点实成金

高考数学

丛书主编/王建军

本册主编/周长青

延边人民出版社

前 言

经过一线骨干教师的充分准备和名师专家的反复论证,《点实成金》系列丛书终于和广大师生见面了。该丛书囊括当今高考的九个学科——语文、数学、英语、物理、化学、生物、历史、地理、政治,每学科自成分册,其显著特色是:解读考纲,锁定考查点;精析考题,把准切入点;依托典题,突破重难点;点拨思路,排解疑误点。

解读考纲　锁定考查点

考纲是高考命题所必须遵奉的圭臬,只有深入吃透考纲精神,为当年的备考提供准确而强有力的信息支持,明确今年考什么,怎么考,才不致于在复习备考中高耗低效事倍功半乃至盲人瞎马劳而无功。

精析考题　把准切入点

虽然近年高考命题处于相对稳定的态势,但每年都会有不同程度的变化和创新。为此,该书分解了近年各地的高考试题,从形式上做了全面展示,从内容上做了精细解析,目的是借此勾画出命题的轨迹,从而准确预测年度命题走向。

依托典题　突破重难点

复习备考是一项实践性很强的劳动,有效的理论指导固然重要,但若没有足够的实战训练,也无异于纸上谈兵,难得实效。正是从此出发,该书的每一考点都编拟了足量的训练题目,旨在重点强攻,难点易化,于反复的训练中形成能力。

点拨思路　排解疑误点

在强化训练的同时,该书还注重了对思维的启迪。宏观上,总结了每一考点在实际应用中的规律方法;微观上,对训练题目的解答思路和步骤做了详尽的讲解。或以点带面,或化繁为简,利于消除疑点,走出误区。

可以说,选择了该书,就等于占据了备考的制高点;内化了该书,就等于提升了应考的能力点;活用了该书,就等于为高中生涯画上了圆满的句号。

当然,我们也恳望专家同仁不吝赐教,使得该书完美无憾。

编　者

2005 年 4 月

亨特文化教辅书目

一、《各个击破丛书》

英语： 语法　完形填空（一）　完形填空（二）　阅读理解（一）　阅读理解（二）　阅读理解（三）　短文改错　书面表达　听力（一）　听力（二）　高考词汇表　同义词辨析　病句例析　情景交际

语文： 字词　语句　现代文阅读　文言文阅读　诗词鉴赏　写作

数学： 函数与数列　不等式与概率统计　平面向量与平面解析几何　立体几何与极限导数

物理： 力学　热光原　电磁学　实验

化学： 概念与理论　元素化合物　有机物　实验与计算

生物： 生物（一）　生物（二）　生物选修

政治： 政治常识　经济常识　哲学常识

历史： 中国古代史　中国近现代史　世界近现代史

地理： 自然地理　人文地理　区域地理　地理选修

二、《点实成金丛书》

1. 高一知识点点实成金

语文　数学　英语　物理　化学　政治　历史　地理

2. 高二知识点点实成金

语文　数学　英语　物理　化学　生物　政治　历史　地理

3. 高三知识点点实成金

语文　数学　英语　物理　化学　生物　政治　历史　地理

4. 高考考点点实成金

语文　数学　英语　物理　化学　生物　政治　历史　地理

三、《表王》——基础知识表解丛书

语文　数学　英语　物理　化学　生物　政治　历史　地理

目　　录

CONTENTS

第一章　集合与简易逻辑

考点 1　集合的概念与运算 ……… (1)
考点 2　含绝对值的不等式与一元二次不等式 ……… (7)
考点 3　简易逻辑 ……… (14)

第二章　函　数

考点 4　映射与函数 ……… (22)
考点 5　函数的单调性 ……… (29)
考点 6　反函数 ……… (37)
考点 7　指数与指数函数 ……… (45)
考点 8　对数与对数函数 ……… (52)
考点 9　函数图象 ……… (60)
考点 10　函数的综合应用 ……… (70)

第三章　数　列

考点 11　数列的概念 ……… (79)
考点 12　等差数列 ……… (87)
考点 13　等比数列 ……… (95)
考点 14　数列的求和 ……… (104)
考点 15　等差与等比数列的综合及应用 ……… (112)

第四章　三角函数

考点 16　三角函数的概念 ……… (122)
考点 17　同角三角函数关系式及诱导公式 ……… (129)
考点 18　两角和与差的三角函数 ……… (136)
考点 19　三角函数式的求值、化简与证明 ……… (144)
考点 20　三角函数的图象 ……… (151)
考点 21　三角函数的性质 ……… (162)

第五章　平面向量

考点 22　向量的概念 ……… (171)
考点 23　向量的基本运算 ……… (176)
考点 24　平面向量的坐标运算 ……… (183)
考点 25　平面向量的数量积 ……… (190)
考点 26　线段的定比分点与平移 ……… (198)
考点 27　解斜三角形 ……… (206)

第六章　不等式

考点 28　不等式的概念与性质 ……… (215)
考点 29　算术平均数与几何平均数 ……… (219)
考点 30　不等式的解法 ……… (224)
考点 31　不等式的证明 ……… (229)

考点 32　含有绝对值的不等式 …………………………… (235)
考点 33　不等式的应用 ………… (240)

第七章　直线和圆的方程

考点 34　直线的方程 …………… (245)
考点 35　简单的线性规划 ……… (251)
考点 36　圆的方程 ……………… (258)
考点 37　直线和圆的位置关系 …………………………… (264)

第八章　圆锥曲线方程

考点 38　椭圆及其标准方程 …… (270)
考点 39　双曲线及其标准方程 …………………………… (279)
考点 40　抛物线及其标准方程 …………………………… (287)
考点 41　直线和圆锥曲线 ……… (295)

第九章　直线、平面、简单几何体

考点 42　空间直线与平面(一) …………………………… (304)
考点 43　空间直线与平面(二) …………………………… (312)
考点 44　空间角与距离 ………… (324)
考点 45　空间向量与运算 ……… (336)
考点 46　简单多面体与球 ……… (347)

第十章　排列、组合和概率

考点 47　排列与组合 …………… (358)
考点 48　二项式定理及应用 …… (365)
考点 49　概率 …………………… (371)

第十一章　概率与统计

考点 50　概率与统计 …………… (381)

第十二章　极限、导数

考点 51　极限与数学归纳法 …… (389)
考点 52　导数及其应用 ………… (396)

第十三章　复　数

考点 53　复数 …………………… (405)

第一章 集合与简易逻辑

考点1 集合的概念与运算

【考点阐释】

一、考点知识

1. 集合的基本概念

某些指定的对象的全体构成一个集合，其中构成集合的每个对象叫做这个集合的元素.

元素与集合的关系有两种：元素 $a\in \mathbf{A}$，或 $a\notin \mathbf{A}$，两种关系中有且只有一种成立.

2. 集合元素的特征

(1)确定性：给定一个集合，其元素是确定的.

(2)互异性：对于一个给定的集合，其中任意两个元素都是不同的对象.

(3)无序性：对于一个给定的集合，其元素之间无顺序关系，即集合中的元素交换次序后所得集合与原来的集合是相同的.

3. 集合的表示方法

(1)列举法：把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内，之间用逗号隔开.

(2)描述法：把集合元素的公共属性描述出来，写在大括号内，其一般形式为$\{x|P(x)\}$或$\{x:P(x)\}$.

(3)图示法：用一条封闭曲线围成的图形表示集合.

(4)区间法：用区间的形式将集合表示出来.

4. 集合的分类

(1)有限集：含有有限个元素的集合叫做有限集.

(2)无限集：含有无限个元素的集合叫做无限集.

5. 子集、交集、并集、补集

(1)子集：对于两个集合 A、B，如果集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 中的元素，就说集合 A 包含于集合 B，或者说集合 B 包含集合 A，记作 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$)，这时称 A 是 B 的子集. 若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$(或 $B\supsetneqq A$).

子集、真子集的性质：

$A\subseteq A$，$\varnothing\subseteq A$，$\varnothing\subsetneqq B(B\neq\varnothing)$.

若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$

子集、真子集的个数：

对于含有 n 个元素的有限集，它有 2^n 个子集，有 2^n-1 个真子集，有 2^n-2 个非空真子集.

(2)集合相等

若对于集合 A,B 有 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,则 $A=B$.

(3)交集:由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素构成的集合叫做 A 与 B 的交集,记作 $A\cap B$,即有 $A\cap B=\{x\in \mathbf{A}$ 且 $x\in \mathbf{B}\}$.

交集的性质:$A\cap A=A,A\cap\varnothing=\varnothing,A\cap B\subseteq A,A\cap B\subseteq B,A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$.

(4)并集:由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素构成的集合叫做 A 与 B 的并集,记作 $A\cup B$,即有 $A\cup B=\{x|x\in \mathbf{A}$,或 $x\in \mathbf{B}\}$.

并集的性质:$A\cup A=A,A\cup\varnothing=A,A\cup B\supseteq A,A\cup B\supseteq B,A\cup B=B\Leftrightarrow A\subset B$

(5)补集:设 S 是一个集合,A 是 S 的一个子集(即 $A\subseteq S$),则由 S 中不属于 A 的元素所构成的集合叫做集合 A 在 S 中的补集,记作 C_SA,即有 $C_SA=\{x|x\in \mathbf{S}$,且 $x\notin \mathbf{A}\}$.

补集的性质:$A\cup C_UA=\cup,A\cap C_UA=\varnothing,C_UU=\varnothing,C_U\varnothing=\cup$.

$C_U(A\cap B)=(C_UA)\cup(C_UB),C_U(A\cup B)=(C_UA)\cap(C_UB)$.

二、考点要求

理解集合、子集、补集、并集的概念. 了解空集和全集的意义. 了解属于、包含、相等关系的意义. 掌握有关的术语和符号,并会用它们正确表示一些简单的集合.

三、能力层级

本考点的重点是集合的有关概念如子集、真子集等和集合的运算,如交集、并集等. 要熟练掌握判断两集合间关系的方法,能熟练地进行集合的交集、并集等运算要注意集合语言与其他知识间的转化,提高等价转换能力.

四、突破方法

研究集合问题时,一定要认真分析,搞清集合中的元素是什么(尤其是用描述法给出的集合),这往往是正确解决问题的关键.

如:①集合 $A=\{y|y=x^2+1\}$ 表示的是函数 $y=x^2+1$ 的值域.

②集合 $B=\{x|y=\sqrt{x-1}\}$ 表示的是函数 $y=\sqrt{x-1}$ 的定义域.

③集合 $C=\{(x,y)|y=x+1\}$ 表示的是直线 $y=x+1$ 上的点的全体.

④集合 $D=\{x|x^2-3x+2=0\}$ 表示的是方程 $x^2-3x+2=0$ 的解集.

2. 对于一些含参数的集合问题,往往要对所得的结果代人集合中去进行检验,以免产生增解现象,检验的依据就是利用集合元素的互异性等.

3. 空集 $\varnothing$ 是一种特殊的集合,题目中若未注明集合非空时,应考虑空集的情形,以防漏解. 如出现条件 $A\subseteq B,A\cap B=A,A\cup B=B$ 等时,都应首先考虑 $A=\varnothing$ 是否符合题意,这体现了数学中的分类讨论思想.

4. 数形结合也是解决集合问题的常用方法,因为集合问题一般比较抽象,所以解题时要多借助数轴,平面直角坐标系或文氏图等工具,将抽象问题直观化、形象化,然后利用数形结合的方法解决.

5. 以下两个充要条件:①$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$;②$A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B$ 在解题中经常用到,用它们将两个集合间的间接关系转化为直接关系.

6. 集合问题多与函数、方程、不等式和圆锥曲线等联系在一起,要注意它们之间的相互转化,特别是重视集合语言与其他知识之间的联系.

【精典例析】

【例 1】(2002 年全国卷)设集合 $M=\{x|x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4},k\in \mathbf{Z}\}$,$N=\{x|x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2},$

$k\in\mathbf{Z}\}$，则 ( )

A. $M=N$　　B. $M\subsetneqq N$　　C. $M\supsetneqq N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

【解析】 方法一：分别取 $k=\cdots,-1,0,1,2,\cdots$. 得 $M=\{\cdots,-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{5}{4},\frac{7}{4},\cdots\}$，

$N=\{\cdots,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1,\frac{5}{4},\frac{3}{2},\frac{7}{4}\cdots\}$.

易看出，M 中的元素在 N 中都有，而 N 中有的元素，如 $\frac{1}{2}\notin M$. $\therefore M\subset N$.

方法二：$M=\{x|x=\frac{2k+1}{4},k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x|x=\frac{k+2}{4},k\in\mathbf{Z}\}$，而 $2k+1(k\in\mathbf{Z})$ 表示所有奇数，$k+2(k\in\mathbf{Z})$ 表示所有整数，从而 $M\subset N$.

方法三：由 $\frac{1}{2}\notin M$，$\frac{1}{2}\in\mathbf{N}$ 知 A、C 均错，又 $\frac{1}{4}\in\mathbf{M}$，$\frac{1}{4}\in\mathbf{N}$ 知 D 错.

【答案】 B

【评注】 判断两个集合间的关系，可以通过元素列举法、元素特征分析法等，当然作为选择题，也可使用特值法，排除法等.

【例 2】（2004 年安徽春季）已知向量集合 $M=\{\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}=(1,2)+\lambda(3,4),\lambda\in\mathbf{R}\}$，$N=\{\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}=(-2,-2)+\lambda(4,5),\lambda\in\mathbf{R}\}$，则 $M\cap N$ 等于 ( )

A. $\{(1,1)\}$　　B. $\{(1,1),(-2,-2)\}$

C. $\{(-2,-2)\}$　　D. $\varnothing$

【解析】 设 $\boldsymbol{a}_1=(1+3\lambda_1,2+4\lambda_1)$，$\boldsymbol{a}_2=(-2+4\lambda_2,-2+5\lambda_2)$，由 $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_2$ 可得

$\begin{cases}1+3\lambda_1=-2+4\lambda_1\\2+4\lambda_1=-2+5\lambda_2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}\lambda_1=-1\\\lambda_2=0\end{cases}$. $\therefore M\cap N=\{(-2,-2)\}$.

【答案】 C

【评注】 进行集合的运算时，一定要首先弄清集合中的元素是什么，本题中集合中的元素是平面向量.

【例 3】 已知集合 $A=\{x|x^2-x-6<0\}$，$B=\{x|0<x-m<9\}$.

(1)若 $A\cup B=B$，求实数 m 的取值范围；

(2)若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 m 的取值范围.

【解析】 借助充要条件，将 $A\cup B=B$ 转化为 $A\subseteq B$ 是解答本题的关键所在.

【解】 因为 $A=\{x|x^2-x-6<0\}=\{x|-2<x<3\}$

$B=\{x|0<x-m<9\}=\{x|m<x<m+9\}$.

(1)若 $A\cup B=B$，则 $A\subseteq B$. 所以有：$\begin{cases}m\leqslant-2\\m+9\geqslant3\end{cases}$，解得 $-6\leqslant m\leqslant-2$；

(2)若 $A\cap B=\varnothing$，则有 $\begin{cases}m+9>-2\\m<3\end{cases}$，解得 $-11<m<3$.

【评注】 本题在讨论两集合间的关系时，借助数轴进行分析，可简化解题思路，直观形象.

【例 4】 已知集合 $A=\{x|ax^2+2x+1=0\}$

(1)若 $A=\varnothing$,求 a 的值.

(2)若 A 中只有一个元素,求 a 的值.

(3)若 A 中至多有一个元素,求 a 的值.

【分析】集合 A 实质就是方程 $ax^2+2x+1=0$ 的解集,所以可通过对方程 $ax^2+2x+1=0$ 的根的情况的分析进行求解;另外方程中最高次数项 x^2 的系数为 a,应对其进行分类讨论.

【解】(1)$\because A=\varnothing$,$\therefore$关于 x 的方程 $ax^2+2x+1=0$ 无实根.若 $a=0$,此时 $x=-\dfrac{1}{2}$ 不合题意,舍去.

若 $a\neq 0$,有 $\Delta=4-4a<0$,即 $a>1$.

由以上可知:$a>1$ 为所求.

(2)A 中只有一个元素等价于关于 x 的方程 $ax^2+2x+1=0$ 只有一解或有两相等实数解.

若 $a=0$,$x=-\dfrac{1}{2}$,合题意.

若 $a\neq 0$,须有 $4-4a=0$ 即 $a=1$,此时 $x_1=x_2=-1$ 合题意.

由以上可得,$a=0$ 或 $a=1$ 时,A 中只有一个元素.

(3)A 中至多有一个元素,等价于关于 x 的方程 $ax^2+2x+1=0$ 至多有一组解,因此 $\begin{cases}a\neq 0\\4-4a\leqslant 0\end{cases}$ 或 $a=0$ 即 $a\geqslant 1$ 或 $a=0$ 由以上可知 $a\geqslant 1$ 或 $a=0$ 为所求.

【评注】注意(3)中 $A=\varnothing$ 亦适合,应优先考虑,以防漏解.

【例 5】已知集合 $A=\{(x,y)\mid \dfrac{y-3}{x-2}=1,x,y\in\mathbf{R}\}$,集合 $B=\{(x,y)\mid y=ax+2,x,y\in\mathbf{R}\}$,若 $A\cap B=\varnothing$,求 a 的值.

【分析】本题中集合 A 与 B 都是点的集合,它们分别表示一条直线(除去一个点)$y-3=x-2$ 和另一条直线 $y=ax+2$,因此可将集合问题转化为解析几何问题进行求解.

【解】A 是不包括点(2,3)的直线,B 是过点(0,2)的斜率存在的直线,要使 $A\cap B=\varnothing$,当两直线平行时 $a=1$,合题意.

当直线 $y=ax+2$ 与直线 $y=x+1$ 交于点(2,3)时,此时将(2,3)代入 $y=ax+2$ 求得 $a=\dfrac{1}{2}$,亦合题意,由以上可知:$A\cap B=\varnothing$ 时,$a=\dfrac{1}{2}$ 或 $a=1$.

【评注】首先理解集合 A、B 的属性,所对应的图形,其次弄清 $A\cap B=\varnothing$ 的意义,即两直线平行或相交于点(2,3).

【强化过关】

1. 已知集合 $M=\{0,1,2\}$,$N=\{x\mid x=2a,a\in\mathbf{M}\}$,则集合 $M\cap N$ 等于　(　　)

　A. $\{0\}$　　B. $\{0,1\}$　　C. $\{1,2\}$　　D. $\{0,2\}$

2. 已知集合 $A=\{0,2,3\}$,$B=\{x\mid x=ab,a、b\in\mathbf{A}\}$,则集合 B 的子集的个数是　(　　)

　A. 16　　B. 14　　C. 12　　D. 10

3. 已知集合 $M=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$,$N=\{(x,y)\mid x^2-y=0,x\in\mathbf{R},$

$y\in \mathbf{R}\}$,则集合 $M\cap N$ 中元素个数是 ( )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

4. 已知集合 $P=\{x|x^2=1,x\in \mathbf{R}\}$,$Q=\{x|mx=1,x\in \mathbf{R}\}$,若 $Q\subsetneq P$,那么 m 的值等于 ( )

A. 1　　B. -1　　C. 1 或 -1　　D. 0,1 或 -1

5. 已知集合 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 7\}$,$B=\{x|m+1<x<2m-1\}$,且 $B\neq\varnothing$,若 $A\cup B=A$,则 ( )

A. $-3\leqslant m\leqslant 4$　　B. $-3<m<4$　　C. $2<m<4$　　D. $2<m\leqslant 4$

6. 设集合 $U=\{(x,y)|x\in \mathbf{R},y\in \mathbf{R}\}$,$A=\{(x,y)|2x-y+m>0\}$,$B=\{(x,y)|x+y-n\leqslant 0\}$,那么点 $P(2,3)\in A\cap(C_UB)$ 的充要条件是 ( )

A. $m>-1,n<5$　　B. $m<-1,n<5$　　C. $m>-1,n>5$　　D. $m<-1,n>5$

7. 设集合 $A=\{5,\log_2(a+3)\}$,集合 $B=\{a,b\}$,若 $A\cap B=\{2\}$,则 $A\cup B=$________.

8. 设集合 $A=\{x|1<x\leqslant 2\}$,$B=\{x|x-a>a\}$,若 $A\subsetneq B$,则实数 a 的取值范围是________________.

9. 设 A、B 为两个集合. 下列四个命题:

①$A\not\subseteq B\Leftrightarrow$对任意 $x\in \mathbf{A}$,有 $x\notin B$　②$A\not\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$　③$A\not\subseteq B\Leftrightarrow A\not\supseteq B$　④$A\not\subseteq B\Leftrightarrow$存在 $x\in \mathbf{A}$,使得 $x\notin B$

其中真命题的序号是________.(把符合要求的命题序号都填上)

10. 集合 $P=\{(x,y)|y=k,k\in \mathbf{R}\}$,$Q=\{(x,y)|y=a^x+1,x\in \mathbf{R},a>0$ 且 $a\neq 1\}$,已知 $P\cap Q$只有一个子集,那么实数 k 的取值范围是________.

11. 设 $A=\{x|x^2-px+15=0\}$,$B=\{x|x^2-5x+q=0\}$,且 $A\cap B=\{3\}$,求:(1) p,q 的值;(2) $A\cup B$.

12. 若给出集合 $A=\{x|x^2+x-2\leqslant 0\}$,$B=\{x|2<x+1\leqslant 4\}$,$C=\{x|x^2+mx+n>0\}$,并且满足 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$,$(A\cup B)\cup C=\mathbf{R}$,求 m,n.

【答案与解析】

1. D　易知 $N=\{0,2,4\}$,$\therefore M\cap N=\{0,2\}$.

2. A　由于 $B=\{x|x=ab,a、b\in \mathbf{A}\}$,所以 $B=\{0,4,6,9\}$即 B 中共有 4 个元素,故共有 $2^4=16$ 个子集.

3. B　如右图 1—1,在平面角坐标系中分别画出方程 $x^2+y^2=1$ 及 $x^2-y=0$ 所对应的曲线,由图形可知,两曲线有两个交点,即 $M\cap N$ 中有两个元素.

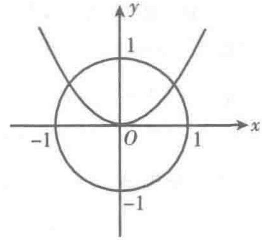


图 1—1

4. D　$P=\{x|x^2=1\}=\{1,-1\}$,由于 $Q\subsetneq P$,故:

①当 $m=0$ 时,$Q=\varnothing$,符合题意;②若 $Q=\{1\}$,这时 $m=1$;③若 $Q=\{-1\}$,这时 $m=-1$,综上 m 的值为 $0,1,-1$.

5. D　由于 $B\neq\varnothing$,且 $A\cup B=A$,所以 $B\subseteq A$. 依题意应有:

$\begin{cases} m+1\geqslant -2 \\ 2m-1\leqslant 7 \end{cases}$ 解得 $-3\leqslant m\leqslant 4$，但考虑到 $B\neq\varnothing$，应有 $2m-1>m+1$ 解得 $m>2$. 所以 m 的取值范围是 $2<m\leqslant 4$.

6. A　$\because C_UB=\{(x,y)\mid x+y>n\}$. $P\in \mathbf{A}\cap(C_UB)$，所以 $P\in\mathbf{A}$ 与 $P\in C_UB$ 同时成立，由 $P\in\mathbf{A}$，代入得 $m>-1$，由 $P\in(C_UB)$ 代入得 $n<5$，故 $m>-1$ 且 $n<5$.

7. 【解析】$\because A\cap B=\{2\}$，$\therefore \log_2(a+3)=2$，故 $a=1$，从而 $b=2$，这样 $B=\{1,2\}$，因此 $A\cup B=\{1,2,5\}$.

【答案】$\{1,2,5\}$

8. 【解析】由于 $A=\{x\mid 1<x\leqslant 2\}$，$B=\{x\mid x-a>0\}=\{x\mid x>a\}$，又 $A\subsetneqq B$，结合数轴可知：$a\leqslant 1$.

【答案】$a\leqslant 1$

9. 【解析】$A\not\subseteq B\Leftrightarrow$ 存在 $x\in\mathbf{A}$ 且 $x\notin B$，故①错误；②错误；④正确，对于③可构造反例如图 1－2 所示：

$A\not\subseteq B \not\Rightarrow A\not\supseteq B$，反之，同理.

【答案】④

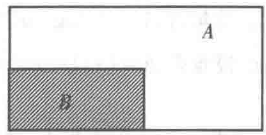


图 1－2

10. 【解析】$P\cap Q$ 只有一个子集，即 $P\cap Q=\varnothing$，亦即函数 $y=a^x+1$ 与 $y=k$ 的图象无交点，结合图象可知：$y=a^x+1>1$，$\therefore k\leqslant 1$，即 $k\in(-\infty,1]$.

【答案】$K\in(-\infty,1]$

11. 【解】① $\because A\cap B=\{3\}$，$\therefore 3\in\mathbf{A}$，且 $3\in\mathbf{B}$，而 3 是方程 $x^2-px+15=0$，也是方程 $x^2-5x+q=0$ 的根，所以得：$\begin{cases} 9-3p+15=0 \\ 9-15+q=0 \end{cases}$　解得 $\begin{cases} p=8 \\ q=6 \end{cases}$

②由①知 $A=\{3,5\}$，$B=\{2,3\}$. $\therefore A\cup B=\{2,3,5\}$.

12. 【解】$A=\{x\mid (x-1)(x+2)\leqslant 0\}=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{x\mid 1<x\leqslant 3\}$，

$\therefore A\cup B=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 3\}$. $\because (A\cup B)\cap C=\varnothing$，$(A\cup B)\cup C=\mathbf{R}$ 可知全集 $I=\mathbf{R}$.

即有 $C=C_R(A\cup B)$，$\therefore C=\{x\mid x<-2$ 或 $x>3\}$.

又 $C=\{x\mid x^2+mx+n>0\}$，$\therefore x^2+mx+n=0$ 的根为 -2 和 3.

由韦达定理得 $m=-(-2+3)=-1$，$n=(-2)\cdot 3=-6$.

【拓展提升】

1. 两个集合 A 与 B 之差定义为：$A-B=\{x\mid x\in\mathbf{A}$，且 $x\notin B\}$，若 $A=\{x\mid \log_2x\leqslant 1, x\in\mathbf{R}\}$，集合 $B=\{x\mid |x-2|<1, x\in\mathbf{R}\}$. 那么 $A-B$ 等于　（　　）

A. $\{x\mid x\leqslant 1\}$　B. $\{x\mid x\geqslant 3\}$　C. $\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$　D. $\{x\mid 0<x\leqslant 1\}$

2. 若集合 $M=\{x\mid x=\cos\dfrac{k\pi}{3}, k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x\mid x=\sin\dfrac{2k+3}{6}\pi, k\in\mathbf{Z}\}$，则有　（　　）

A. $M=N$　B. $M\subsetneqq N$　C. $M\supsetneqq N$　D. $M\cap N=\varnothing$

3. 已知全集 $S=\{(x,y)\mid x^2+y^2<9\}$，集合 $A=\{(x,y)\mid |x|<2, |y|<1\}$，$B=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 5\}$，则下列式子中表示空集的是________.

①$A\cap B$　②$(C_SA)\cap B$　③$A\cap(C_SB)$　④$(C_SA)\cap(C_SB)$

4. 设集合 $A=\{(x,y)\mid y^2-x-1=0\}$，$B=\{(x,y)\mid 4x^2-2x-2y+5=0\}$，$C=\{(x,y)\mid y=kx+b\}$，是否存在 $k,b(k\in\mathbf{N},b\in\mathbf{N})$，使 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$，证明你的结论.

【答案与解析】

1. C　$A=\{x\mid \log_2 x\leqslant 1\}=\{x\mid 0<x\leqslant 2\}$，$B=\{x\mid |x-2|<1\}=\{x\mid 1<x<3\}$，

$\therefore A-B=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$.

2. A　$N=\{x\mid x=\sin\dfrac{2k+3}{6}\pi,k\in\mathbf{Z}\}=\{x\mid x=\sin(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{k\pi}{3}),k\in\mathbf{Z}\}=\{x\mid x=\cos\dfrac{k\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\}$ $\therefore M=N$.

3. **【解析】**可分别画出集合 A、B、S 的图形，通过图形可知 $A\subsetneqq B$.

$\therefore A\cap B\neq\varnothing$，$(C_SA)\cap B\neq\varnothing$，$(C_SB)\cap A=\varnothing$. $(C_SA)\cap(C_SB)\neq\varnothing$.

【答案】③

4. **【解】**由集合 A 得抛物线 $y^2-x-1=0$ 在 y 轴上的截距为 1 和 -1，由集合 B 得抛物线 $4x^2+2x-2y+5=0$ 在 y 轴上的截距为 $\dfrac{5}{2}$，若存在 b，则 $1<b<\dfrac{5}{2}$，如图 1－3，又因为 $b\in\mathbf{N}$，$\therefore b=2$

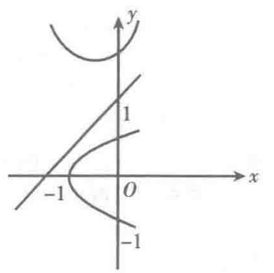


图 1－3

因为 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)=\varnothing$，所以只要考虑是否存在 k，使 $A\cap C=\varnothing$ 且 $B\cap C=\varnothing$. 将直线方程 $y=kx+2$ 代入抛物线 $y^2-x-1=0$ 中得：

$(kx+2)^2-x-1=0$，即 $k^2x^2+(4k-1)x+3=0$

令 $\Delta=(4k-1)^2-12k^2<0$，化简为 $4k^2-8k+1<0$，

解得 $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}<k<\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$，又 $\because k\in\mathbf{N}$，$\therefore k=1$

将直线 $y=kx+2$ 代入抛物线 $4x^2+2x-2y+5=0$ 中，得 $4x^2+(2-2k)x+1=0$

令 $\Delta=(2-2k)^2-16<0$ 解得：$-1<k<3$. 因为 $k\in\mathbf{N}$，

$\therefore k=1$ 或 $k=2$，所以使 $A\cap C=\varnothing$ 且 $B\cap C=\varnothing$ 的 k 为 1.

综上所述，满足条件的 k,b 是存在的，即当 $k=1,b=2$ 时，$(A\cup B)\cap C=\varnothing$.

考点 2　含绝对值的不等式与一元二次不等式

【考点阐释】

一、考点知识

1. 含绝对值不等式的常见解法

(1)利用绝对值的性质：$|x|<a(a>0)\Leftrightarrow -a<x<a$，$|x|>a(a>0)\Leftrightarrow x>a$ 或 $x<-a$.

如：形如 $|f(x)|<a(a>0)$，$|f(x)|>a(a>0)$ 的不等式可分别用如下方法求解：

$|f(x)|<a(a>0)\Leftrightarrow -a<f(x)<a$，$|f(x)|>a(a>0)\Leftrightarrow f(x)>a$ 或 $f(x)<-a$.

另外，对形如$|f(x)|<g(x)$和$|f(x)|>g(x)$的不等式也可用上述方法求解，而不必讨论 $g(x)$. 即

$|f(x)|<g(x) \Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x)$，$|f(x)|>g(x) \Leftrightarrow f(x)>g(x)$ 或 $f(x)<-g(x)$.

(2)利用绝对值的定义$|x|=\begin{cases} x, x\geqslant 0 \\ -x, x<0. \end{cases}$

(3)利用两边平方法：$|f(x)|<|g(x)| \Leftrightarrow f^2(x)<g^2(x) \Leftrightarrow [f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]<0$.

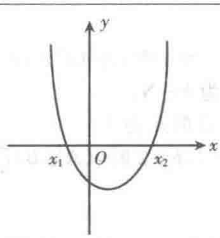
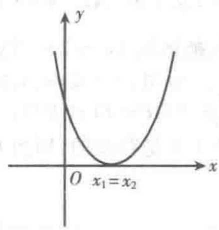
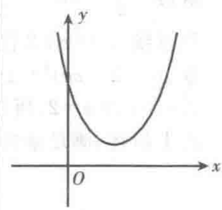
(4)分段讨论法：对含有两个或两个以上绝对值符号的不等式，可先求出使每一个绝对值符号内数学式子为零的 x 的值(称为零点)，将这些值依次标在数轴上，这些点将实数集划分为若干区间，然后根据绝对值意义去掉绝对值符号转化为不含绝对值的不等式求解.

(5)利用绝对值的几何意义：如$|x-2|$表示数轴上的点 x 与 2 之间的距离，$|x+2|+|x-3|$表示数轴上的点 x 与-2 和 3 两点之间的距离的和.

2. 一元二次不等式的解法

①一元二次不等式的标准形式：$ax^2+bx+c>0(a>0)$和 $ax^2+bx+c<0(a>0)$，在解一元二次不等式时，一般应先把不等式化为标准形式. 再求出对应的一元二次方程的根(当然是在方程有根的情况下)，若是大于 0 的形式，则解在两根之外，若是小于 0 的形式，则解在两根之间.

②一元二次不等式的解集、一元二次方程、对应的二次函数三者之间的关系如下表：

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$的图象	 	 	
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$的根	有两相异的根 $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$	有相等的两实根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	没有实根
$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$的解集	$\{x\|x<x_1，或 x>x_2\}$	$\{x\|x\in \mathbf{R} 且 x\neq -\dfrac{b}{2a}\}$	$\mathbf{R}$
$ax^2+bx+c<0$ $(a<0)$的解集	$\{x\|x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

二、考点要求

掌握简单的含绝对值的不等式和一元二次不等式的解法.

三、能力层级

本考点的重点是掌握两种类型的不等式的解法，尤其是一元二次不等式的解法. 必须要熟练掌握，灵活运用，因为这一内容与其他知识联系较多，是一种常用的基本工具，要对与一元二次不等式有关的各种类型的问题有整体上的把握和深刻的理解.

四、突破方法

1. 解含有两个或两个以上绝对值符号，并且其形式是和差的不等式，可先求出使每一个绝对值符号内的数学式子等于零的未知数的值（称为零点），将这些值依次在数轴上标注出来，它们把数轴分成若干个区间，讨论每一个绝对值符号内的式子在每一个区间上的符号，去掉绝对值符号，使之化为不含有绝对值的不等式去解，求解过程中不要丢掉对区间端点的讨论，以免漏解.

2. 一元二次不等式的求解步骤如下：

①将二次项系数化正（标准型）.

②确定 Δ 的符号，求出方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根.

③结合二次函数图象据不等号方向写出不等式的解集.

3. 解分式不等式或高次不等式，可通过分解因式，用标根法解.

分式不等式$\dfrac{f(x)}{g(x)}>0$ 的解集与不等式 $f(x)\cdot g(x)>0$ 的解集相同；分式不等式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}\leqslant 0$ 的解集与不等式组$\begin{cases}f(x)\cdot g(x)\leqslant 0\\ g(x)\neq 0\end{cases}$的解集相同.

4. 含参数的一元二次不等式的解法，常需要根据系数的取值范围展开讨论，其步骤为

(1)二次项系数(2)判别式(3)两根，主要是字母根大小的判定与讨论.

5. 在解不等式时，等价转化、分数讨论、函数思想、数形结合等，都是常用的思想方法.

6. 一元二次不等式的解法，充分体现了三个二次之间的关系，其中所蕴含的思想方法有着广泛的应用. 如一元二次方程根的分布问题，可设出对应的二次函数，结合函数图象求解.

【精典例析】

【例 1】(2003 年北京春季)若不等式 $|ax+2|<6$ 的解集为 $(-1,2)$，则实数 a 等于 (　　)

A. 8　　　B. 2　　　C. -4　　　D. -8

【分析】这是一个逆向性问题，可先去掉绝对值符号，再根据 a 的取值情况进行讨论，求出符合解集的 a 的值.

【解】由 $|ax+2|<6$，得 $-6<ax+2<6$，$-8<ax<4$.

①若 $a>0$，则 $\dfrac{-8}{a}<x<\dfrac{4}{a}$. 由题意 $-1<x<2$，得 $\dfrac{-8}{a}=-1$ 且 $\dfrac{4}{a}=2$，解得 $a=8$ 且 $a=2$ 矛盾，

②若 $a<0$，则 $\dfrac{4}{a}<x<\dfrac{-8}{a}$，由题设 $-1<x<2$，得 $\dfrac{4}{a}=-1$ 且 $\dfrac{-8}{a}=2$，解得 $a=-4$.

【答案】C

【评注】分类讨论思想在解题中的应用.

【例 2】不等式$(1+x)(1-|x|)>0$的解集是　　　　（　　）

A. $\{x|0\leqslant x<1\}$　　　　B. $\{x|x<0$，且$x\neq-1\}$

C. $\{x|-1<x<1\}$　　　　D. $\{x|x<1$，且$x\neq-1\}$

【分析】本题求解从去掉绝对值符号的两种情况分析下手，在$x\geqslant0$和$x<0$时，分别求得不等式的解集，然后求它们的并集，即可得出答案.

【解】当$x\geqslant0$时，不等式化为$(1+x)(1-x)>0$ $\therefore -1<x<1$.

此时不等式的解为$0\leqslant x<1$.

当$x<0$时，不等式化为$(1+x)(1+x)>0$，即$(1+x)^2>0$. $\therefore x\neq-1$.

此时不等式的解为$x<0$且$x\neq-1$.

综上可知，不等式解集为$\{x|x<1$，且$x\neq-1\}$

【答案】D

【例 3】已知不等式$ax^2+bx+c\geqslant0$的解集是$\{x|-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant2\}$，则不等式$cx^2+bx+a<0$的解集是　　　　（　　）

A. $\{x|-2<x<\frac{1}{3}\}$　　　　B. $\{x|x<-2$或$x>\frac{1}{3}\}$

C. $\{x|-3<x<\frac{1}{2}\}$　　　　D. $\{x|x<-3$或$x>\frac{1}{2}\}$

【分析】充分利用一元二次不等式的解集与一元二次方程根之间的对应关系求解，同时注意应用一元二次方程中根与系数的关系.

【解】由$ax^2+bx+c\geqslant0$的解集为$\{x|-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant2\}$，知$a<0$，又$(-\frac{1}{3})\times2=\frac{c}{a}<0$，

则$c>0$. 又$-\frac{1}{3}$，2为$ax^2+bx+c=0$的两根，则$\begin{cases}-\frac{b}{a}=\frac{5}{3},\\ \frac{c}{a}=-\frac{2}{3}.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-\frac{5}{3}a,\\ c=-\frac{2}{3}a.\end{cases}$

不等式变为$(-\frac{2}{3}a)x^2+(-\frac{5}{3}a)x+a<0$即$2ax^2+5ax-3a>0$.

$\because a<0$，$\therefore 2x^2+5x-3<0$，解集为$\{x|-3<x<\frac{1}{2}\}$.

【答案】C

【评注】对于绝对值不等式的求解必须在去绝对值符号时确定其正负性质，讨论务必严谨. 而对于一元二次不等式的求解则必须关注含参数的问题，对参数的讨论要慎之又慎.

【例 4】解不等式$|\frac{3x}{x^2-4}|\leqslant1$.

【分析】这是绝对值不等式，可以去掉绝对值符号进行求解，一种方法是两边平方，另一种方法是利用绝对值的性质.

【解法 1】原不等式等价于$(\frac{3x}{x^2-4})^2\leqslant1$，即$9x^2\leqslant(x^2-4)^2(x\neq\pm2)$，整理得：

$x^4-17x^2+16\geqslant0$　所以$x^2\leqslant1$或$x^2\geqslant16$，解得$-1\leqslant x\leqslant1$或$x\geqslant4$或$x\leqslant-4$.

故原不等式的解集为$\{x|-1\leqslant x\leqslant1$，或$x\leqslant-4$，或$x\geqslant4\}$.

【解法 2】原不等式可化为

$$-1\leqslant\frac{3x}{x^2-4}\leqslant 1.\text{即}\begin{cases}\dfrac{3x}{x^2-4}\geqslant -1, & ①\\ \dfrac{3x}{x^2-4}\leqslant 1, & ②\end{cases}$$

解①得：$x\leqslant -4$，或 $-2<x\leqslant -1$，或 $x>2$　解②得：$x<-2$，或 $-1\leqslant x<2$，或 $x\geqslant 4$

故原不等式解集为：$\{x|-1\leqslant x\leqslant 1$，或 $x\leqslant -4$，或 $x\geqslant 4\}$.

【例 5】(2004 年上海卷)记函数 $f(x)=\sqrt{2-\frac{x+3}{x+1}}$ 的定义域为 A，$g(x)=\lg[(x-a-1)(2a-x)](a<1)$ 的定义域为 B.

(1)求 A；

(2)若 $B\subseteq A$，求实数 a 的取值范围.

【分析】分别求出集合 A、B，再根据 $B\subseteq A$ 利用数轴建立不等式.

【解】(1)由 $2-\frac{x+3}{x+1}\geqslant 0$，得 $\frac{x-1}{x+1}\geqslant 0$，解得 $x\geqslant 1$ 或 $x<-1$，

即 $A=(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)$；

(2)由 $(x-a-1)(2a-x)>0$，得 $(x-a-1)(x-2a)<0$.

$\because a<1$　$\therefore a+1>2a$，所以不等式解为 $2a<x<a+1$，即 $B=(2a,a+1)$.

$\because B\subseteq A$　$\therefore 2a\geqslant 1$ 或 $a+1\leqslant -1$，即 $a\geqslant\frac{1}{2}$ 或 $a\leqslant -2$.

而又知 $a<1$，$\therefore \frac{1}{2}\leqslant a<1$ 或 $a\leqslant -2$.

故当 $B\subseteq A$ 时，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-2]\cup[\frac{1}{2},1)$.

【强化过关】

1. 不等式 $1<|x+1|<3$ 的解集为　(　　)

A. $(0,2)$　B. $(-2,0)\cup(2,4)$

C. $(-4,0)$　D. $(-4,-2)\cup(0,2)$

2. 不等式 $\frac{x-1}{x}\geqslant 2$ 的解集是　(　　)

A. $[-1,0)$　B. $[-1,+\infty)$

C. $(-\infty,-1]$　D. $(-\infty,-1]\cup(0,+\infty)$

3. 不等式 $|2x^2-1|\leqslant 1$ 的解集为　(　　)

A. $\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$　B. $\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$

C. $\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$　D. $\{x|-2\leqslant x\leqslant 0\}$

4. 若不等式 $|4x-5|+|4x-3|\leqslant m$ 有解，则实数 m 的取值范围是　(　　)

A. $(1,+\infty)$　B. $[1,+\infty)$　C. $(2,+\infty)$　D. $[2,+\infty)$

5. 若集合 $P=\{m|-4<m<0\}$，$Q=\{m|$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 不等式 $mx^2-mx-1<0$ 恒成立$\}$，则　(　　)

A. $P\cap Q=\varnothing$　B. $P=Q$　C. $P\subsetneqq Q$　D. $Q\subsetneqq P$

6. 不等式$|x-\log_{\frac{1}{2}}x|<x+|\log_{\frac{1}{2}}x|$的解集为 (　　)

A. $(0,1)$　　B. $(0,+\infty)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $(\frac{1}{2},1)$

7. 不等式$|x+2|\geqslant|x|$的解集是________.

8. 不等式$|\frac{x}{x^2-1}|>\frac{x}{x^2-1}$的解集是________.

9. 若定义符号函数$\mathrm{sgn}x=\begin{cases}1,x>0\\0,x=0\\-1,x<0\end{cases}$,则不等式$x+2>(2x-1)^{\mathrm{sgn}x}$的解集是________.

10. 已知二次函数$y=ax^2+bx+c(x\in\mathbf{R})$的部分对应值如下表:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

则不等式$ax^2+bx+c>0$的解集是________.

11. 设不等式$5-x>7|x+1|$与$ax^2+bx-2>0$同解,求a,b的值.

12. 已知实数P满足不等式$\frac{2x+1}{x+2}<0$,试判断方程$y^2-2y+5-p^2=0$有无实数根?

13. 解关于x的不等式$|3x-2|\leqslant 2m-1(m\in\mathbf{R})$

【答案与解析】

1. D　$1<|x+1|<3\Leftrightarrow\begin{cases}|x+1|>1\\|x+1|<3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1>1\text{ 或 }x+1<-1\\-3<x+1<3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\text{ 或 }x<-2\\-4<x<2\end{cases}$

$\therefore -4<x<-2$ 或 $0<x<2$.

2. A　$\frac{x-1}{x}\geqslant 2\Leftrightarrow\frac{x-1}{x}-2\geqslant 0\Leftrightarrow\frac{-x-1}{x}\geqslant 0\Leftrightarrow\begin{cases}x(x+1)\leqslant 0\\x\neq 0\end{cases}$ $\therefore x\in[-1,0)$.

3. A　$\because |2x^2-1|\leqslant 1\Leftrightarrow -1\leqslant 2x^2-1\leqslant 1\Leftrightarrow 0\leqslant x^2\leqslant 1\Leftrightarrow -1\leqslant x\leqslant 1$.

4. D　令$f(x)=|4x-5|+|4x-3|$,则可求得函数$f(x)$的最小值为2,故要使$f(x)\leqslant m$有解,所以$m\geqslant 2$.

5. C　对于集合Q,对任意$x\in\mathbf{R}$不等式$mx^2-mx-1<0$恒成立,

若$m=0$,不等式化为$-1<0$恒成立;若$m<0$,则应有$\Delta<0$,解得$-4<m<0$.

综上,m的取值范围是$-4<m\leqslant 0$.即$Q=(-4,0]$.因此$P\subsetneqq Q$.

6. A　不等式$|x-\log_{\frac{1}{2}}x|<x+|\log_{\frac{1}{2}}x|$可化为:$|x+\log_2 x|<x+|\log_2 x|$.

应有:$x\cdot\log_2 x<0$,而$x>0$.$\therefore\log_2 x<0$,解得$0<x<1$.

7. 【解析】$|x+2|\geqslant|x|\Leftrightarrow(x+2)^2\geqslant x^2\Leftrightarrow 4x+4\geqslant 0\Leftrightarrow x\geqslant -1$.

【答案】$\{x|x\geqslant -1\}$

8. 【解析】由绝对值的意义知,$|\frac{x}{x^2-1}|>\frac{x}{x^2-1}\Leftrightarrow\frac{x}{x^2-1}<0$,

$\therefore x(x^2-1)<0$.解得:$x<-1$ 或 $0<x<1$.

【答案】$\{x|x<-1$ 或 $0<x<1\}$