

箱梁桥 分析与设计

(梁段板元法)

钱寅泉 倪元增 周良◎ 编著



**ANALYSIS AND DESIGN
OF BOX GIRDER BRIDGE**



人民交通出版社股份有限公司
China Communications Press Co., Ltd.

箱梁桥分析与设计

(梁段板元法)

钱寅泉 倪元增 周 良 编著



人民交通出版社股份有限公司
China Communications Press Co., Ltd.

内 容 提 要

本书介绍了“梁段板元法”,包括大曲率箱梁和各种基本变形的概念和计算格式。还简要地介绍了《美国公路桥梁设计规范》,并给出了与“梁段板元法”相结合的预应力砼简支箱梁桥设计算例。

本书可供有关专业的科技人员和师生参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

箱梁桥分析与设计(梁段板元法)/钱寅泉,倪元增,周良编著. —北京:人民交通出版社股份有限公司, 2015.8

ISBN 978-7-114-12337-5

I. ①箱… II. ①钱…②倪…③周… III. ①箱梁桥—结构分析②箱梁桥—设计 IV. ①U448.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 136787 号

书 名: 箱梁桥分析与设计(梁段板元法)

著 作 者: 钱寅泉 倪元增 周 良

责任编辑: 曲 乐 卢俊丽

出版发行: 人民交通出版社股份有限公司

地 址: (100011)北京市朝阳区安定门外外馆斜街 3 号

网 址: <http://www.ccpress.com.cn>

销售电话: (010)59757973

总 经 销: 人民交通出版社股份有限公司发行部

经 销: 各地新华书店

印 刷: 北京鑫正大印刷有限公司

开 本: 720×960 1/16

印 张: 15.75

字 数: 270 千

版 次: 2015 年 8 月 第 1 版

印 次: 2015 年 8 月 第 1 次印刷

书 号: ISBN 978-7-114-12337-5

定 价: 39.00 元

(有印刷、装订质量问题的图书由本公司负责调换)

前 言

有限单元位移法是桥梁工程设计中广为采用的分析方法。对于箱梁桥的分析,目前常采用两种方法:一种为杆元法,是沿梁轴线建立梁的杆件单元进行分析;另一种为板元法,是将箱梁用通用的板单元组装起来进行分析。前者能较方便地求得截面的主要内力,但较为粗略,未能全面反映横截面上的应力分布;后者能较直接且全面地反映横截面上的应力分布,但是单元过细,要算出整体截面的内力值,其工作量将非常大。由于两者各自的缺点,皆不太适用于通用的砼结构设计。

本书给出一种介于两者之间的分析方法,称为“梁段板元法”。采用梁段板元法分析箱梁桥,既有杆元法的直接,又有板元法的贴切。此法对纵向梁段像杆件单元那样表达各项基本变形,对于横向梁段用截面板元的各种位移形函数表达各项基本变形的截面位移模式。箱梁的基本变形有:轴向拉压、竖向弯曲及剪翘、水平弯曲及剪翘、扭转及扭翘、剪力滞效应和畸变,此法皆给予考虑。这些变形可分为主要变形和次要变形,在分析中可以忽略次要变形间的耦联。因而,梁段板元法可以说是对通用的板元法充分利用力学理论的一种前处理,使之在后处理的输出中既可方便地得到各截面板元的应力和内力,又可得到整体截面的内力及各种变形位移。另外,此法更为大曲率箱梁桥的分析打开了方便之门。

本书对梁段板元法的推导是建立在能量原理基础上的弹性分析。因而第一章是本书的基础知识。第二章~第六章用直箱梁先建立其理论上的概念及各项基本变形的截面位移模式,再建立梁段板元法的计算格式,进而研究小曲率箱梁和大曲率箱梁问题。本书未将曲线箱梁与直线箱梁合在一起叙述,因而宜于循序渐进,便于形成概念,且可以阐述得更为完整,虽然计算程序可以统一采用大曲率箱梁桥的计算格式。

在梁段板元法中,沿纵向除了采用通用的“二节点三次单元”外,还引入“三节点二次单元”,将它们相适应地结合起来,使得基本应变的主要项有相同次数的多项式,因而与解析解几乎能重合。三节点二次单元在处理变截面、预应力偏心 and 弯矩变化方面都很有效。

本书推出的小曲率与大曲率的应变与应变曲率关系,仅差一个曲率修正因子,它是考虑了大曲率的应变受纵向纤维弧长的影响。大曲率箱梁各基本变形的截面位移模式仍可采用直箱梁,即小曲率箱梁。大曲率与小曲率箱梁的主要差别在于计算应变时应考虑纵向纤维不同的初曲率影响,就像在材料力学中对弯梁(弯钩)的应力分析。

第九章~第十一章分别叙述了温度应力分析、预应力砼梁分析、砼梁徐变与收缩分析。摘录了某些专著的部分内容,但也有新认识和新内容。本书所书写的“砼”字,音“tong”,即“混凝土”,已是法定的书面文字。

本书的第十二章及前面的有关章节,介绍了《美国公路桥梁设计规范》中的按荷载与抗力系数的设计方法,该规范很值得学习。第十二章给出了一个预应力砼筒支箱梁桥的设计算例,利用梁段板元法方便地算得了有关截面板元的应力和内力以及整体截面的内力和变形位移,亦得出了内力组合值。进而按使用极限状态,对截面板元做了配筋设计,并对整体截面进行强度极限状态下的验算。这种将梁段板元法与美国规范相结合的设计方法颇为简捷、实用。

书中配有必要的数值算例,以检验算式的正确性。本书很多概念是新的,对可能出现的疏忽,恳请读者批评指正。

钱寅泉 倪元增 周 良

2015年3月

目 录

第一章 能量原理与有限元法	1
第一节 弹性应变能	1
第二节 最小总势能原理	2
第三节 直梁有限元位移法	6
第四节 简支梁有限元法算例	8
第五节 三截面方程及其截面逆阵消元法	11
第六节 小结	13
第二章 弯曲与剪翘	14
第一节 矩形截面直梁的弯翘分析	14
第二节 弯翘分析的有限元法	19
第三节 箱梁弯翘的截面板元位移模式	24
第四节 变截面梁的单元刚度矩阵	28
第五节 小结	32
第三章 扭转与扭翘	33
第一节 直箱梁的扭转变形	33
第二节 扭剪及扭翘的截面板元位移模式	35
第三节 直箱梁约束扭转控制微分方程	40
第四节 直箱梁约束扭转的单元刚度矩阵	44
第五节 直箱梁约束扭转梁段板元法计算	47
第六节 小结	49
第四章 剪力滞效应	50
第一节 引言	50
第二节 直箱梁剪力滞翘曲截面位移模式	50
第三节 直箱梁剪力滞控制微分方程	54
第四节 直箱梁剪力滞的梁段板元法	57
第五节 直箱梁剪力滞梁段板元法算例	60
第六节 钢与砼结合梁分析	65

第七节 小结	72
第五章 直箱梁畸变	73
第一节 一般概念	73
第二节 截面畸变的机动分析	76
第三节 单室对称箱梁畸变分析	77
第四节 双室对称箱梁畸变分析	81
第五节 小结	86
第六章 多肋板桥分析	88
第一节 多室板桥的梁段板元法	88
第二节 刚接 T 梁板桥的梁段板元法	93
第三节 小结	100
第七章 小曲率箱梁	101
第一节 小曲率箱梁的变形关系	101
第二节 小曲率箱梁的弯扭分析	103
第三节 考虑剪滞的弯扭分析	107
第四节 小曲率箱梁的水平弯拉	110
第五节 小结	111
第八章 大曲率箱梁	112
第一节 引言	112
第二节 弯箱梁的圆锥板元及其变形	112
第三节 大曲率箱梁的应变与应变曲率	116
第四节 截面板元的基本位移形函数与应变表达式	118
第五节 考虑曲率修正因子的形导函数乘积积分	120
第六节 大曲率箱梁截面的翘翘位移模式	122
第七节 大曲率箱梁截面的剪滞翘曲位移模式	124
第八节 大曲率箱梁截面板元刚度矩阵	126
第九节 大曲率箱梁的梁段板元法	129
第十节 小结	134
第九章 温度应力分析	136
第一节 引言	136
第二节 温度分布研究	136
第三节 温度荷载效应	138

第四节	温度应力在直箱梁纵向的分析	140
第五节	横向温度应力	144
第六节	温度效应对弯箱梁的分析	146
第七节	小结	150
第十章	预应力砼梁分析	151
第一节	预应力砼桥梁的发展动向	151
第二节	预应力损失与有效预应力	154
第三节	有效预应力与等效节点力	157
第四节	超张拉及摩擦损失分析	160
第五节	荷载平衡法设计概念	162
第六节	预应力效应分析及连续弯箱梁中支偏心的影响	164
第七节	预应力钢梁分析	167
第八节	小结	171
第十一章	砼梁徐变与收缩分析	172
第一节	一般概念	172
第二节	砼应力-应变增量方程	175
第三节	静定砼梁预应力筋的应力损失	179
第四节	砼梁徐变的有限单元步进法	184
第五节	砼叠合梁的徐变分析	192
第六节	小结	201
第十二章	箱梁桥设计原理	202
第一节	概率极限状态设计	202
第二节	荷载及荷载组合	204
第三节	地震效应	210
第四节	弹性分析与非弹性或非线性分析	216
第五节	砼构件按弯曲和轴向力效应设计	218
第六节	砼箱梁桥设计步骤与算例	226
第七节	钢与砼结合梁	234
第八节	小结	241
	参考文献	243

第一章 能量原理与有限元法

第一节 弹性应变能

运用结构分析的能量原理可以方便地建立有限元法^[1]。本章用工程师容易理解的语言,简要地说明能量原理的概念,进而引出杆件系统有限元法。在此基础上,本书建立了梁段板元法供箱梁桥分析与设计之用,它形成于作者的前著《弹性薄壁梁桥分析》^[2]。

现以一弹簧为例,如图 1-1 所示,其弹簧常数为 k ,弹簧由自由状态的 0 伸长到 Δ ,弹簧力与伸长 u 成正比例,即 $P=ku$ 。于是弹簧中储存的弹性应变能为:

$$U = \int_0^{\Delta} ku \, du = \frac{1}{2} k \Delta^2 \quad (1-1)$$

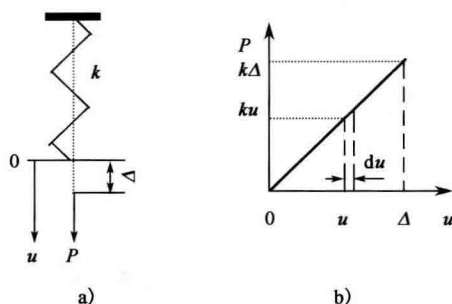


图 1-1 弹簧模型

又取一匀质直杆,杆长为 L ,横截面面积为 A ,线弹性模量为 E ,受轴向力 N 作用作简单拉伸。根据材料力学作平截面假设,如图 1-2 所示 dy 微段有 ϵdy 的伸长,其中 $\epsilon=v'$, v 为横截面的轴向位移。于是该直杆的弹性应变能为:

$$U = \int_0^L \int_A \frac{1}{2} E \epsilon^2 \, dA \, dy = \int_0^L \frac{1}{2} EA (v')^2 \, dy \quad (1-2)$$

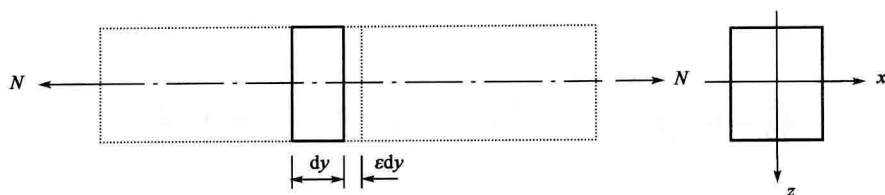


图 1-2 匀质直杆简单拉伸

再取一匀质直杆, 杆长为 L , 横截面惯性矩为 I , 线弹性模量为 E , 受弯矩 M 作用而作纯弯曲。根据材料力学作平截面假设, 如图 1-3 所示取 dy 微段某点有一 $-\kappa z dy$ 的伸长, 其中应变曲率 $\kappa = w''$, w 为直杆的横向位移, z 为应力点离截面中和轴的距离。于是该直杆的弹性应变能为:

$$U = \int_0^L \int_A \frac{1}{2} E (-w'' z)^2 dA dy = \int_0^L \frac{1}{2} EI (w'')^2 dy \quad (1-3)$$

式中: $I = \int_A z^2 dA$ 。

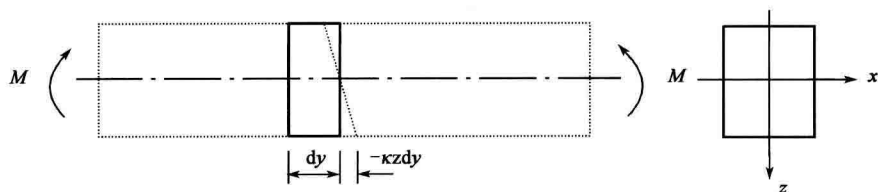


图 1-3 匀质直杆纯弯曲

第二节 最小总势能原理

弹性应变能是一种势能, 它仅与起点及终点的相对位置有关, 而与所经过的路径无关, 对于外荷载则具有重力势能。现在考虑的外力, 可以是广义力, 且皆视为具有与重力一样的势能。取对应的位移或广义位移的参考零点, 外力对应于位移的功的反号即为该外力的势能。如图 1-1 所示的弹簧模型中的外力 P 与位移 u 的正向一致, 则其势能为:

$$V = -Pu \quad (1-4)$$

如图 1-2 所示的直杆两端有相对的轴向位移 v , 则轴向力 N 的势能为:

$$V = -Nv \quad (1-5)$$

如图 1-3 所示的直杆两端有相对的转角 φ , 则端弯矩 M 的势能为:

$$V = -M\varphi \quad (1-6)$$

弹性体系的总势能为弹性应变能 U 与外力势能 V 之和, 即:

$$\Pi = U + V \quad (1-7)$$

对于如图 1-1 所示的悬挂一重物 P 的弹簧, 有总势能为:

$$\Pi = \frac{1}{2}ku^2 - Pu \quad (1-8)$$

球往低处滚、水往低处流是人们的常识, 提升为理论, 则为最小总势能原理。在此将式(1-8)中 Π 对 u 取极值条件:

$$\frac{d\Pi}{du} = ku - P = 0 \quad (1-9)$$

此为该弹性体系的平衡方程。再求一次导数, 得:

$$\frac{d^2\Pi}{du^2} = k > 0 \quad (1-10)$$

可见平衡方程为总势能的极小值条件, 两者是等价的。它可归结为最小总势能原理: 在所有满足几何边界条件的容许位移中, 其真实的位移使总势能取极小值。

现以如图 1-2 所示的轴向拉伸直杆为例, 考虑到沿 y 轴还有轴向分布力 q_y , 且左端固定而右端有轴向位移 v_1 , 故其总势能为:

$$\Pi = \int_0^L \left[\frac{1}{2}EA(v')^2 - q_y v \right] dy - Nv_1 \quad (1-11)$$

将式(1-11)与式(1-8)作比较可以看出, u 是简单变量, 而 v 是沿 y 轴的轴向位移函数。因而式(1-8)中 Π 是简单变量的函数, 求极值只要取一阶导数为 0 即可; 而式(1-11)中 Π 是函数的函数, 称为泛函, 求其极值要作变分运算, 取一阶变分为 0, 以求出 v 这个位移函数而满足平衡条件。

作变分运算并不困难, 其运算法则与微分运算法则一样。如以式(1-11)为例, 求 Π 对 v 的一阶变分, 只要将 v 及其导数 v' 看作独立变量, 作微分运算, 并将微分符号 d 记成变分符号 δ 即可。这样, 式(1-11)的极值条件, 即一阶变分为 0 可以写成:

$$\delta\Pi = \int_0^L (EA v' \delta v' - q_y \delta v) dy - N \delta v_1 = 0 \quad (1-12)$$

该式有 δv 和 $\delta v'$ 两种变分, 应将后者的一阶导数降阶, 才能作同类项归并, 这就

需要作分部积分。由于变分与微分的次序可以互换,即 $\delta v' = (\delta v)'$, 分部积分的公式有:

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial v'} \delta v' dy = \left[\frac{\partial F}{\partial v'} \delta v \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial F}{\partial v'} \right) \delta v dy \quad (1-13)$$

式中, F 为 Π 中的被积泛函数; $\frac{\partial F}{\partial v'}$ 相对于式(1-12)中的 $EA v'$ 。

将式(1-12)的有关项利用式(1-13)作分部积分,得:

$$\int_0^L EA v' \delta v' dy = [EA v' \delta v]_0^L - \int_0^L EA v'' \delta v dy \quad (1-14)$$

将其代回到式(1-12)作整理,并考虑到 $\delta v|_{y=0} = 0$ 和 $v' \delta v|_{y=L} = v'_1 \delta v_1$, 写成:

$$-\int_0^L (EA v'' + q_y) \delta v dy + (EA v'_1 - N) \delta v_1 = 0 \quad (1-15)$$

考虑到 δv 和 δv_1 的任意性,为使该式满足应有:

$$EA v'' = -q_y \quad (1-16)$$

$$EA v'_1 = N \quad (1-17)$$

其中,式(1-16)为材料力学所熟知的轴向位移的微分方程,是一个平衡方程,在变分法中称为 Euler 方程;式(1-17)是右端的自然边界条件,即右端的应变内力与端外力相等。同时已经考虑了左端的几何边界条件: $\delta v|_{y=0} = 0$ 。

从上面总势能 Π 作一阶变分求极值的过程中可以看出,在给定的几何边界条件下,它得到的是弹性变形的平衡微分方程和自然边界条件,由此可求出该平衡状态实际的变形位移。因而求总势能的极值条件与建立平衡方程是等价的。对式(1-11)求二阶变分,即对式(1-12)的 v' 再作一次变分,而式中的其他量皆为常量,可得:

$$\delta^2 \Pi = \int_0^L EA (\delta v')^2 dy > 0 \quad (1-18)$$

可见所求得的轴向变形位移使总势能确为极小值。

现再以如图 1-4 所示的等截面简支梁为例来说明建立总势能 Π 泛函,并取其极值条件 $\delta \Pi = 0$ 而推出弹性变形的平衡方程和自然边界条件的全过程。图中直梁的抗弯刚度为 EI , 计算跨径为 L , 受横向均布荷载 q 的作用,待求的挠度曲线为 w , 其总势能可以写为:

$$\Pi = \int_0^L \left[\frac{1}{2} EI (w'')^2 - qw \right] dy \quad (1-19)$$

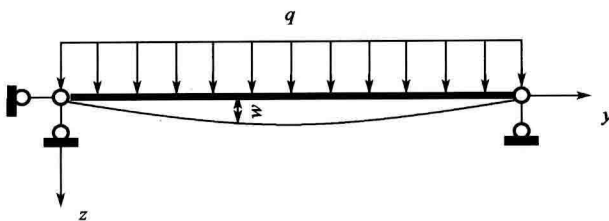


图 1-4 均布荷载下的简支梁

取 $\delta\Pi=0$ 有:

$$\delta\Pi = \int_0^L (EIw''\delta w'' - q\delta w) dy = 0 \quad (1-20)$$

将积分式的前项作一次分部积分有:

$$\int_0^L EIw''\delta w'' dy = [EIw''\delta w']_0^L - \int_0^L EIw'''\delta w' dy \quad (1-21)$$

再将右端积分项作一次分部积分有:

$$-\int_0^L EIw'''\delta w' dy = -[EIw'''\delta w]_0^L + \int_0^L EIw^{IV}\delta w dy \quad (1-22)$$

将式(1-21)和式(1-22)连续代入式(1-20)整理后可得:

$$\int_0^L (EIw^{IV} - q)\delta w dy - [EIw'''\delta w]_0^L + [EIw''\delta w']_0^L = 0 \quad (1-23)$$

考虑到简支梁有给定的几何边界条件 $\delta w|_{y=0} = 0$ 和 $\delta w|_{y=L} = 0$, 而 δw 和 $\delta w'$ 具有任意性, 为使上式为 0 则应有:

$$EIw^{IV} = q \quad (1-24)$$

$$EIw''|_{y=0} = 0 \quad (1-25a)$$

$$EIw''|_{y=L} = 0 \quad (1-25b)$$

式(1-24)为材料力学中的挠度曲线的平衡微分方程, 式(1-25)为两端弯矩为 0 的自然边界条件。对它进行积分即可求得在均布荷载作用下的简支梁的挠度曲线方程式。

如果对 Π 取二阶变分 $\delta^2\Pi$, 像式(1-18)那样有:

$$\delta^2\Pi = \int_0^L EI(\delta w'')^2 dy > 0 \quad (1-26)$$

即所求得的挠度曲线使此总势能确是极小值。

第三节 直梁有限元位移法

现将一直梁按有限元剖分,取其中一单元 ij ,如图 1-5 所示,单元长为 l ,抗拉刚度为 EA ,抗弯刚度为 EI 。在连接各单元的节点 i 上有位移分量 $\Delta_i = [v_i \ w_i \ \phi_i]$,它们依次分别表示节点的轴向位移、横向挠曲位移和截面转角。单元 ij 的节点位移分量用两端的节点位移分量表达为:

$$[\Delta_i \ \Delta_j] = [v_i \ w_i \ \phi_i \ v_j \ w_j \ \phi_j] \quad (1-27)$$

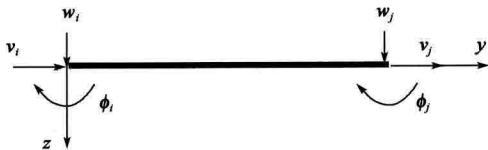


图 1-5 直梁单元

于是杆件单元内的轴向位移 v_e 和横向挠曲位移 w_e 可以用下式来描写:

$$\begin{bmatrix} v_e \\ w_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & N_4 & 0 & N_5 & N_6 \end{bmatrix} [\Delta_i \ \Delta_j]^T \quad (1-28)$$

其中的各个 N 为位移插值函数,亦称为形函数。令 $\eta = y/l$ 且以 i 点为原点,则可设为:

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= 1 - \eta \\ N_2 &= \eta \\ N_3 &= 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3 \\ N_4 &= (\eta - 2\eta^2 + \eta^3)l \\ N_5 &= 3\eta^2 - 2\eta^3 \\ N_6 &= (-\eta^2 + \eta^3)l \end{aligned} \right\} \quad (1-29)$$

它包含了刚体位移和常应变状况,因而是完备的。这意味着当单元逐渐缩小时,会逼近刚体位移或常应变状况。而前两个形函数通过节点的变形位移是连续的,后四个形函数通过节点的变形位移及其一阶导数皆是连续的。

对此单元 ij 取其弹性应变能 U_e ,考虑到 y 轴为横截面的形心轴有 $\int_A z dA = 0$,使轴向拉压与弯曲变形的弹性应变能不耦联,可写成:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_0^l [EA(v_e')^2 + EI(w_e'')^2] dy = \frac{1}{2} [\Delta_i \ \Delta_j] [\mathbf{K}_e] [\Delta_i \ \Delta_j]^T \quad (1-30)$$

式中的 $\mathbf{K}_e$ 为单元刚度矩阵,它可将式(1-28)代入后积分而得:

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (1-31)$$

它是一个对称的矩阵。

对于单元 ij 的节点力,相应于节点位移分量有:

$$\mathbf{R}_e = [\mathbf{R}_i \quad \mathbf{R}_j] \quad (1-32)$$

式中分别有 i 和 j 两节点的节点力分量为:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R}_i &= [Y_i \quad Z_i \quad T_i] \\ \mathbf{R}_j &= [Y_j \quad Z_j \quad T_j] \end{aligned} \right\} \quad (1-33)$$

式中分量依次分别表示节点的轴向力、横向力和力偶矩。

节点力有势能:

$$\left. \begin{aligned} V_i &= -\mathbf{\Delta}_i \mathbf{R}_i^T \\ V_j &= -\mathbf{\Delta}_j \mathbf{R}_j^T \end{aligned} \right\} \quad (1-34)$$

当沿单元轴线有均布的横向荷载 q 时, q 与 w_e 的正向一致,其势能为:

$$V_{qe} = - \int_0^l q w_e dy \quad (1-35)$$

将式(1-28)代入并积分可得:

$$V_{qe} = - [\mathbf{\Delta}_i \quad \mathbf{\Delta}_j] [\mathbf{R}_{qi} \quad \mathbf{R}_{qj}]^T \quad (1-36)$$

对均布荷载按此能量等效转换可有等效节点力:

$$[\mathbf{R}_{qi} \quad \mathbf{R}_{qj}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{ql}{2} & \frac{ql^2}{12} & 0 & \frac{ql}{2} & -\frac{ql^2}{12} \end{bmatrix} \quad (1-37)$$

若在单元轴线的 η_p 点有横向集中力 P 与 w_e 方向一致,则其等效节点力为:

$$[\mathbf{R}_{pi} \quad \mathbf{R}_{pj}] = P \cdot [0 \quad N_3(\eta_p) \quad N_4(\eta_p) \quad 0 \quad N_5(\eta_p) \quad N_6(\eta_p)] \quad (1-38)$$

现将全梁各单元的弹性应变能及其节点力(包含等效节点力)的势能叠加起

来,得到以全梁的节点位移分量表达的总势能:

$$\Pi = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{K} \Delta^T - \Delta \mathbf{R}^T \quad (1-39)$$

式中, $\Delta = [\Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \Delta_3 \quad \cdots \quad \Delta_i \quad \Delta_j \quad \cdots \quad \Delta_n \quad \Delta_{n+1}]$;

$$\mathbf{R} = [\mathbf{R}_1 \quad \mathbf{R}_2 \quad \mathbf{R}_3 \quad \cdots \quad \mathbf{R}_i \quad \mathbf{R}_j \quad \cdots \quad \mathbf{R}_n \quad \mathbf{R}_{n+1}]。$$

式中按全梁剖分成 n 个单元,有 $n+1$ 个节点,总刚度矩阵 $\mathbf{K}$ 是将各单元的刚度矩阵元素按相应的位移分量的排序对号入座,叠加而得。各节点力亦作相应的排序叠加。

取变分 $\delta \Pi = 0$, 由于在有限元法中变形位移是用各个形函数为模式,这样就仅由各节点位移分量来确定。因而全梁的弹性总势能仅是各节点位移分量的多元函数,求泛函的极值就是求多元函数的极值。于是有:

$$\delta \Pi = \delta \Delta (\mathbf{K} \Delta^T - \mathbf{R}^T) = 0 \quad (1-40)$$

考虑到 $\delta \Delta$ 的任意性,应有:

$$\mathbf{K} \Delta^T - \mathbf{R}^T = 0 \quad (1-41)$$

该式应给定几何边界条件,即应作支点约束条件的处理:在总刚度矩阵及节点力列阵中,对受约束的位移分量的行列划去或充零后将相应的主元素改成 1,或直接将相应的主元素加一充分大的数。式(1-41)为全梁节点平衡的位移方程,其总刚度矩阵是对称正定的。对方程求解,即得满足几何边界条件的可能位移中处于平衡状态的位移。它近似地满足变形位移的平衡微分方程和自然边界条件。如果将有限元取成无限微元,则就逼近解析解了。由于方程中的未知量是各节点的位移分量,因而此类有限元法为有限元位移法,它是一种最直观且简便实用的方法,在结构分析中应用最为广泛,本书中所指的有限元法,就是此类有限元位移法。

求得各节点的位移分量后,可用单元的刚度矩阵算出单元杆端的内力(轴力、剪力、弯矩),扣去等效节点力得:

$$[-N_{ie} \quad -Q_{ie} \quad M_{ie} \quad N_{je} \quad Q_{je} \quad -M_{je}]^T = \mathbf{K}_e [\Delta_i \quad \Delta_j]^T - \Sigma [\mathbf{R}_{qi} \quad \mathbf{R}_{qj}]^T \quad (1-42)$$

式中, $\Sigma [\mathbf{R}_{qi} \quad \mathbf{R}_{qj}]^T$ 为沿单元轴线各种荷载的等效节点力之和;内力前的负号考虑了内力正值的定义与节点力正值的定义不同。

第四节 简支梁有限元法算例

现在可以用一般杆件单元来分析多跨连续梁,对于变截面梁可以分成不同

截面的等直单元,它是一个有限元位移法的统一格式的应用问题,也是一个数值计算问题。本节通过最简单的简支梁算例来熟悉和掌握有限元位移法的概念,因而只作符号运算而不作数值运算。数值运算可在计算机上按所编的程序进行运算。

设一等直简支梁,计算跨径为 L ,抗弯刚度为 EI ,受均布荷载 q 作用。按有限元位移法将该简支梁等分成两个单元,如图 1-6 所示。

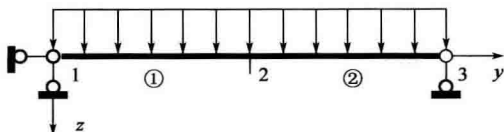


图 1-6 有限元法简支梁算例

单元①记节点 $i=1, j=2$, 有单元节点位移分量:

$$\Delta_{e1} = [v_1 \quad w_1 \quad \phi_1 \quad v_2 \quad w_2 \quad \phi_2] \quad (1-43)$$

单元②记节点 $i=2, j=3$, 有单元节点位移分量:

$$\Delta_{e2} = [v_2 \quad w_2 \quad \phi_2 \quad v_3 \quad w_3 \quad \phi_3] \quad (1-44)$$

简支梁可不考虑轴向位移分量 v , 且两简支端的 w 受约束, 这些皆可以作划行划列处理。于是整体结构的可能位移分量统一编号后为:

$$\Delta = [\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3 \quad \delta_4] = [\phi_1 \quad w_2 \quad \phi_2 \quad \phi_3] \quad (1-45)$$

将各单元刚度矩阵各元素按其位移分量对号叠加后划去零位移的行列而得总刚度矩阵和等效节点力:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 \\ -\frac{6EI}{l^2} & \frac{24EI}{l^3} & 0 & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{8EI}{l} & \frac{2EI}{l} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (1-46)$$

$$R = \begin{bmatrix} \frac{ql^2}{12} & ql & 0 & -\frac{ql^2}{12} \end{bmatrix} \quad (1-47)$$

其中单元长 $l = L/2$ 。该总刚度矩阵是对称正定的, 由相应的整体结构可能位移分量的平衡方程: $K\Delta^T = R^T$ 不难验证有解:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \frac{L^3}{24} & \frac{5L^4}{384} & 0 & -\frac{L^3}{24} \end{bmatrix} \cdot \frac{q}{EI} \quad (1-48)$$