点难点疑点问答及水平反馈丛书

修订本

高二数学

（解析几何）

主编：崔孟明　编著：徐望根　俞绍康　姚　楷

三 环 出 版 社

重点难点疑点问答与水平反馈丛书

高二数学

（解析几何）

编著：俞绍康　姚　楷

三环出版社

(琼) 新登字03号

重点难点疑点问答与水平反馈丛书

高二数学 (解析几何)

俞绍康 等编著

海南 (三环) 出版社出版

(海口市滨海大道花园新村20号 邮编: 570001)

责任编辑: 刘文武 朱作霖 封面设计: 张 戈

国家教委图书馆工作委员会装备用书

河北乐亭县印刷厂印刷

787×1092mm 32开本 6.50印张 134千字

1991年2月第1版 1995年6月第4次印刷

ISBN 7-80564-331-8/G·201 定价: 5.2元

《重点难点疑点问答与水平反馈丛书》编委会

前　言

学生学习，既要学习科学知识，又要通过学习知识培养良好的品德素质，提高分析问题和解决问题的能力。能力的核心是思维能力。设疑解疑是发展思维、提高能力的重要途径。

学生在学习过程中，只有掌握基础知识、基本概念和基本技能，才能顺利解疑，提高学习效果。由于学生各自的基础不同，对应该掌握的知识理解深度不同，因而需要帮助他们加深对重点、难点知识的理解。为此，我们组织了北京市及全国重点中学的特、高级教师和教学研究人员编写了这套《重点难点疑点问答与水平反馈丛书》，它包括语文、数学、物理、化学和英语等主要学科，与中学各科教材相对应。

该丛书有如下特点：

一、全面贯彻“依纲扣本”的原则。该丛书自 1991 年出版问世以来，曾连续再版四次，深受读者欢迎。但由于出版时间较长，教材改动比较频繁，使这套书远远不能满足读者的需要。鉴此，我们组织作者在原书基础上依据新版《教学大纲》和新教材进行了全面修订，力图做到与教学进程相对应，从而更好地满足读者的需要。

二、有较高的理论水平。该丛书是作者总结多年的教学经验和教研成果，广泛吸收和借鉴国内外先进的教育理论，针对青少年的性格特点和学习心理而精心编写出来的，具有较高的理论指导意义。

三、针对性强。该丛书针对学生在学习过程中可能遇到

的重点、难点、疑点知识，进行多层次、多角度地解析，以使学生深入浅出融汇贯通，举一反三。

四、及时水平反馈。反馈是提高学习积极性，促进求知欲的有力手段。学习知识的反馈，越及时越好。因此，在解析每一个知识点之后，都附有水平反馈练习，以检验学习效果，使读者做到心中有数。

五、开拓知识视野。该丛书的内容略高于课本知识，选用与课本有关的知识，课堂内外结合使读者提高兴趣，增长知识扩大视野。

该丛书在编写时，得到海南省教委的大力支持和关怀，并给以具体指导，在此表示衷心感谢。

在编写过程中，虽经努力，但由于时间和水平所限，难免有不足之处，敬请广大读者和同行不吝赐教。

编者

1994 年 10 月

目 录

第一章 解析几何…………………………………………（1）

一、直线问答…………………………………………（1）

二、圆锥曲线问答 ……………………………………（18）

第二章 极坐标与参数方程 ……………………………（24）

一、极坐标例题选讲 …………………………………（24）

二、怎样求曲线的极坐标方程 ………………………（33）

三、几种圆锥曲线的极坐标方程 ……………………（43）

〔单元知识训练〕 ……………………………………（64）

〔参考答案〕 …………………………………………（68）

四、参数方程的基本内容有哪些 ……………………（77）

五、参数方程典型例述 ………………………………（85）

六、怎样学好参数方程………………………………（111）

〔单元知识训练〕 ……………………………………（132）

〔参考答案〕 …………………………………………（137）

第三章 轨迹方程………………………………………（150）

轨迹方程的几种求法…………………………………（150）

〔单元知识训练〕 ……………………………………（180）

〔参考答案〕 …………………………………………（182）

第一章　解析几何

一、直线问答

1. 学习有向线段，要注意点什么？

答：(1) 要注意有关的定义：

规定了正方向的直线叫做有向直线．

规定了方向，即规定了起点和终点的线段叫做有向线段．

有向线段所在线段的长度，就叫做有向线段的长度．

根据有向线段与有向直线的方向相同或相反，分别把有向线段的长度加上正号或负号，这样所得的数，叫做有向线段的数量（或数值）．

(2) 要注意有关的表示或记法

以 A 为起点，B 为终点的有向线段记为$\overline{AB}$；以 B 为始点，A 为终点的有向线段记为$\overline{AB}$.

有向线段$\overline{AB}$的长度，记为$|AB|$；有向线段$\overline{BA}$的长度，记为$|BA|$.

有向线段$\overline{AB}$的数量，记为 AB；有向线段$\overline{BA}$的数量，记为 BA.

另外，如果要表示不考虑方向的线段，可照普通记法，即前面冠以“线段”字样，如线段 AB、可见线段 AB 与线段 BA 指的是同一条线段。

要注意下面的记法都是错误的：

有向线段 AB；线段$\overline{AB}$；有向线段的长度$|\overline{AB}|$；有向线段的数量$\overline{AB}$等。

(3) 要注意有关的数量关系或大小。

1)当有向线段$\overline{AB}$的方向与有向直线 l 的方向相同时，有向线段$\overline{AB}$的数量 $AB>0$；否则 $AB<0$.

2) 有向线段的长度与它的方向无关，所以有 $|AB|=|BA|$.

3) 有向线段的数量与有向线段的方向有关，所以有向线段$\overline{AB}$的数量 AB 与有向线段$\overline{BA}$的数量 BA 互成相反数，即

$$AB=-BA.$$

4) 对于数轴上任意有向线段$\overline{AB}$，它的数量 AB 和起点坐标 x_1、终点坐标 x_2 有如下关系：

$$AB=x_2-x_1.$$

由此又得 $\quad |AB|=|x_2-x_1|.$

5) 在数轴上首尾相接的两条有向线段的数量和.

在数轴上有任意三点 A、B、C，则有

$$AB+BC=AC.$$

证：设 A、B、C 三点的坐标分别为 x_A、x_B、x_C，我们有

$$AB+BC=(x_B-x_A)+(x_C-x_B)=x_A-x_C,$$

又 $\quad AC=x_C-x_A,$

$\therefore \quad AB+BC=AC.$

这就是说，在数轴上有向线段$\overline{AB}$、$\overline{BC}$的数量和 AB+BC 等于以 A 为始点、C 为终点的有向线段$\overline{AC}$的数量.

6) 推广：在数轴上首尾相接的 n−1 条有向线段的数量和在数轴上有任意 n 个点 A_1、$A_2\cdots$、A_n，则有

$$A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_{n-1}A_n=A_1A_n.$$

证：设 A_1、A_2、…、A_n 的坐标分别为 x_1、x_2、…，x_a，我们有

$$A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_{n-1}A_n$$
$$=(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+\cdots+(x_a-x_{a-1})=x_a-x_1,$$

又 $A_1A_n=x_n-x_1$，

∴ $A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_{n-1}A_n=A_1A_n$.

2. 在线段的定比分点中，λ 的取值范围是什么？

答：有向直线 1 上的一点 P，把 1 上的有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 分成两条有向线段 $\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$，$\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$ 数量的比叫做点 P 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比，通常用字母 λ 来表示这个比值，

$$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2},$$

点 P 叫做 $\overline{P_1P_2}$ 的定比分点。

如果点 P 在线段 P_1P_2 上，点 P 叫做 $\overline{P_1P_2}$ 的内分点。如果点 P 在线段 P_2P_1 或 P_1P_2 的延长线上，点 P 叫做 $\overline{P_1P_2}$ 的外分点．

当 P 是内分点时，$\overline{P_1P}$ 与 $\overline{PP_2}$ 的方向相同，所以 $\lambda>0$。具体说来，设 P_0 是线段 P_1P_2 的中点，则有：

当 P 与 P_0 重合时，有 $\lambda=1$；

当 P 在线段 P_1P_0 之间时，有 $0<\lambda<1$；

当 P 在线段 P_0P_2 之间时，有 $\lambda>1$.

当 P 是外分点时，$\overline{P_1P}$ 与 $\overline{PP_2}$ 的方向相反，所以 $\lambda<0$. 具体说来，有

当 P 在线段 P_1P_2 的延长线上时，$\lambda<-1$；

当 P 在线段 P_1P_2 的反向延长线上时，$-1<\lambda<0$.

所以 λ 的取值范围是：

$(-\infty, -1)\cup(-1, 0)\cup(0, +\infty)$.

λ 为什么不能等于零呢？加 $\lambda=0$，即 $P_1P=0$. 而 $PP_2\neq 0$，此时 P 与 P_1 重合，这与 λ 定义中 $\overline{P_1P}$ 是有向线段矛盾．故 $\lambda\neq 0$.

λ 为什么不能等于 -1 呢？如 $\lambda=-1$，即 $\frac{P_1P}{PP_2}=-1$，得 $P_1P=-PP_2=P_2P$，即 $P_1P=P_2P$，此时要么 P 是线段 P_1P_2 的中点，要么 P_1、P_2、P 重合．如果 P 是线段 P_1P_2 的中点，则有 $\lambda=1$ 与 $\lambda=-1$ 矛盾；如果 P_1、P_2、P 重合，显然与 λ 的定义不符．故 $\lambda\neq -1$.

3. 如何活用定比分点公式

答：设有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 的两个端点坐标为 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，点 $P(x, y)$ 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比为 λ 时，点 P 的坐标是：

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\quad(\lambda\neq -1).$$

现有这么一道题：

设 P 在线段 P_2P_1 的延长线上，$P_1(-1, 2)$、$P_2(4, 6)$，$\frac{|PP_1|}{|PP_2|}=\frac{2}{11}$，求点 $P(x, y)$ 的坐标．

$\left(答：x=-\frac{19}{9},\ y=\frac{10}{9}\right)$.

此题有六种解法：

(1) P 点是 $\overline{P_1P_2}$ 的外分点，$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}=-\frac{2}{11}$，再代入公式：

$$x=\frac{-1-\frac{2}{11}\times 4}{1-\frac{2}{11}}=-\frac{19}{9},$$

$$y=\frac{2-\frac{2}{11}\times 6}{1-\frac{2}{11}}=\frac{10}{9}.$$

(2) P 为$\overline{P_2P_1}$的外分点，$\lambda=\frac{P_2P}{PP_1}=-\frac{11}{2}$，再代入公式：

$$x=\frac{4+\left(-\frac{11}{2}\right)(-1)}{1-\frac{11}{2}}=-\frac{19}{9},$$

$$y=\frac{6+\left(-\frac{11}{2}\right)\times 2}{1-\frac{11}{2}}=\frac{10}{9}.$$

(3) P_1 为$\overline{PP_2}$的内分点，$\lambda=\frac{PP_1}{P_1P_2}=\frac{2}{9}$，再代入公式：

$$-1=\frac{x+\frac{2}{9}\times 4}{1+\frac{2}{9}},\quad 2=\frac{y+\frac{2}{9}\times 6}{1+\frac{2}{9}},$$

解得 $x=-\frac{19}{9}$，$y=\frac{10}{9}$.

(4) P_1 为$\overline{P_2P}$的内分点，$\lambda=\frac{P_2P_1}{P_1P}=\frac{9}{2}$，再代入公式：

$$-1=\frac{4+\frac{9}{2}x}{1+\frac{9}{2}},\quad 2=\frac{6+\frac{9}{2}y}{1+\frac{9}{2}},$$

解得 $x=-\frac{19}{9}$，$y=\frac{10}{9}$.

(5) P_2 为$\overline{PP_1}$的外分点，$\lambda=\frac{PP_2}{P_2P_1}=-\frac{11}{9}$，再代入公式：

$$4=\frac{x+\left(-\frac{11}{9}\right)(-1)}{1-\frac{11}{9}},\quad 6=\frac{y+\left(-\frac{11}{9}\right)\times 2}{1-\frac{11}{9}},$$

解得 $x=-\frac{19}{9}$，$y=\frac{10}{9}$.

（6）P_2 为$\overline{P_1P}$的外分点，$\lambda=\frac{P_1P_2}{P_2P}=-\frac{9}{11}$，再代入公式：

$$4=\frac{-1-\frac{9}{11}x}{1-\frac{9}{11}},\quad 6=\frac{2-\frac{9}{11}y}{1-\frac{9}{11}},$$

解得 $x=-\frac{19}{9}$，$y=\frac{10}{9}$.

从这六种解法可以看出如何活用定比分点公式：认准了始点 $P_{始}$、终点 $P_{终}$、分点 $P_{分}$ 在比值 λ 和分点坐标公式中的顺序关系，即

$$\lambda=\frac{P_{始}P_{分}}{P_{分}P_{终}},$$

$$x_{分}=\frac{x_{始}+\lambda x_{终}}{1+\lambda},$$

$$y_{分}=\frac{y_{始}+\lambda y_{终}}{1+\lambda},$$

那么，即使在不同的场合中出现类似的情况，不是一定要把 P 点当作分点才能求出它的坐标，把 P 点当作有向线段的始点或终点，也一样能求出来.

在很多与定比分点有关的问题中，由于分点坐标求法的灵活性，有可能选择其中某种简便的解法，便利于原问题的解决.

4. 如何活用两点的距离公式

答：设 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$，$d=|P_1P_2|$，则有两点距离公式：

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

（1）结合韦达定理求距离

例 1 设 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$ 在直线 $y=3x-5$ 上且 x_1、x_2 是方程 $x^2-7x-2=0$ 的根，求 $d=|P_1P_2|$.

解：$\because x_1+x_2=7$，$x_1x_2=2$，$y_1-y_2=3(x_1-x_2)$，

$$\begin{aligned}\therefore\quad d&=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\\&=\sqrt{(x_1-x_2)^2+9(x_1-x_2)^2}\\&=\sqrt{10(x_1-x_2)^2}=\sqrt{10}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}\\&=\sqrt{10}\cdot\sqrt{49-8}=\sqrt{410}.\end{aligned}$$

（2）转化为距离公式解题

例 2　求 $y=\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{x^2-8x+32}$ 的最小值.

解：
$$\begin{aligned}y&=\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{x^2-8x+32}\\&=\sqrt{(x-1)^2+1^2}+\sqrt{(x-4)^2+4^2}\end{aligned}$$

设 $P_1(1, 1)$、$P_2(4, 4)$、$P(x, 0)$，则有

$|PP_1|=\sqrt{(x-1)^2+1^2}$，，$|PP_2|=\sqrt{(x-4)^2+4^2}$，

$y=|PP_1|+|PP_2|$.

故原题转化为：

在 x 轴上求一点 $P(x, 0)$，使它到点 $P_1(1, 1)$ 与 $P_2(4, 4)$ 的距离和最小.

由平面几何知识，作 P_1 关于 x 轴的对称点 $P_1'(1, -1)$，连 $P_1'P_2$ 与 x 轴交于 P，P 即为所求.

而直线 $P_1'P_2$：$y=\frac{5}{3}x-\frac{8}{3}$. 让 $y=0$，得 P 点的坐标为 P $(\frac{8}{5}, 0)$. 把 $x=\frac{8}{5}$ 代入原式，得

$$y_{min}=\sqrt{\left(\frac{8}{5}-1\right)^2+1}+\sqrt{\left(\frac{8}{5}-4\right)^2+4^2}$$
$$=\sqrt{34}.$$

5. 直线方程的多种形式各有什么特点？并阐述它们之间的关系.

答：(1) 点斜式

已知直线 l 的斜率是 k，且经过点 P_1 (x_1, y_1)，则直线 l 的点斜式方程是

$$y-y_1=k\ (x-x_1)\ .$$

这个方程是由直线上一点和直线的斜率确定的．它的主要特点是：斜率 k 存在且亮出点的坐标 P_1 (x_1, y_1) ．

注意：①当直线 l 的斜角为 0°时，点斜式方程化为特殊情况：$y=y_1$. 此时，直线 l 与 x 轴平行或重合．

②当直线 l 的倾斜角为 90°时，直线没有斜率，这时直线 l 与 y 轴平行或重合，它的方程不能用点斜式表示. 但因 l 上每一点的横坐标都等于 x_1，所以它的方程是 $x=x_1$.

③用直线的点斜式方程解题时，要注意是否遗漏满足题意但斜率不存在的直线．

例 3　求经过点（-1，-2）且与圆 $x^2+y^2=1$ 相切的直线方程．

解：当斜率存在时，设直线方程为 $y+2=k\ (x+1)$，即 $kx-y+k-2=0$. 由点到直线的距离及已知条件得

$$\left|\frac{k-2}{\sqrt{k^2+1}}\right|=1,$$

解得 $k=\frac{3}{4}$.

故当斜率存在时，直线方程是 $y+2=\frac{3}{4}(x+1)$，即 $3x-4y-5=0$.

但当斜率不存在时，由图（图略）知，直线方程 $x=-1$ 也满足条件.

所以所求直线方程为 $3x-4y-5=0$ 及 $x=-1$.

显然，后一个方程容易遗漏.

（2）斜截式

如果已知直线 l 的斜率是 k，与 y 轴的交点是（0，b）（b 是直线 l 在 y 轴上的截距），则直线 l 的斜截式方程是

$$y=kx+b.$$

这个方程是由直线 l 的斜率和它在 y 轴上的截距确定的. 它的主要特点是：斜率 k 存在且亮出截距.

注意：①斜截式方程是点斜式方程的特殊情况，当 $x_1=0$，$y_1=b$ 时，点斜式方程就化为斜截式方程.

②当 $k=1$，$b=0$ 时，斜截式方程化为 $y=x$；当 $k=0$ 时，斜截式方程化为 $y=b$.

③直线方程 $x=x_1$ 中，因斜率不存在，故它不能用斜截式方程表示.

④用直线的斜截式方程解题时，同样要注意是否遗漏满足题意但斜率不存在的直线.

例 4　求经过点（0，1）且与抛物线 $y^2=2x$ 相切的直线方程.

解：当斜率存在时，设直线方程为 $y=kx+1$，代入 $y^2=2x$ 中并整理得

$$k^2x^2+2(k-1)x+1=0.$$

$$\triangle=4(k-1)^2-4k^2=0，得 k=\frac{1}{2}.$$

故当斜率存在时，直线方程是 $y=\frac{1}{2}x+1$.

但当斜率不存在时，直线方程 $x=0$ 也满足条件.

所以所求直线方程为 $y=\frac{1}{2}x+1$ 及 $x=0$.

（3）两点式

已知直线 l 经过两点 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$，则直线 l 的两点式方程为

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\ (x_1\neq x_2, y_1\neq y_2).$$

这个方程是由直线上两点确定的，它的主要特点是：亮出两点的坐标 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$ 及斜率 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

注意：①当 $x_1\neq x_2$ 或 $y_1\neq y_2$ 时，不能用两点式方程表示.

②两点式方程来自于点斜式方程. 为便于记忆，有时也可以写成点斜式方程的形式：

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

例 5　问用两点式方程 $\frac{y-1}{b-1}=\frac{x-2}{a-2}$ $(b\neq 1, a\neq 2)$ 表示的所有直线是否覆盖整个平面？

答：用两点式方程表示的所有直线经过定点 (2，1) 和动点 (a，b)，但不经过点 (a，1) $(a\neq 2)$ 和点 (2，b) $(b\neq 1)$，所以不能覆盖整个平面，或者说，过定点 (2，1) 的直