

高斯

数学王者 科学巨人

沈永欢 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高斯

数学王者 科学巨人

沈永欢 著



内 容 简 介

本书是一部自传,主要介绍了德国著名数学家、物理学家、天文学家、大地测量学家高斯一生的历程,主要包括科学随记、博士论文、算术探索、天文著作、物理研究、教学工作、晚年生活、业余爱好、人际关系、工作风格等内容。

本书适合数学爱好者参考阅读。

图书在版编目(CIP)数据

高斯:数学王者 科学巨人/沈永欢著. —哈尔滨:
哈尔滨工业大学出版社,2015. 1

ISBN 978-7-5603-4942-8

I. ①高… II. ①沈… III. ①高斯, J. C. F. (1777 ~
1855)—传记 IV. ①K835. 166. 11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 213937 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 钱辰琛
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>
印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 7.5 字数 180 千字
版 次 2015 年 1 月第 1 版 2015 年 1 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-4942-8
定 价 28.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

目 录

1	德国情势	1
2	贫寒之家	4
3	心算神童	5
4	学院三载	7
5	大学攻读	10
6	出手不凡	14
7	科学随记	15
8	博士论文	19
9	算术探索	22
10	一算成名	26
11	恋爱结婚	30
12	公爵之死	31
13	丧妻再娶	34
14	天文著作	38
15	辉煌十年	40
16	大地测量	44
17	曲面理论	48
18	非欧几何	50
19	物理研究	54
20	教学工作	60
21	政治风波	62
22	晚年生活	65
23	业余爱好	67
24	人际关系	69
25	工作风格	79
26	溘然长逝	84
27	高斯全集	90
	注	92

如果上帝有一天突发奇想,把古往今来名垂青史的大数学家召集起来举行殿试,结果会怎样?最近一百多年的数学家比较一致的看法会是:阿基米德、牛顿和高斯应当位列一甲。这三位都在纯粹数学和应用数学两大领域掀起创造狂澜,他们在伟大数学家中处于最伟大的同一档次。我们这些平凡之人似乎不应当试图再去分出状元、榜眼和探花。

高斯1777年生于德意志不伦瑞克,生前就已头戴“数学之王”的桂冠。当时的德意志虽然经济落后、政治保守,但在文化上却处于德意志文化史上最辉煌的时期。高斯诞生时,文学巨人歌德已开始创作《浮士德》;而7年之前,乐圣贝多芬来到世间。有意思的是,这两位在各自领域中都位居前三名:通常把莎士比亚、但丁和歌德列为欧洲诗剧作家前三位;而除了瓦格纳的狂热崇拜者外,音乐家和音乐爱好者都同意贝多芬、莫扎特和巴赫是他们心中的音乐顶峰。

高斯生活在一个迅猛变化的时代,一个政治和社会发展的非常时期。革命与反动迭起,战争与和平交替。当他12岁时,法国大革命爆发;随着拿破仑称帝和入侵德意志,神圣罗马帝国在他29岁时寿终正寝。38岁时拿破仑倒台,神圣同盟建立,普鲁士崛起。刚过70岁,1848年革命席卷欧洲大陆主要国家。同时,高斯生活的时代也是第一次工业革命的时代,工农业生产、科学技术和人们的日常生活都发生了深刻的变化,其影响极其广泛持久。

1 德国情势

如果按“国家”的通常定义,即占有一定地域、拥有一个不依赖于外部势力的权威政府的有组织社会,那么在高斯诞生时,并没有“德国”这样一个“国家”;有的是“德意志”,在其地域里大大小小邦国林立。当然也有一个“帝国”,即“神圣罗马帝国”。16世纪宗教改革运动后,它陷入天主教邦国与新教邦国之间的内部斗争。在一系列冲突之后,爆发了三十年战争(1618~1648)。战争使德意志满目疮痍,使它成为一个几乎没有军队、没有岁入、没有政府机关的“三无”“帝国”。诚如伏尔泰所说,它“既不神圣,也不罗马,更非帝国”^[1]。歌德在《浮士德》第一部第五场(写于高斯诞生前3年)中就借大学生之口发出这样的感慨:

“亲爱的神圣罗马帝国,
怎样才能撑得住?”^[2]

在第二部第一幕第二场“皇帝的宫殿”中,他更辛辣地讥讽了这个帝国君不君、臣不臣、分崩离析、互相残杀的情景。^[3]

三十年战争后德意志拥有主权的邦国的数目,由于计算方法不同而差别很大,大致在 300 到 2 000 之间. 比较流行的统计是 314 个邦,1 475 个庄园^[4]. 总数倒不难记:到 1789 年法国大革命爆发时,德意志土地上恰有 1 789 个拥有程度不同主权的政权. 这 314 个邦能做某些独立的行动,其中包括自由市,修道院长,主教和大主教,伯爵,侯爵,公爵,以及仅有的一位国王即波希米亚国王. 级别最高的是 7 位“选帝侯”,即莱茵河的特殊伯爵,萨克森公爵,勃兰登堡侯爵,波希米亚国王和科隆、美因茨、特里尔的大主教. 巴伐利亚和汉诺威分别于 1648 年和 1692 年成为选帝侯.“帝国”以合法的形式维系邦国之间的联合.

高斯的出生地不伦瑞克,据传说其前身小镇是由撒克逊公爵布罗诺和丹克瓦尔德兄弟于 861 年建立的. 他们在奥克河边建造了一座城堡,取名为不伦瑞克. 亨利(雄狮)公爵 11 世纪后半叶定居于此,他使城镇大大扩张. 亨利的领地包括不伦瑞克和吕内堡的大部,后归其孙奥托公爵. 腓特烈二世于 1235 年赠以不伦瑞克 - 吕内堡公爵称号,以不伦瑞克为首府. 后经无数次分合,到 1671 年鲁道夫·奥古斯特公爵征服不伦瑞克,使它大获繁荣,成为仅次于莱比锡和法兰克福的贸易中心. 1690 年城里开设剧院,莱辛的《爱米丽亚·迦洛蒂》就是 1772 年在此首演的. 1735 年开始,卡尔一世公爵统治此地,文化和经济又有发展,建立了卡罗琳学院,即现在的不伦瑞克理工大学的前身. 1736 年它成为不伦瑞克 - 沃尔芬比特尔邦首府,1750 年时人口两万. 如同德意志其他小邦一样,不伦瑞克 - 沃尔芬比特尔邦的经济支柱是农业,它是政府财政收入的主要来源. 曾试图仿照法国和普鲁士发展工业,但不成功. 王室还颁布了几道法令,禁止使用机械织布机,以保护组织得很好的纺织行会. 坚固的古老社会秩序似乎毫无动摇,也似乎没有根本变革的迹象,但这只是像剧烈暴风雨到来之前的窒闷天气. 取得真正进步的领域不多,国民教育是其中之一. 尽管义务教育尚未严格推行,但大多数人都能读写并会做四则运算,有些地方甚至还教基本的拉丁文. 随着类似卡罗琳学院的一批学校的建成,教会失去了教育中的部分领地,在新教各邦中也失去了对大学的控制.

卡尔一世于 1780 年去世,由长子费迪南德公爵继位. 按当时标准,费迪南德算得上颇有文化素养,并有能力和远见. 他的老师是卡罗琳学院的奠基者,以启蒙运动和理性基督教精神教育费迪南德. 他于 1766 年游历英格兰、法兰西和意大利,研究文化和艺术. 费迪南德还与狄德罗和米拉波通信,任命莱辛为沃尔芬比特尔图书馆馆长. 七年战争中,他建立军功,成为腓特烈大帝最喜欢的侄子.

从经济上看,费迪南德公爵的开明专制主义对不伦瑞克好处不大,它未能缩小,甚至还扩大了正在上升的第三阶层——未来的资产阶级同大多数贫困的农工和学徒之间的差距. 像 18 世纪德意志其他邦国一样,不伦瑞克在 18 世纪中财富并未增加,生产力也没有多少发展. 中产阶级升起是以社会其他群体下降为代价实现的.

不过从文化上看,当时德意志正处于启蒙运动和古典人文主义这一德意志文化史上最光辉灿烂的时期. 一般认为这个时期起自莱辛诞生的 1729 年,终于歌德逝世的

1832年.这个时期德意志文化科学界英才辈出,群星璀璨,德意志音乐、德意志诗歌、德意志哲学、德意志科学声誉远播全球,永远成为人类文明不朽的纪念碑。

这是一个反抗文化领域中猥琐、褊狭和市侩作风的时期.歌德就曾自豪地说:“你们可以像为布吕歇尔(在1813年10月莱比锡战役中率领普鲁士军队打败拿破仑的将军——引用者)塑像一样为我树立一座纪念碑,他把你们从法国人手中解放出来,我把你们从市侩作风中解放出来。”^[5]

这个时期促成了从宗教和来世价值标准到世俗和现世观念的重大转变.它崇拜人,崇拜作为个体的个人和作为集体的人类,认为充分实现每个人的个性是社会的最高目标,推崇人性中自强不息的一面.歌德的《浮士德》第一部于1790年出版,整部作品完成于他去世前一年,好像是古典人文主义的终曲.第一部反映了狂飙突进时期的某些叛逆性格,第二部则展开了不断前进、无尽追求人生完美的信念,这正是现代文明最突出的特征之一。

总的来说,这一时期的作家和思想家都不大关心政治,但有着人类大同和世界公民的观念,以“世界公民”的称号为豪.席勒说:“我作为一个不替任何君王服务的世界公民写作.我早就丢掉祖国,用它来换取全世界。”^[6]拿破仑战争时期,德意志民族主义已占支配地位,但歌德仍拒绝让他写作仇恨法国的诗歌的要求.1830年埃克曼对他说:“人们都责怪您,说您当时没有拿起武器,至少是没有以诗人的身份去参加斗争。”歌德回答说:“我心里没有仇恨,怎么能拿起武器?……本来没有仇恨,怎么能写表达仇恨的诗歌呢?……我并不仇恨法国人,……对我来说,只有文明和野蛮之分才重要。”^[7]关于普遍和平和人类兄弟友爱的观念是古典人文主义的根本理想之一.席勒的《欢乐颂》表达了这种观念,而贝多芬在其第九交响曲中则把它谱成世代传唱的激动人心的乐曲。

在18世纪,科学从形而上学的桎梏和神学的浪漫主义中解放了出来,取得了空前崇高的地位.数学方面,代数学得到扩展和系统化,解析几何原理得到比较一般的表述,画法几何初露端倪,微积分学迅速发展并被用来解决几何、力学和物理学中的问题,建立了函数的一般理论,提出了方程和无穷级数理论.力学方面,一些基本原理得到了概括,数学分析系统地应用于力学问题,流体力学研究有所进展,气体分子运动论开始出现.天文学方面,在牛顿力学基础上构造了庞大的动力学体系,三体问题得到研究,望远镜有了改进,发明了消色差透镜和量日仪,康德和拉普拉斯提出了太阳系起源的理论.物理学方面,各个分支中都取得可观进步,尤其是电和磁的研究进步飞快.化学、气象学、地质学、地理学、大地测量学、生物学、医学等都有很大进展.技术方面也取得了巨大进步,农业上发明了打谷机和切草机,纺织工业中发明了纺织辊、水力纺纱机、各种新式织机和新的漂染方法,道路桥梁建造大有进步,火车、蒸汽机和轮船开始出现,酸和碱开始大规模生产,还出现了煤气照明灯。

当然也要指出,在古典人文主义中发展起来的唯心主义哲学所提出的精神世界与现实世界的分裂,对德意志的自由主义和民主主义运动产生了麻痹作用.另外,古典人文主义传统的体现者最关心美学和美的领域,这种唯美主义在精神上必定是贵族的,因而必定会加强反民主潮流。

2 贫寒之家

高斯这个姓在不伦瑞克北部很普遍,拼法不下七八种,有 Gauss, Gooss, Goos 等. 由于博赫搜寻了教堂纪事和账簿,到 20 世纪 20 年代末,已经有了关于高斯祖先的精确资料^[8]. 高斯的家谱与名门望族无缘. 他的曾祖父欣里希·高斯,住在弗尔肯罗德,结婚三次,生有 12 个子女. 高斯的祖父于根是欣里希的第三位夫人所生的第二个孩子.

新公民记录本显示,高斯祖父于 1739 年 1 月 23 日提交申请,定居不伦瑞克. 他在离开弗尔肯罗德前结婚. 在不伦瑞克市政厅的记录中,于根登记的身份是零工,以泥瓦匠和屠宰工应招.

1739 年,于根住进骑士街 10 号的房子. 与房东订的契约规定于根每年应付给房东 5 塔勒(德意志 15 至 19 世纪的银币,1 塔勒值 3 马克)100 芬尼,房东去世后此房即归他所有. 房子很狭小,附近居民称它为“姜饼片”. 夫妻俩在此生育了 3 个儿子,1 个女儿. 1751 年于根买下位于文登格拉本街 100 号(后改为威廉街 30 号)的房子,议定售价 900 塔勒. 他当时付了 400 塔勒,其余 500 塔勒作为向市长的抵押贷款. 于根 1774 年 7 月 5 日去世,死于肺癌.

高斯的父亲格布哈德·迪特里希是于根的长子,生于 1744 年. 格布哈德 1768 年结婚,结婚时太太带来了 150 塔勒的嫁妆. 1769 年,长子约翰·格奥尔格·海因里希出生. 1775 年,他同两兄弟达成分家协议,房子作价给他,他则相应付一笔钱给两兄弟. 他从市长那里抵押借贷了 125 塔勒,加上积蓄,付清了该给的钱.

格布哈德的第一任妻子歿于 1775 年,时年 30 岁,死于肺癆. 1776 年,他与邻近村庄的石匠女儿多萝特娅·本察结婚,她带来了 100 塔勒的嫁妆. 多萝特娅生于 1743 年,没有上过学校,不能写,也几乎不能读. 1777 年 4 月 30 日,未来的数学王者、科学巨人卡尔·弗里德里希·高斯出生于格布哈德的小屋之中.

格布哈德的头衔是水工师傅,但干过许多活计. 他当过园丁,照管过运河,做过砌砖工. 他最后的职业是园艺工,也协助一个商人打理他在不伦瑞克和莱比锡的事务. 他能写会算,所以也在一家公司管账. 格布哈德诚实正派,受人尊重. 他坚持不懈地劳作,使家境有所改善,不过生活从来没有达到舒适的水平. 他在家很粗暴,对孩子很严厉,下手很重. 高斯后来说其父“在许多方面值得尊敬,也确实受人尊重,但在家里却独断专横,粗野而无教养.”^[9]

高斯的母亲婚前当过 7 年女仆. 从高斯口中我们得知她与高斯父亲婚后生活不甚愉快,“主要因素是物质生活条件,同时也是由于两人性格不合”. 高斯说他母亲是一位“非常杰出的女性”^[10],小时候他对母亲比对父亲要亲密得多. 高斯是多萝特娅唯一的儿子,顽固的父亲曾力图让高斯走他的老路,亏得母亲总是站在高斯一边,想方设法呵护他,终于战胜了他的父亲. 我们真得对这位伟大的女性鞠躬致敬,没有她可能就不会有后来的高斯,数学发展的损失就会难以估量. 高斯 19 岁时,多萝特娅曾问高斯的好友 W·波尔约她儿子会不会有出息. 当她听到回答,说高斯会是“欧洲最伟大的数学家”时,不禁喜极

而泣. 从此儿子一直是她的骄傲. 她身体很好, 虽然最后4年失明, 但活到97岁高龄. 高斯很孝顺母亲, 当母亲失明后, 他不让别人照料她, 只由他一人侍候, 在她病时一直护理着她. 母亲同爱子在哥廷根住宅中一起生活了22年, 于1839年仙逝.



1886年时高斯出生地的照片
此建筑于1944年10月毁于空袭



现在威廉街30-34号悬挂的
作为高斯出生地的纪念铜牌

不伦瑞克属于新教地区, 尽管那时宗教在日常生活中仍起很大作用, 但高斯的双亲宗教倾向不甚强烈, 不像他们所属那个阶层的多数人那样狂热笃信基督教.

在高斯的长辈中, 值得一提的是高斯的舅父即多萝特娅的弟弟约翰·弗里德里希·本察. 他聪颖非凡, 机敏能干, 专心致志于编织, 竟然无师自通, 达到艺术织锦师的水平. 聪明的舅舅在外甥身上发现了类似的特点, 尽自己所能以好奇的观察来唤醒孩子敏捷的逻辑能力. 随着舅舅的不时指点, 两人感情不断加深. 本察于1809年英年早逝, 使高斯十分伤心, 哀叹“一位天生的天才就这样去了!”^[11]

3 心算神童

对于高斯的童年和少年时代, 我们只知道少量典型的有意思的事情. 这方面的主要来源是高斯本人, 他在晚年时喜欢回忆他童年的故事. 这些逸事很多已难于证实, 比较可靠的当是萨托里乌斯写的《回忆高斯》^[12] 和《高斯》^[13]. 萨托里乌斯是哥廷根大学地质学教授, 高斯的学生和挚友, 在高斯葬礼上第二位致悼词者, 所说所写应当是比较靠得住的.

高斯幼年时就显得智力超常, 问了家里人字母的发音后, 在上小学前已自己学会阅读. 他的心算能力更是异乎寻常. 他父亲夏天时干砌砖活, 手下有一些砖瓦工, 每到星期日得发工资. 一天他父亲算完准备发钱时, 突然听到3岁的小高斯尖声说: “爸, 您算错了, 应当是……” 这里高斯说了一个数. 核对下来, 孩子说得一点不错. 后来高斯常开玩

笑说自己在会说话之前就已会算数。

高斯还回忆过童年时有一次险些丧命。那时他家边上有一条小河连着奥克河，春天河水暴涨，水冲到他家小屋旁，一下把正在玩耍的小高斯冲进河里，淹得够呛。亏得正巧有一个工人在那里，把他救了起来。我们也得感谢这位无名氏，没有他见义勇为，高斯就会小命不保，数学就会蒙受不可弥补的损失。

高斯7岁时进圣·卡塔琳纳小学。学校由一位名叫比特纳的人掌管。教室潮湿低矮，地板高低不平，一边能看到教堂两座高高的哥特式尖塔，另一边则对着马厩和贫民窟。教室里坐着上百名学生，比特纳手执教鞭走来走去。一次他布置了一道算术题，让孩子们把1到100这100个数加起来。老师刚说完题，小高斯就把石板放到讲桌上，用不伦瑞克方言说“就是它！”老师嘲讽地瞟了他一眼，但当算得最慢的学生交上石板，他一块一块翻到最后高斯的石板时，惊讶地发现上面只写着正确答案“5 050”。问他答案怎么来的，回答说“1加100得101，2加99也得101，3加98还得101，一共有50对101，所以得5 050。”后交的孩子一步一步往前加，都算错了，挨了鞭子。高斯年老时对此事津津乐道，非常得意。这件事也使比特纳意识到这个9岁孩子天赋非凡，自掏腰包从汉堡定购了较好的算术教科书送给高斯。孩子很快学完了这本书，比特纳只得说：“他已超过我，我再也没有东西可教他了！”

幸运的是比特纳有一位助手巴特尔斯，对数学极感兴趣。他很快发现了高斯的天才，与高斯产生了热烈的友情。两人一起学习，互相帮助，扩充手头拥有的代数和分析入门书上的证明。这样，高斯在11岁时已独立掌握一般形式的二项式定理，开始了解无穷级数理论。比特纳和巴特尔斯还请高斯父亲去学校讨论如何进一步教育孩子的问题。父亲问怎样才能让小高斯获得继续学习的机会，回答是争取地位很高的人物资助。顽固的父亲终于让步，答应孩子再也不用每晚织出规定数量的亚麻。据说小高斯回家知道这件事后立即把纺车搁到后院，后来把它砍了当引火柴。

1788年，由于比特纳的帮助，高斯进了国民学校。该校教学老式，课程即使按当时标准也很陈旧，而且不太平衡，过分强调古代语文尤其是拉丁文。不过这倒使高斯打下了坚实的拉丁文基础，还学会了运用高地德语（即路德翻译《圣经》所用的德语）。高斯很用功。冬天晚上，为了节省，父亲总是让孩子早早上床睡觉。小高斯就在芜菁中间挖个洞，塞进粗布卷，倒上一点油作为灯，在阁楼上凭借着这暗淡的“灯”光苦读到半夜，直到又冷又困才睡。

巴特尔斯于1788年进卡罗琳学院。他向不伦瑞克的几位显贵人物特别是学院的数学、物理和自然史教授齐默尔曼介绍了高斯的才能。齐默尔曼地位很高，1786年被授予枢密顾问头衔，后来还是费迪南德公爵的私人顾问。齐默尔曼看出高斯在科学上前程远大，建议费迪南德公爵召见高斯。据说听差到高斯家时，开门的是高斯的哥哥约翰。他眼泪汪汪，不肯让听差进门。当得知要见的是他弟弟，那个“老把鼻子钉在破书上的小饭桶”，这才让进门。高斯后来举世闻名时，兄长还是终年辛劳、默默无闻的工人。这位仁兄后来说：“早知如此，我现在就会是教授了。本来是让我去的，但我不想去那城堡。”

4 学院三载

14岁的高斯初次晋见费迪南德公爵时有点腼腆,显得局促不安.公爵很快看出了高斯的才能.高斯回家几天后,国务大臣就送来一份对数表.1791年6月28日,公爵办公厅颁发命令,“支付齐默尔曼顾问官5塔勒,为一位名叫高斯的青年购置数学设备.”从管家的账本上看,每年还给高斯10塔勒,另外还支付齐默尔曼其他的相应开销.齐默尔曼对高斯的帮助和影响持续到拿破仑摧毁不伦瑞克-沃尔芬比特尔邦的1806年.从高斯与奥尔伯斯的通信中可以看出,高斯对齐默尔曼一直心怀尊敬和感激,两人的友谊持续到齐默尔曼去世(1815年).

由于得到公爵资助,高斯于1792年2月18日注册于卡罗琳学院.在第462名下,登记着不伦瑞克的Johann Carl Friedrich Gauss.此后他从未再用Johann之名,所有论著都用Carl Friedrich Gauss的大名.1792年6月12日,正式规定前面说到的“款项在其就读卡罗琳学院期间不间断地予以支付”.公爵还额外从自己手里拨给高斯不少钱.



卡罗琳学院

高斯入学时,学院声誉已臻顶峰.这类学院其实就是预科学校,介于现代的高级中学和综合性大学之间.未来的政府官员、建筑师、工程师、机械师、商人、农场主等可以在此得到培训,以适应将来职业和生活的需要.卡罗琳学院讲授的课程有古典和现代语言,哲学,通史、教会史和文学史,统计学,国家法和教会法,数学、物理学和自然史,解剖学,德文诗词和雄辩术,美学,绘画、音乐、舞蹈,击剑、骑马,玻璃抛光、车工实习等.学院不只着

眼于实用,而是重在培养学生成为新文化的载体.学院延聘了一批名师,学术界盛赞学院培养的青年以其知识广博、勤勉努力和道德完善而显著区别于他人,学院被认为是优秀青年的摇篮.

高斯入学时的科学和文学修养已远远超过同龄人.他熟练掌握了初等几何、代数和
分析知识,经常在学到之前已发现这些学科中的一些重要定理.他脑中蕴藏着大量算术
信息,具有很深的数论洞察力.他广泛进行计算,列出表格,观察计算结果.这使他非常熟
悉许多个别的数,并拓展自己的计算能力.

高斯在卡罗琳学院勤奋地学习古代和现代语言,同时也刻苦钻研高等数学,认真研
读牛顿、欧拉和拉格朗日的著作,尤其被牛顿的伟大精神所吸引.他对牛顿很敬仰,也很
熟悉牛顿的方法.这时他已确立了终生的探索模式:通过广泛的经验考察作出猜想,得到
新的省悟,再把它用来指引进一步的实验和考察.通过这种模式,他独立发现了关于行星
距离的波得定则和有理指数的二项式定理,发现了素数分布规律即现称的素数定理,产
生了非欧几何的想法,发现了数论中的二次互反律,独立发明了最小二乘法,研究了算
术-几何平均.

波得定则是太阳与行星之间距离的经验公式.提丢斯于1766年提出此公式,但到柏
林天文台台长波得于1772年公布后才为公众熟知.以 n 表示行星序号, a_n 表示第 n 行星
到太阳的距离(天文单位,地球与太阳之间的距离为1天文单位),则现代把该定则表述
为

$$a_n = 0.4 + 0.3 \times 2^{n-2}$$

对水星取 $n = -\infty$.这样,对水星($n = -\infty$),金星($n = 2$),地球($n = 3$),火星($n = 4$),
木星($n = 6$),土星($n = 7$),分别得 $a_n = 0.4, 0.7, 1.0, 1.6, 5.2, 10.0$,而它们到太阳实际
距离(天文单位)顺次为0.39,0.72,1.00,1.52,5.20,9.54,符合得很好.高斯独立发现
此定则表明他很早就对天文学有浓厚兴趣.后来在 $n = 5$ ($a_n = 2.8$)处发现小行星带,其
中发现的第一颗小行星谷神星同高斯有密切关系(按2006年8月24日国际天文学联合
会大会的决议,现在应称谷神星为矮行星),我们会在后面第10节中详细谈论这件事.
 $n = 8$ ($a_n = 19.6$)处发现天王星,但对海王星, $n = 9$, $a_n = 38.8$,而实际距离为30.06,此定
则失效.

二项式定理讨论的是 $(1+x)^\alpha$ 的展开式.当 α 为自然数时,中国宋代杨辉(约13世
纪中叶)已经得到,就是著名的“杨辉三角”.法国的帕斯卡于17世纪中叶对此也有深入
研究.但当 α 不是自然数时,展开二项式就得无穷级数

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots$$

对此,高斯以前的数学家就没有进行细致的分析,以致还产生过($x = -2, \alpha = -1$)

$$-1 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots$$

这样的“悖论”.高斯和巴特尔斯一起探讨这个问题时,对 α 不是自然数时的所谓“证明”
很不满意.对于数学证明,高斯后来在致奥尔伯斯的信中作过生动的解释:“对于证明这
个词,我指的不是律师所用的含意,他们把两个一半的证明合成一个整个的证明.我指的

是数学家所用的含意,对于他们 $1/2$ 的证明等于 0! 对于证明要求任何怀疑都成为不可能。”^[14] 高斯对 α 为有理数的情形给出了一个证明,其崭新之处在于确定(用现代语言)右边的无穷级数收敛的条件,这样他就成为数学分析严格化的最早开拓者,随同柯西和魏尔斯特拉斯等人的工作,使得其后的数学分析与牛顿、欧拉和拉格朗日时代的数学分析迥然不同。

在卡罗琳学院学习期间,高斯不断进行算术试验。有一次,他通过巧妙的展开和插值,用两种方法把一个平方根求到 50 位。他 14 岁时在公爵派人送来的对数表的最后一页上,用德文写着

Primezahlen unter $a (= \infty) a/\ln a$

这当然就是著名的素数定理:小于给定正整数 a 的素数个数当 a 趋于 ∞ 时渐近于 $a/\ln a$,勒让德此前已接近于发现这个规律。1792 至 1793 年间,高斯通过考察以 1 000 个相邻整数为一段中的素数个数,做出了更精确的发现:对于大的 a ,素数的“平均分布密度”是 $1/\ln a$ 。奇怪的是高斯把这条优美的定理留给自己珍藏,不予发表。直到五十六、七年之后,1849 年 12 月 24 日,他才在致恩克的信中提及此事^[15]。至于这一定理的严格证明,则要等到一个世纪之后:1896 年,阿达玛和瓦莱 - 布桑各自独立地证明了素数定理。

在学院的最后一年里,高斯硕果累累。他发现了“欧几里得几何不真的假定”下成立的某些结果。这是非欧几里得几何的肇始,我们在下面专有一节(第 18 节)讨论。

高斯通过归纳发现了后来被他称为“算术宝石”的二次互反律。欧拉已归纳地接近过这一命题;勒让德曾试图证明它,但忽略了一个难点。高斯同时引进了他在数论概念和记号方面的革命性发明——同余。他首次给出了二次互反律的严格证明,有关详情我们将在后面叙述。

高斯还发明了“最小二乘法”,这种方法能使不可避免的观测误差对计算结果的影响尽可能减少。1750 年前后,某些间接的天文观测导致一些观测方程,从而提出了如何由此得到“最可能的解”这一问题。英国的辛普森于 1757 年首次提出正、负误差应当是等可能的。拉普拉斯于 1774 年提出,从 n 个观测方程中确定 q 个未知量应基于这样的条件:偏差的代数和为零且偏差的绝对值之和为最小。由此他能将 n 个方程减为 q 个,从而解出 q 个未知量。这一方法被用于从子午线弧段的测量确定地球的形状。勒让德于 1805 年发表了这一方法并提出了“最小二乘法”这个名称。高斯于 1795 年导出了误差概率律,独立开发了最小二乘法。但他发表较晚,首次发表是在《天体沿圆锥曲线之绕日运动理论》的第二篇第三章中(在后面第 14 节中对此书有比较详尽的讨论)。

高斯在卡罗琳学院期间还研究了算术 - 几何平均,不过有关情况大都只能从他手写的一些注记中获得一鳞半爪,很可能最早的兴趣来自他对此进行的数值计算。算术 - 几何平均的定义如下:给定两个正数 m, n , 其算术平均为 $m' = (m + n)/2$, 几何平均为 $n' = \sqrt{mn}$ 。不断进行这两种平均,即令 $m'' = (m' + n')/2, n'' = \sqrt{m'n'}$, ..., 得到两个数列 $m', m'', \dots; n', n'', \dots$, 它们有相同的极限 $M(m, n)$, 高斯称它为 m, n 的“算术 - 几何平均”。这个名称出现于一个笔记中,施莱辛格认为写作时间很可能早于 1797 年,绝对不会晚于 1798 年。这个笔记中讨论了 $M(1, 1+x)$ 的级数展开,还计算了它的反函数,建立了两种

级数的联系. 后来的笔记还讨论了算术 - 几何平均与椭圆积分的联系.

高斯在卡罗琳学院时结识了一些年轻人并建立了深厚友谊, 其中有埃森伯格和伊德. 埃森伯格的父亲是该院教师, 曾翻译过莎士比亚的一些剧本, 受到当时德意志最著名诗人的赞赏. 他是高斯的终生挚友, 后来成为普鲁士政府的高官. 伊德后来成为数学家、天文学家, 在俄国一所大学执教, 可惜英年早逝. 还有一位梅耶霍夫, 几年后帮助高斯润色其《算术探索》的拉丁文.

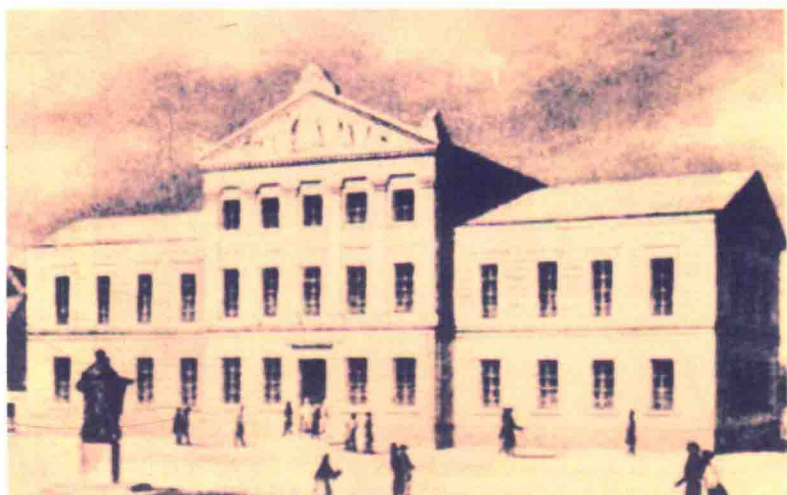
5 大学攻读

1795 年 8 月 21 日, 费迪南德公爵办公厅发布命令, “对即将赴哥廷根的名为高斯的大学生每年支付 158 塔勒作为奖学金, 并为他提供免费伙食.” 1795 年 10 月 11 日, 高斯离开不伦瑞克, 10 月 15 日在哥廷根大学注册入学. 哥廷根位于不伦瑞克以南约 105 公里, 属汉诺威邦, 对不伦瑞克而言它已是“外国”, 因此高斯去哥廷根有点违反费迪南德公爵的意愿, 后者想让他进当地的海尔姆斯台特大学. 但公爵仍慷慨资助高斯, 1801 年起每年的资助提高到 400 塔勒, 1803 年更提高到 600 塔勒, 此外还提供免费公寓. 高斯后来说, 他想去哥廷根的主要原因是那里有很好的图书馆.

德意志在同一时代建立了 3 所大学——哈雷大学、哥廷根大学和埃朗根大学. 哥廷根大学于 1737 年由英格兰国王和汉诺威选帝侯乔治二世创建并给予资助, 很快就在德意志大学中处于领先地位, 直至 19 世纪末. 它从建校伊始就强调学术独立和思想自由, 是一个活跃的文化科学中心. 该校当时占有显著地位的学科是语言、神学、法律和医学. 德意志各地尤其是西部和南部出身显贵的青年, 只要有志于文化和学术的, 都云集此地. 外国尤其是英国也很关注哥廷根, 也有来自北欧的学生. 校园里弥漫着自由研究和独立探索的气氛, 在这样的环境中高斯当然如鱼得水.

哥廷根大学拥有不少名教授, 高斯入学时最有名的是海涅, 一位纯粹的古典主义者, 认为古代语文和古典文学作品是训练心智真善美的手段. 听他课的不仅有学语文的, 还有全校各系的学生, 特别是学法律的学生.

年轻的高斯初到哥廷根时住在戈特马尔街 11 号. 一开始他拿不定主意将来学习语文还是学习数学. 成为语文学家生活前景更有保障, 前程更加辉煌, 所以有一段时间他听海涅的课. 事实上, 海涅的课也确实比数学教授卡斯特纳的课更有吸引力. 卡斯特纳 1756 年成为哥廷根大学数学教授, 著有《数学史》(4 卷), 这是出自著名学者的第一本数学史著作; 还有关于代数、几何和流体力学等的论著. 他写的论文和书籍并不出色, 作为数学家整体来看比较平庸. 可以想见以高斯的数学天才, 对他肯定不会满意. 高斯晚年时还提到过卡斯特纳. 1845 年 12 月 22 日他在致舒马赫的信^[16]中写道: “卡斯特纳具有天生的突出理解力, 不过十分奇怪, 他是在数学之外的所有问题上具有这种能力. 他甚至在一般地谈论数学时也具有这种能力, 但在数学之内, 这种能力却常常完全丧失.” 物理学教授利希滕贝格也对高斯有吸引力, 因为后者称他为“哥廷根最耀眼的光彩”.



高斯时代的哥廷根大学



现在的哥廷根旧市中心鸟瞰

1796 年 3 月出现了戏剧性转折。作为系统研究分圆方程的副产品，高斯得出可用直尺圆规作出的正多边形的条件，并得以宣布正 17 边形能用直尺圆规作出（见下节“出手不凡”）。这是两千年来尺规作图问题的首次重大突破，也使高斯决心投身数学和自然科学。高斯把自己的发现告诉了卡斯特纳，但后者毫不关注，甚至加以嘲讽。由于卡斯特纳炫耀过自己的诗集，所以高斯就称他为“诗人中最好的数学家，数学家中最好的诗人”^[17]。（这似乎从富斯的一句话演化而来，富斯说欧拉的《音乐新理论原理》“对音乐家而言几何学过多，而对几何学家而言则音乐过多”）不过公平地说，卡斯特纳也不是对高斯毫无影响，他是有经验的教师，不错的数学史家，对平行公设也有兴趣，似乎也有平行公设独立于欧几里得几何其他公理的想法，这对 W·波尔约和高斯可能起过作用。

高斯在哥廷根大学贪婪地阅读数学经典著作和期刊，以及其他学科的许多书刊。由于大学图书馆很好地保存了学生借书的记录，使我们能知道高斯在大学期间（除一个学期外）读些什么。下面是高斯读大学 3 年里借阅图书的分类统计（多卷本著作和科学期刊

一卷均作一本,1795 ~ 1796 下学期的借书登记单佚失)。

本数 学 期	门 类	科学 总论	数学	天文学	力学和 物理学	历史和 哲学	文学和 语言学	音乐	科学 期刊	其他	合计
1795 ~ 1796 上学期			1	2		1	15		16		35
1796 ~ 1797 上学期		3	6	9	1		4		23	1	47
1796 ~ 1797 下学期		3	6	1	3	1	5	1	13	2	35
1797 ~ 1798 上学期			3	1	1	1	1	3	41	1	52
1797 ~ 1798 下学期			1	2	1	3	4		13		24
合计		6	17	15	6	6	29	4	106	4	193

可以看出,高斯读书面很广,文理兼及,数量颇多,平均每月读 8 本.从所读书目看,他开始时确实还没有选定自己的未来。

高斯非常重视选读经典著作.数学方面,仅欧拉的作品就读了 6 本,包括其著作集、《微分学原理》、《积分学原理》、《音乐新理论原理》等;还读了牛顿和费马的著作集.力学方面,读了拉格朗日的《分析力学》以及克莱罗、拉朗德的著作.这为他当时和以后的研究打下了坚实基础.文学方面,他读了古罗马政治家、演说家、哲学家西塞罗和古希腊作家卢奇安的著作,还读了法国作家勒萨日的《吉尔·布拉斯》,英国作家理查逊的《克拉丽莎》,意大利诗人梅塔斯塔齐奥的《著作集》,席勒的《塔里娅》等.他甚至还读过关于钢琴的书。

高斯很关注科学的新近进展.在其所读的书中,期刊占了一半以上,可见他在当大学生时已十分关心科学各个部门的进展情况,为其研究开辟了广阔的视野。

高斯在 3 年大学生涯中取得了丰硕的研究成果,下面是一张按时间顺序开列的不完全清单。

1795 年 10 月,应用自己开发的最小二乘法。

1796 年 3 月 30 日,发现圆内接正 17 边形能尺规作图。

4 月 8 日,证明 -1 是所有形如 $4n + 1$ 的素数的二次剩余,是所有形如 $4n + 3$ 的素数的二次非剩余.作出二次互反律的第一个证明。

4 月 29 日,推广二次互反律。

7 月 10 日,发现每个正整数是 3 个三角形数之和。

6 月 22 日,开始研究二元二次型。

7 月 27 日,开始二次互反律的第二个证明。

1797 年 1 月 8 日,开始研究双纽线函数。

2 月 4 日,关于 2 作为二次剩余或二次非剩余的素数特征的定理的第二个证明。

3 月 21 日,作出关于双纽线的重大发现。

7 月 22 日,证明两个最高次项系数为 1 的有理系数多项式之积,其所有系数不可能全是整数。

10 月 1 日,发现证明代数基本定理所依据的原理。

1798 年 4 月,作出关于二次型的发现。



高斯 1796 ~ 1798 年在哥廷根的住所

高斯在哥廷根大学求学时交友很少。和他私交较好的有前面提到过的伊德，他也得到过费迪南德公爵的资助，比高斯晚半年入学，读了5年。他于1803年去莫斯科当数学教授，因不适应俄国气候而于1806年不幸去世。1797年，前面提到过的埃森伯格也从不伦瑞克来哥廷根求学，使高斯多了一个老熟人。

在高斯的朋友小圈子中还有布兰德斯，他后来是布雷斯劳大学和莱比锡大学数学教授；艾赫霍恩，攻读法律，后任普鲁士宗教大臣；本岑贝格，高斯后来帮助过他写作关于重力、空气阻力和地球转动的论著。

高斯那时最亲密的朋友是W·波尔约，匈牙利一个古老贵族的后裔。波尔约年幼时安静内向，极少与小学同伴一起玩耍，但特别喜爱语言、诗歌和算术，被视为神童。1796年9月他陪同一位男爵来哥廷根，很快与高斯结下深厚友谊。他后来写道：

“我们来到哥廷根，……逐渐与那里的大学生高斯熟悉起来。时至今日，尽管已远不能同他相比，我仍是他的朋友。他极度谦逊，从不显山露水。不像同柏拉图相处三天就能看出他的伟大，同高斯相处甚至几年仍不能认识到他的伟大。我未能弄清怎样才能打开这本静谧的‘无题之书’并读懂它，这是怎样的耻辱！……热爱数学（没有外在表露）和道德一致把我们紧密联结在一起。我们经常外出散步，常常一两个小时不说话，但两人心里都知道对方在想什么。”^[18]

高斯也说过W·波尔约是唯一能理解他关于数学基础的观点的人。两人初次邂逅时，波尔约向高斯提到他关于直线的定义以及证明欧几里得第五公设的几种途径，高斯听后大喜，迸出这么一句话：“你是天才！你是我的朋友！”高斯还送给波尔约他作出正17边形可以尺规作图发现的拍纸簿作为纪念。1797年两人一起步行到不伦瑞克。波尔约拜访了高斯父母，前面第2节中说到高斯之母听到波尔约盛赞高斯后流下热泪，就是这时发生的事。

1798年9月28日高斯回不伦瑞克，波尔约留在哥廷根直到次年6月。波尔约曾动情地谈到他们分别的情形：

“离别时我哭得像个孩子。我禁不住往回走，但最终还是控制住自己。从最后一座能