合因式分解的定义.

指出:多项式的因式分解,必须是把一个多项式化成几个整式乘积的形式.

因式分解与整式乘法之间有什么关系?我们曾经学过整式乘法及乘法公式,如单项式与多项式相乘,得

$$m(a + b + c) = ma + mb + mc;$$

多项式与多项式相乘,得

$$(x + m)(x + n) = x^2 + (m + n)x + mn.$$

乘法公式有:

平方差公式$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

完全平方公式$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

问:观察乘法运算及乘法公式中,等号的左边和右边各是什么式子?

答:各式的等号左边都是整式乘积形式,而各式的等号右边都是多项式.

如果我们把上面的乘法运算及乘法公式中的等号左边的式子与等号右边的式子互换,就得到

$$ma + mb + mc = m(a + b + c),$$
$$x^2 + (m + n)x + mn = (x + m)(x + n),$$
$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b),$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2,$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$

这些式子中,从等式左边到等式右边的变形就是多项式的因式分解.

由此可得出:多项式的因式分解与整式乘法是方向相反的恒等变形.整式的乘法运算是把几个整式的积变为多项式的形式,特征是向着积化和差的形式发展;而多项式的因式分解是把一个多项式化为几个整式乘积的形式,特征是向着和差化积的形式发展.

问:下列各题从左式到右式的变形中,哪些是因式分解?哪些是整式乘法?

(1)$m^3n^2 - n^3m^2 = m^2n^2(m - n)$;

(2)$(a+b)(m+n)=am+an+bm+bn$;

(3)$x^2-x-6=(x+2)(x-3)$;

(4)$x(2x-y)=2x^2-xy$;

(5)$9a^2-b^2=(3a+b)(3a-b)$;

(6)$3a^2(a-b+c)-6a^2=3a^2(c-b-a)$.

答:(1),(3),(5),(6) 题中,从左式到右式的变形是因式分解;(2),(4) 题中,从左式到右式的变形是整式乘法.

三、课堂练习

1. 选择题.

(1) 下列等式中,从左边到右边的变形为因式分解的是(　　).

A. $12a^2b=3a\cdot 4ab$

B. $(x+2)(x-2)=x^2-4$

C. $4x^2-8x-1=4x(x-2)-1$

D. $\frac{1}{2}ax-\frac{1}{2}ay=12a(x-y)$

(2) 下列等式中从左边到右边的变形因式分解的是(　　).

A. $(x+5)(x-1)=x^2+4x-5$

B. $x^2-y^2-1=(x+y)(x-y)-1$

C. $x^2-10xy+25y^2=(x-5y)^2$

D. $ax^2-bx^2-x=x^2(a-b)-x$

(3) 下列等式中从左边到右边的变形因式分解的是(　　).

A. $ab(a-b)=a^2b-ab^2$

B. $(x-3)(x+3)=x^2-9$

C. $ax+bx-a=x(a+b)-a$

D. $ab+ac-a^2=a(b+c-a)$

2. 判断下列各题从左边到右边的变形,哪些是因式分解?哪些不是?为什么?

(1)$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$;

(2)$y^2-16=(y+4)(y-4)$;

(3)$x^2-4x+5=(x-2)^2+1$;

(4)$m^2-2m+1=(m-1)^2$;

(5)$a^2-25+a-1=(a+5)(a-5)+a-1$;

(6) $x^2-5x-6=(x-6)(x+1)$.

四、小结

1. 多项式的因式分解的概念是,把一个多项式化为几个整式乘积的形式,叫做把这个多项式因式分解.

2. 多项式的因式分解与整式乘法是方向相反的恒等变形.

五、作业

1. 判断正误.

(1) 把一个代数式化为乘积形式,叫做把这个代数式因式分解; ( )

(2) 把一个整式化为乘积形式,叫做把这个整式因式分解; ( )

(3) 把一个多项式化为几个整式的积的形式,叫做把这个多项式因式分解. ( )

2. 下列由左边到右边的变形,哪些是因式分解?哪些不是?为什么?

(1) $x^2+2xy+y^2-1=(x+y+1)(x+y-1)$;

(2) $x^2-y^2-3=(x+y)(x-y)-3$;

(3) $m^2+2mn+n^2-2m-2n=(m+n)^2-2(m+n)$;

(4) $9(a^2-1)=9(a+1)(a-1)$;

(5) $bx^2-3b=b(x^2-3)$;

(6) $(a+2)(a-3)+5=a^2-a-1$;

(7) $9x^2-y^2=(3x+y)(3x-y)$.

运用公式法——完全平方公式

【教学目标】

1. 使学生会分析和判断一个多项式是否为完全平方式,初步掌握运用完全平方式把多项式分解因式的方法;

2. 理解完全平方式的意义和特点,培养学生的判断能力.

【教学重点和难点】

重点:运用完全平方式分解因式.

难点:灵活运用完全平方公式分解因式.

【教学过程】

一、复习

1. 问:什么叫把一个多项式因式分解?我们已经学习了哪些因式分解的方法?

答:把一个多项式化成几个整式乘积形式,叫做把这个多项式因式分解.我们学过的因式分解的方法有提取公因式法及运用平方差公式法.

2. 把下列各式分解因式:

(1)$ax^4 - ax^2$;　　(2)$16m^4 - n^4$.

解　(1)$ax^4 - ax^2 = ax^2(x^2 - 1) = ax^2(x + 1)(x - 1)$;

(2)
$$\begin{aligned}16m^4 - n^4 &= (4m^2)^2 - (n^2)^2 \\ &= (4m^2 + n^2)(4m^2 - n^2) \\ &= (4m^2 + n^2)(2m + n)(2m - n).\end{aligned}$$

问:我们学过的乘法公式除了平方差公式之外,还有哪些公式?

答:还有完全平方公式.完全平方公式是:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

这节课我们就来讨论如何运用完全平方公式把多项式因式分解.

二、新课

和讨论运用平方差公式把多项式因式分解的思路一样,把完全平方公式反过来,就得到

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2;a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$

这就是说，两个数的平方和，加上（或者减去）这两个数的积的2倍，等于这两个数的和（或者差）的平方．式子 $a^2+2ab+b^2$ 及 $a^2-2ab+b^2$ 叫做完全平方式，上面的两个公式就是完全平方公式．运用这两个公式，可以把形式是完全平方式的多项式分解因式．

问：具备什么特征的多项式是完全平方式？

答：一个多项式如果是由三部分组成，其中的两部分是两个式子（或数）的平方，并且这两部分的符号都是正号，第三部分是上面两个式子（或数）的乘积的二倍，符号可正可负，像这样的式子就是完全平方式．

问：下列各多项式是否为完全平方式？为什么？

(1) x^2+6x+9；　　(2) x^2+xy+y^2；

(3) $25x^4-10x^2+1$；　　(4) $16a^2+1$．

答：(1) 式是完全平方式．因为 x^2 与9是 x 与3的平方，$6x=2\cdot x\cdot 3$，所以 $x^2+6x+9=(x+3)^2$．

(2) 不是完全平方式．因为第三部分必须是 $2xy$．

(3) 是完全平方式．$25x^4=(5x)^2$，$1=1^2$，$10x=2\cdot 5x^2\cdot 1$，所以

$25x^4-10x^2+1=(5x-1)^2$．

(4) 不是完全平方式．因为缺第三部分．

请同学用箭头表示完全平方公式中的 a，b 与多项式 $9x^2+6xy+y^2$ 中的对应项，其中 $a=?$，$b=?$，$2ab=?$

答：

$$\begin{array}{c}9x^2+6xy+y^2=(3x)^2+2\cdot(3x)\cdot y+y^2=(3x+y)^2.\\ \updownarrow\qquad\updownarrow\qquad\updownarrow\\ a^2+2ab+b^2=(a+b)^2\end{array}$$

其中 $a=3x$，$b=y$，$2ab=2\cdot(3x)\cdot y$．

例1　把 $25x^4+10x^2+1$ 分解因式．

分析：这个多项式是由三部分组成，第一项“$25x^4$”是 $(5x^2)$ 的平方，第三项“1”是1的平方，第二项“$10x^2$”是 $5x^2$ 与1的积的2倍．所以多项式 $25x^4+10x^2+1$ 是完全平方式，可以运用完全平方公式分解因式．

解　$25x^4+10x^2+1=(5x^2)^2+2\cdot 5x^2\cdot 1+1^2=(5x^2+1)^2$．

例2　把 $1-\frac{1}{2}m+\frac{m^2}{16}$ 分解因式．

问:请同学分析这个多项式的特点,是否可以用完全平方公式分解因式?有几种解法?

答:这个多项式由三部分组成,第一项"1"是1的平方,第三项"$\frac{m^2}{16}$"是$\frac{m}{4}$的平方,第二项"$-\frac{1}{2}m$"是1与$\frac{m}{4}$的积的2倍的相反数,因此这个多项式是完全平方式,可以用完全平方公式分解因式.

解法1 $1-\frac{1}{2}m+\frac{m^2}{16}=1-2\cdot1\cdot\frac{m}{4}+(\frac{m}{4})^2=(1-\frac{m}{4})^2$.

解法2 先提出$\frac{1}{16}$,则

$$\begin{aligned}1-\frac{1}{2}m+\frac{m^2}{16}&=\frac{1}{16}(16-8m+m^2)\\&=\frac{1}{16}(4^2-2\cdot4\cdot m+m^2)\\&=\frac{1}{16}(4-m)^2.\end{aligned}$$

三、课堂练习

1. 填空:

(1)$x^2-10x+(\quad)^2=(\quad)^2$;

(2)$9x^2+(\quad)+4y^2=(\quad)^2$;

(3)$1-(\quad)+\frac{m^2}{9}=(\quad)^2$.

2. 下列各多项式是不是完全平方式?如果是,可以分解成什么式子?如果不是,请把多项式改变为完全平方式.

(1)x^2-2x+4; (2)$9x^2+4x+1$; (3)$a^2-4ab+4b^2$;

(4)$9m^2+12m+4$; (5)$1-a+\frac{a^2}{4}$.

3. 把下列各式分解因式:

(1)$a^2-24a+144$; (2)$4a^2b^2+4ab+1$;

(3)$\frac{1}{9}x^2+2xy+9y^2$; (4)$\frac{1}{4}a^2-ab+b^2$.

答案:

1.(1)$5,(x-5)^2$; (2)$12xy,(3x+2y)^2$; (3)$\frac{2m}{3},(1-\frac{m}{3})^2$.

2.(1)不是完全平方式,如果把第二项的“$-2x$”改为“$-4x$”,原式就变为 x^2-4x+4,它是完全平方式;或把第三项的“4”改为1,原式就变为 x^2-2x+1,它是完全平方式.

(2)不是完全平方式,如果把第二项“$4x$”改为“$6x$”,原式变为 $9x^2+6x+1$,它是完全平方式.

(3)是完全平方式,$a^2-4ab+4b^2=(a-2b)^2$.

(4)是完全平方式,$9m^2+12m+4=(3m+2)^2$.

(5)是完全平方式,$1-a+\frac{a^2}{4}=(1-\frac{a}{2})^2$.

3. (1)$(a-12)^2$;　　(2)$(2ab+1)^2$;

(3)$(\frac{1}{3}x+3y)^2$;　　(4)$(\frac{1}{2}a-b)^2$.

四、小结

运用完全平方公式把一个多项式分解因式的主要思路与方法是:

1. 首先要观察、分析和判断所给出的多项式是否为一个完全平方式,如果这个多项式是一个完全平方式,再运用完全平方公式把它因式分解.有时需要先把多项式经过适当变形,得到一个完全平方式,然后再把它因式分解.

2. 在选用完全平方公式时,关键是看多项式中的第二项的符号,如果是正号,则用公式 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$;如果是负号,则用公式 $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.

五、作业

把下列各式分解因式:

1. (1)$a^2+8a+16$;　　(2)$1-4t+4t^2$;

(3)$m^2-14m+49$;　　(4)$y^2+y+\frac{1}{4}$.

2. (1)$25m^2-80m+64$;　　(2)$4a^2+36a+81$;

(3)$4p^2-20pq+25q^2$;　　(4)$16-8xy+x^2y^2$;

(5)$a^2b^2-4ab+4$;　　(6)$25a^4-40a^2b^2+16b^4$.

3.(1)$m^{2n}-2m^n+1$;　　(2)$7a^{m+1}-14a^m+7a^{m-1}$;

4.(1) $\frac{1}{4}x^3-4x$;　　(2)$a^5+a^4+\frac{1}{4}a^3$.

因式分解

【教学目标】

1. 使学生初步掌握运用"添项"、"拆项"的技巧和"配方法"把多项式分解因式；

2. 通过学习，增加知识，开阔思路，培养发散思维和分析问题、解决问题的能力；

3. 使学生初步掌握运用因式分解的方法求多项式的值；

4. 初步运用待定系数法解决有关问题，并渗透化归的思想方法.

【教学过程】

我们已经学习了提公因式法、公式法、分组分解法等因式分解的三种方法，今后就称这三种方法为因式分解的基本方法. 但对于某些多项式，有时不能直接运用这三种基本方法分解因式. 若将这些多项式经过一定的恒等变形后，就可把问题转化为能用这三种基本方法把所给的多项式分解因式.

这里，我们主要介绍常用的"添、拆项法"和"配方法".

一、添、拆项法

例 1 把 x^4+4y^4 分解因式.

分析：这个二项式不能直接运用因式分解的基本方法分解因式，如果我们运用一个技巧，在原式中增加一项，把它转化为完全平方式，就可运用完全平方公式分解因式. 为了使原式保持恒等，必须再减去这一项.

解
$$\begin{aligned} x^4+4y^4 &= x^4+4x^2y^2+4y^4-4x^2y^2 \\ &= (x^2+2y^2)^2-(2xy)^2 \\ &= (x^2+2y^2+2xy)(x^2+2y^2-2xy). \end{aligned}$$

指出：运用添项技巧，就把问题转化为能运用因式分解的基本方法把原二项式分解因式了.

例 2 把 x^3+x-2 分解因式.

分析：可以把一次项 x 进行拆项，即 $x=2x-x$，再把变形后的多项式进行因式分解.