高中用书

翟连林 主编

高中代数一题多解

（修订版）

GAO
ZHONG
SHU
XUE

北京出版社

高中代数一题多解

（修订版）

主　编　翟连林
编　委　（依姓氏笔画为序）
　　　　王学功　王乾岭　叶龄逸
　　　　刘盛锡　陈士杰　李福宽
　　　　林福堂　施英杰　项昭义
执　笔　汪祖亨　张载羽　李友梅
　　　　竺志平　杨志刚　夏松玉

北　京　出　版　社

中学数学智力开发丛书
高中代数一题多解(修订版)
GAOZHONG DAISHU YITI DUOJIE
(XIUDINGBAN)
翟连林 主编
*
北京出版社出版
(北京北三环中路6号)
邮政编码:100011
北京出版社总发行
新华书店北京发行所经销
北京市朝阳新源印刷厂印刷
*
787×1092毫米 32开本 11.25印张 246 000字
1993年10月第1版 1997年7月第5次印刷
印数43 001—53 000
ISBN 7-200-02037-0/G·596
定价:11.20元

再版说明

从教学实践中我们体会到：一题多解是开发智力、培养能力的一种行之有效的方法，它对沟通不同知识间的联系，开拓思路，培养发散思维能力，激发读者的学习兴趣都是十分有益。为此，我们编写了《中学数学智力开发丛书》。这套丛书出版发行后，受到广大读者的欢迎，从1990年初版至今，已印刷四次，总印数达35.6万册。在新形势下我们又重新修订，出版这套丛书的第二版，包括《初中代数一题多解》、《平面几何一题多解》、《高中代数一题多解》、《平面三角一题多解》、《立体几何一题多解》、《平面解析几何一题多解》、《高中数学综合题一题多解》。为了充实内容，这套丛书增加了《初中数学试题一题多解》、《初中数学综合题一题多解》、《高中数学试题一题多解》等书，使整套书囊括了初中数学和高中数学的全部内容，有益于读者按需选择。

与其它各类学习数学的图书比较，这套丛书突出了发散思维能力的培养，精选实用、新颖的题目，增加了巧妙解法，力求体现科学性、趣味性、典型性和启发性。

由于我们的水平有限，书中缺点、错误在所难免，欢迎读者批评指正。

编 者

1993年8月

初版说明

培养正确迅速的运算能力、逻辑思维能力、空间想象能力以及分析问题和解决问题的能力，是中学数学教学中的一个重要任务。要完成这一任务，必须演算一定数量的题目。但不少自学青年和学生在演算习题时，往往只追求数量，而忽视有目的的总结、归纳，抓不住基本解题规律。这样尽管用了不少时间，费了很大精力，结果收效甚微。

长期的教学实践使我们体会到："练不在于多，而在于精"。恰当而又适量地采用一题多解的方法，进行思路分析，探讨解题规律和对习题的多角度"追踪"，能"以少胜多"地巩固基础知识，提高分析问题和解决问题的能力，掌握基本的解题方法和技巧。为此，总结我们多年来从事数学教学的经验，数学教材的编写以及指导初、高中毕业生进行数学复习的经验，编写了这套"中学数学智力开发丛书"。这套丛书包括：《初中代数一题多解》、《平面几何一题多解》、《高中代数一题多解》、《立体几何一题多解》、《平面三角一题多解》、《平面解析几何一题多解》、《高中数学综合题一题多解》。

在编写这套丛书时，我们力求作到以下两点：第一，紧密配合中学数学教学内容，帮助读者在理解课本知识的基础上，开阔视野，启迪思维；第二，内容编排循序渐进，结构新颖，对每道题目的多种解法，注重思路分析和解题规律的总结，以帮助读者从中领悟要点，掌握解数学题的常用方法及基本解题规律。

由于我们水平有限，书中不妥之处，敬请广大读者批评指正。

编　者

1989 年 10 月

目　录

引　言

比方说，要从上海出发去我们伟大祖国的首都旅游，可以选择乘火车、飞机或乘轮船再换乘火车等任意一种交通工具；如果选择乘火车，则既可乘直快也可乘特快，既可直达北京也可中途下车顺便游览其他地方等等．不同的选择，适合不同人的需求，能获得不同的旅游情趣．这样一个浅显的道理，对我们如何来设计解决为数众多而形式各异的数学问题的解题方案，将得到十分有益的启示．

由于解数学题一般总是充分利用题设条件，并借助有关的性质、公式，恰当地向结论过渡．因此，我们若把它们视为旅途的始发站、中转站和终止站，而把解题过程看作为乘坐某一种交通工具按一定的旅行路线的运动过程的话，那么势必因交通工具和旅行路线的不同而有各种不同的旅游方案，但只要运行无误，终究会殊途同归，到达目的地．下面我们看一个具体数学问题：

已知　$a>0$，$b>0$，$a+b=1$，求证：

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geqslant\frac{25}{2}.$$

这是一道有一定难度的不等式证明题．该如何来设计、完成证明的路线呢？

如果我们想利用分析法来探求证题思路的话，有：

【证法 1】 欲证　$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geqslant\frac{25}{2}$　成

立，只须证 $a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+4\geqslant\frac{25}{2}$. 由于 $a>0,b>0$，则去分母，再分解，只须证

$$(a^2+b^2)(a^2b^2+1)-\frac{17}{2}a^2b^2\geqslant 0,$$

利用 $a+b=1$，就只须证

$$(1-2ab)(a^2b^2+1)-\frac{17}{2}a^2b^2\geqslant 0,$$

即 $2-4a^3b^3-15a^2b^2-4ab\geqslant 0$.

已知 $a>0$，$b>0$，$a+b=1$，

则 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2}$，$ab\leqslant\frac{1}{4}$，

故有 $2-4a^3b^3-15a^2b^2-4ab$

$$\geqslant 2-4\times\frac{1}{64}-15\times\frac{1}{16}-4\times\frac{1}{4}=0,$$

$\therefore\ \left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geqslant\frac{25}{2}$.

如果我们顾及到证式的结构特点，想直接用基本不等式来证题的话，则有：

【证法 2】 $\because$ a、b 都是正数，利用基本不等式，有

$$ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4},$$

则 $\frac{1}{ab}\geqslant 4$，再据 $a+b=1$，

$\therefore\ \left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2$

$$=a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+4=1-2ab+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+4$$

$$\geqslant 5-2ab+\frac{2}{ab}\geqslant 5-2\times\frac{1}{4}+2\times 4=\frac{25}{2}.$$

【证法 3】 $\because$ a、b 均为正数，且 $a+b=1$，

$\therefore$ $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2}$，$\frac{1}{\sqrt{ab}}\geqslant 2$，

于是 $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2$

$$\geqslant 2\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)$$

$$=2\left(ab+\frac{1}{ab}+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)$$

$$=2\left[\left(\frac{1}{\sqrt{ab}}-\sqrt{ab}\right)^2+2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right]$$

$$\geqslant 2\left[\left(2-\frac{1}{2}\right)^2+2+2\right]=\frac{25}{2}.$$

倘若我们由条件 $a+b=1$，及 $a>0$，$b>0$，想到了 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，而作三角代换的尝试，有：

【证法 4】 $\because$ $a>0$，$b>0$，且 $a+b=1$，

$\therefore$ $0<a<1$，$0<b<1$.

可设 $a=\sin^2\alpha$，$b=\cos^2\alpha$（α 为锐角），

于是 $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2$

$$=\left(\sin^2\alpha+\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)^2+\left(\cos^2\alpha+\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)^2$$

$$=\sin^4\alpha+\frac{1}{\sin^4\alpha}+\cos^4\alpha+\frac{1}{\cos^4\alpha}+4$$

$$=5-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\frac{1}{\sin^4\alpha}+\frac{1}{\cos^4\alpha}$$

$$\geqslant 5-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha+\frac{2}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}$$

$$=5-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha+\frac{8}{\sin^2 2\alpha},$$

$\because \quad \sin^2 2\alpha \leqslant 1, \quad -\sin^2 2\alpha \geqslant -1, \quad \dfrac{1}{\sin^2 2\alpha} \geqslant 1.$

$$\therefore \quad \left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geqslant 5-\frac{1}{2}+8=\frac{25}{2}.$$

【证法 5】 与证法 4 相同，设 $a=\sin^2\alpha$，$b=\cos^2\alpha$，

于是 $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(b+\dfrac{1}{b}\right)^2$

$$\geqslant 2\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)$$

$$=2\left(\sin^2\alpha+\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\left(\cos^2\alpha+\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)$$

$$=2\left(\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}\right)$$

$$=2\left(\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha+\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}+\frac{4}{\sin^2 2\alpha}\right)$$

$$=2\left[\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha+\frac{4(1-2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha)}{\sin^2 2\alpha}+\frac{4}{\sin^2 2\alpha}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^4 2\alpha-8\sin^2 2\alpha+32}{\sin^2 2\alpha},$$

$\because \quad 0<\sin^2 2\alpha\leqslant 1,$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^4 2\alpha-8\sin^2 2\alpha+32}{\sin^2 2\alpha}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(\sin^2 2\alpha-4)^2+16}{\sin^2 2\alpha}\geqslant\frac{(1-4)^2+16}{2\times 1}=\frac{25}{2}.$$

即 $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(b+\dfrac{1}{b}\right)^2\geqslant\dfrac{25}{2}.$

若注意到 $a+b=1$ 及证式关于 a、b 是对称形式，选用

平均数代换的方法，有：

【证法 6】 设 $a=\frac{1}{2}+\delta$, $b=\frac{1}{2}-\delta\left(-\frac{1}{2}<\delta<\frac{1}{2}\right)$,

于是 $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2$

$$=a^2+2+\frac{1}{a^2}+b^2+2+\frac{1}{b^2}$$

$$\geqslant a^2+b^2+\frac{2}{ab}+4$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\delta\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\delta\right)^2+\frac{2}{\left(\frac{1}{2}+\delta\right)\left(\frac{1}{2}-\delta\right)}+4$$

$$=\frac{1}{2}+2\delta^2+\frac{2}{\frac{1}{4}-\delta^2}+4\geqslant\frac{1}{2}+\frac{2}{\frac{1}{4}}+4=\frac{25}{2}.$$

【证法 7】 设 $a=\frac{1}{2}+\delta$, $b=\frac{1}{2}-\delta\left(-\frac{1}{2}<\delta<\frac{1}{2}\right)$,

则 $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2$

$$\geqslant 2\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)=2\cdot\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{ab}$$

$$=\frac{2\delta^4+3\delta^2+\frac{25}{8}}{\frac{1}{4}-\delta^2}.$$

显然，分子的值$\geqslant\frac{25}{8}$，$0<$分母的值$\leqslant\frac{1}{4}$.

$\therefore\ \left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geqslant\frac{25}{2}$.

再若考虑借助于重要不等式，则运用柯西不等式$(a_1^2+a_2^2)\cdot(b_1^2+b_2^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2)^2$，有：

【证法 8】

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2$$

$$\geqslant 2\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)$$

$$=2\left[\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2\right]\cdot\left[\left(\sqrt{b}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2\right]$$

$$\geqslant 2\left(\sqrt{ab}+\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)^2$$

$$=2\left[\left(\sqrt{ab}-\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)^2+4\right]\geqslant 2\left[\left(2-\frac{1}{2}\right)^2+4\right]=\frac{25}{2}.$$

利用"平方平均数不小于算术平均数"，有：

【证法 9】

$$\because \quad \sqrt{\frac{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2}{2}}$$

$$\geqslant\frac{\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)}{2},$$

$$\therefore \quad \left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geqslant\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2.$$

由 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，得 $\frac{1}{ab}\geqslant 4$，

$$\therefore \quad \left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geqslant\frac{1}{2}(1+4)^2=\frac{25}{2}.$$

如果直接将已知条件 $a+b=1$ 代入证式，变换为 a 的一元函数，再作推证，有：

【证法 10】

$$\because \quad \left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geqslant 2\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right).$$

将 $b=1-a$ 代入上式，得

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geqslant 2\cdot\frac{(a^2+1)[(1-a)^2+1]}{a(1-a)}.$$

设 $\quad f(a)=\dfrac{(a^2+1)[(1-a)^2+1]}{a(1-a)}$，

$$\therefore \quad f(a)=\frac{a^2(1-a)^2-2a(1-a)+2}{a(1-a)}$$

$$=\frac{(a^2-a+1)^2+1}{a(1-a)}$$

$$=\frac{\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^2+1}{a(1-a)}.$$

该式中，分母 $\quad 0<a(1-a)=\dfrac{1}{4}-\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2\leqslant\dfrac{1}{4}$，

分子 $\quad \left[\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\right]^2+1\geqslant\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+1=\dfrac{25}{16}$，

$$\therefore \quad f(a)\geqslant\frac{\frac{25}{16}}{\frac{1}{4}}=\frac{25}{4},$$

故 $\quad \left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(b+\dfrac{1}{b}\right)^2\geqslant 2f(a)\geqslant 2\cdot\dfrac{25}{4}=\dfrac{25}{2}.$

仔细推敲，还可以利用反证法、图象法、函数增减性等多种不同的证法。

仅从一题的上述10种证法中，我们已能看清解题时利用的性质不同，选择的方法不一，解题的巧妙也就各异。有

的思考容易，有的推理简捷，有的换元得体，有的方法巧妙，但毕竟异途同归，集之即成一题多解．

本书就是想根据对一些精选范例的多种解法的分析，来引导读者探索解题规律，提高解题能力．我们建议读者在看完了第一章后，能带着这章中的观点，按图索骥地去探索第三章的应用举例．千万不要就事论事地游览观赏各种解法的技巧而不作深究．在看完第三章后，不妨回过头来再领略一次第一章的要点，也许那时候认识就会深刻得多了．最后再去看第二章，将会得到更深刻的认识．

第一章　一题多解的意义与作用

具有解题经验的读者都知道：所谓一题多解，就是指从各种不同的角度，运用不同的思维方法去解决同一个问题．由于一题多解所涉及的定理、性质和重要方法较单一解题的面更广，方法更灵活多变，有时甚至是奇离巧合，曲径通幽，因此，一题多解不但能锻炼解题的基本技能，而且可以更有效地发展逻辑思维，提高全面分析问题和解决问题的能力．

1．密切数学各分科间的联系

由于数学是研究形与数的关系的科学，尽管代数、几何、三角的各个章节都有自己的"数"、"形"的重心，但相互之间并没有不可逾越的鸿沟．我们在探求一题多解的时候，势必要广泛地用到一切与之有关的定理、性质和基本知识．这种多解的汇聚自然地将数学各章节、各分科的相关知识聚集起来，构成了各部分知识纵横交叉、前后沟通的网络状态，无形中密切了各分科知识的联系．

例 1　设 $f(x)$是定义在区间$(-\infty, +\infty)$上以 2 为周期的函数，对 $k\in Z$，用 I_k表示区间$(2k-1, 2k+1)$，已知当 $x\in I_0$ 时，$f(x)=x^2$．(1) 求 $f(x)$在 I_k 上的解析式；(2) 对自然数 k，求集合 $M_k=\{a\mid$使方程 $f(x)=ax$ 在 I_k 上有两个不相等的实根$\}$．

【解法 1】　(1) $\because$　$f(x)$是以 2 为周期的函数，

$\therefore$ 当 $k\in Z$ 时，$2k$ 是 $f(x)$ 的周期。

又 当 $x\in I_k$ 时，$(x-2k)\in I_0$，

$\therefore$ $f(x)=f(x-2k)=(x-2k)^2$.

即对 $k\in Z$，当 $x\in I_k$ 时，$f(x)=(x-2k)^2$.

(2) 当 $k\in Z$ 且 $x\in I_k$ 时，利用 (1) 的结论可得方程

$$(x-2k)^2=ax,$$

整理，得 $x^2-(4k+a)x+4k^2=0$,

其判别式 $\Delta=(4k+a)^2-16k^2=a(a+8k)$.

上述方程在区间 I_k 上恰有两个不相等的实根的充要条件是 a 满足

$$\begin{cases} a(a+8k)>0, \\ 2k-1<\frac{1}{2}[4k+a-\sqrt{a(a+8k)}], \\ 2k+1\geqslant\frac{1}{2}[4k+a+\sqrt{a(a+8k)}]. \end{cases}$$

化简，得
$$\begin{cases} a(a+8k)>0 & ① \\ \sqrt{a(a+8k)}<2+a & ② \\ \sqrt{a(a+8k)}\leqslant 2-a & ③ \end{cases}$$

由①知 $a>0$ 或 $a<-8k$.

当 $a>0$ 时，$\because$ $2+a>2-a$，由②、③可知

$\because$ $\sqrt{a(a+8k)}\leqslant 2-a$,

$\therefore$ $\begin{cases} a(a+8k)\leqslant(2-a)^2, \\ 2-a>0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} (2k+1)a\leqslant 1, \\ a\leqslant 2, \end{cases}$

于是 $0<a\leqslant\frac{1}{2k+1}$

当 $a<-8k$ 时，由 $2+a<2-8k<0$,

可知 $\sqrt{a(a+8k)}<2+a$ 无解。