



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

# 信息光学

余向阳 编著



中山大學出版社  
SUN YAT-SEN UNIVERSITY PRESS



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

# 信息光学

余向阳 编著



中山大学出版社  
SUN YAT-SEN UNIVERSITY PRESS

· 广州 ·

版权所有 翻印必究

图书在版编目 (CIP) 数据

信息光学/余向阳编著. —广州: 中山大学出版社, 2015. 9  
ISBN 978 - 7 - 306 - 03822 - 7

I. ①信… II. ①余… III. ①信息光学 IV. ①O438

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 250184 号

---

出版人: 徐 劲

策划编辑: 李海东

责任编辑: 李海东

封面设计: 曾 斌

责任校对: 何 凡

责任技编: 黄少伟

出版发行: 中山大学出版社

电 话: 编辑部 020 - 84111996, 84113349, 84111997, 84110779

发行部 020 - 84111998, 84111981, 84111160

地 址: 广州市新港西路 135 号

邮 编: 510275 传 真: 020 - 84036565

网 址: <http://www.zsup.com.cn> E-mail: [zdcbs@mail.sysu.edu.cn](mailto:zdcbs@mail.sysu.edu.cn)

印 刷 者: 广州中大印刷有限公司

规 格: 787mm × 960mm 1/16 34 印张 850 千字

版次印次: 2015 年 9 月第 1 版 2015 年 9 月第 1 次印刷

定 价: 88.00 元

---

如发现本书因印装质量影响阅读, 请与出版社发行部联系调换

## 前 言

信息光学，早期也称为傅里叶光学，是现代光学和信息处理的重要组成部分，其核心内容是基于波动方程的光波的传播和重构。信息光学是以傅里叶变换和线性系统分析为工具，以光的传播为处理对象，以提取光学信息为目标，综合数学、光学和信息论的一门学科，在光学、光学工程、光电工程、信息处理、图像处理等领域得到广泛的应用。近年来，信息光学发展很快，理论体系已日趋成熟、完整，成为光学和信息科学的重要分支，在许多领域有着重要的实际应用。

本书是作者在中山大学物理科学与工程技术学院多年对高年级本科生讲授“信息光学”课程和对研究生讲授“光信息处理原理与技术”所编写的讲义的基础上经修订完善而成的。全书共分9章：第1章的内容主要为信息光学的数学基础，包括光学中常用非初等函数和初等函数、函数的变换、 $\delta$ 函数、周期函数和复数函数；第2章的内容主要为空域的傅里叶变换，包括一维和二维函数的傅里叶变换、傅里叶变换的性质和 MATLAB 实现、卷积和卷积定理、相关和相关定理、傅里叶变换的基本定理；第3章的内容主要为线性系统和光场傅里叶分析，包括线性系统的概念和分析分法、光场的解析信号表示及复振幅空间描述、二维光场的傅里叶分析、函数的抽样和复原；第4章的内容主要为标量衍射理论，包括标量电场、基尔霍夫衍射理论、衍射在空间频域的描述、衍射的非涅耳和夫琅禾费近似、非涅耳和夫琅禾费衍射的计算；第5章的内容主要为光学系统的成像分析，包括成像系统概述、透镜的相位变换及傅里叶变换性质、透镜的空间滤波特性、光学系统的一般模型、衍射受限光学系统成像的空域分析；第6章的内容主要为光学成像系统的传递函数，包括光学系统成像的像质评价、光学传递函数的概念、衍射受限的相干及非相干成像系统的传递函数、线扩散函数和刃边扩散函数、相干与非相干成像系统的比较；第7章的内容主要为部分相干光的干涉和衍射，包括互相干函数和相干度、光的时间相干性和空间相干性、在准单色条件下的干涉和互强度、互相干的传播和广义惠更斯原理、范西泰特—策尼克定理；第8章的内容主要为光学全息，包括光学全息概述、全息照相的基本原理、基本全息图及几种典型的全息图、全息记录介质、计算全息；第9章的内容主要为光学信息处理技术，包括相干光学信息处理及应用、非相干光学信息处理、部分相干光学信息处理、非线性光信息处理。

本教材为光信息科学与技术、光电信息科学与工程、电子科学与技术、光电工程、物理学、应用物理学、电子学等专业的高年级本科生及相关专业的研究生而编写。对这些专业的学生来说，通常已有了“基础光学”等相关课程基础，进入高年级或研究生后，需要更专门地学习光信息处理原理和技术的内容。通过本课程的学习，使学生系统学习信息光学基础知识，结合光学信息处理技术，培养学生理论用于实践的方法和创新思路，提高学生解决实际问题的能力，为从事光学信息处理工作和近代光学信息处理技术的学习打下基础。

本教材各章节的编排前后连贯，逻辑性强，章节内容的安排既注重知识之间的有机联系，又考虑各自的独立性，书中图表丰富，推演过程详细，便于理解和掌握，便于读者自

学,也便于老师根据不同授课对象、对课程的不同要求以及学时数的多少选取适当的讲授内容。为了加强对学生能力的锻炼,每章都附有相当数量的习题,这些习题的涉及面也比较广,老师在教学过程可以进行适当的选择。完成一定量的习题,有利于学生加深对概念的理解,提高分析、解决问题的能力。

作者在教学和本书编写过程中,一直得到中山大学物理科学与工程技术学院和教务处的的大力支持,中山大学出版李海东编辑为本书的正式出版付出大量的精力。在此,向他们表示诚挚的感谢。

由于作者水平有限,对一些问题的理解不透彻,因此书中难免有错误和缺点,以及存在疏漏和不妥之处,恳请读者不吝批评指正。

在本书的编写过程中,作者参阅了不少国内外文献资料,主要的参考文献在书后列出,但书中有些具体的引用没有一一标出。在此,对这些文献的作者致以真挚的谢意。

需要本书配套的授课电子课件和习题解答的老师,可通过电子邮件 [cesyxy@mail.sysu.edu.cn](mailto:cesyxy@mail.sysu.edu.cn) 与作者联系。

作者

2015年8月于中山大学康乐园

# 目 录

第 1 章 信息光学的数学基础 .....	1
1.1 光学中常用的非初等函数 .....	1
1.1.1 矩形函数 .....	1
1.1.2 阶跃函数 .....	4
1.1.3 符号函数 .....	7
1.1.4 三角形函数 .....	10
1.1.5 斜坡函数 .....	12
1.1.6 圆域函数 .....	13
1.1.7 非初等函数的运算和复合 .....	14
1.2 光学中常用的初等函数 .....	15
1.2.1 sinc 函数 .....	16
1.2.2 高斯函数 .....	18
1.2.3 贝塞尔函数 .....	22
1.2.4 宽边帽函数 .....	26
1.3 函数的变换 .....	26
1.3.1 一维函数的变换 .....	26
1.3.2 可分离变量的二维函数 .....	28
1.3.3 几何变换 .....	30
1.4 $\delta$ 函数 .....	34
1.4.1 广义函数 .....	34
1.4.2 $\delta$ 函数的定义 .....	35
1.4.3 $\delta$ 函数的性质 .....	43
1.4.4 $\delta$ 函数的导数 .....	46
1.4.5 复合 $\delta$ 函数 .....	49
1.4.6 用 $\delta$ 函数描述光学过程的一个例子 .....	49
1.5 周期函数 .....	51
1.5.1 周期函数的含义 .....	51
1.5.2 余弦函数和正弦函数 .....	53
1.5.3 梳状函数 .....	54
1.5.4 周期性函数的 MATLAB 实现 .....	58
1.6 复数和复值函数 .....	59
1.6.1 复数 .....	59
1.6.2 复值函数 .....	60

1.6.3	几个常用的关系式和恒等式	63
习题 1		64
<b>第 2 章</b>	<b>空域的傅里叶变换</b>	<b>67</b>
2.1	一维函数的傅里叶变换	67
2.1.1	傅里叶级数	67
2.1.2	傅里叶积分定理	75
2.1.3	傅里叶变换	77
2.1.4	极限情况下的傅里叶变换	82
2.1.5	$\delta$ 函数的傅里叶变换	84
2.1.6	常用一维函数傅里叶变换对	91
2.2	二维函数的傅里叶变换	92
2.2.1	二维函数傅里叶变换的定义	93
2.2.2	极坐标系中的二维傅里叶变换	94
2.2.3	常用二维函数的傅里叶变换对	96
2.3	傅里叶变换的性质	96
2.3.1	傅里叶变换的基本性质	96
2.3.2	虚、实、奇和偶函数的傅里叶变换	99
2.4	傅里叶变换的 MATLAB 实现	100
2.4.1	符号傅里叶变换	100
2.4.2	傅里叶变换的数值计算	101
2.5	卷积和卷积定理	107
2.5.1	卷积的定义	107
2.5.2	卷积的计算	108
2.5.3	普通函数与 $\delta$ 函数的卷积	116
2.5.4	卷积的效应	118
2.5.5	卷积运算的基本性质	120
2.5.6	卷积的 MATLAB 实现	122
2.6	相关和相关定理	123
2.6.1	互相关	124
2.6.2	自相关	126
2.6.3	归一化互相关函数和自相关函数	128
2.6.4	有限功率函数的相关	128
2.6.5	相关的计算方法	128
2.6.6	相关的 MATLAB 实现	132
2.7	傅里叶变换的基本定理	134
2.7.1	卷积定理	134
2.7.2	列阵定理	135
2.7.3	互相关定理	136

2.7.4	自相关定理 .....	137
2.7.5	巴塞伐定理 .....	137
2.7.6	广义巴塞伐定理 .....	137
2.7.7	导数定理或微分变换定理 .....	138
2.7.8	积分变换定理 .....	138
2.7.9	转动定理 .....	139
2.7.10	矩定理 .....	139
	习题2 .....	140
<b>第3章 线性系统和光场的傅里叶分析 .....</b>		<b>143</b>
3.1	线性系统的概念 .....	143
3.1.1	信号和信息 .....	143
3.1.2	系统的概念 .....	143
3.1.3	线性系统 .....	145
3.1.4	线性空不变系统 .....	147
3.2	线性系统的分析方法 .....	147
3.2.1	正交函数系 .....	148
3.2.2	基元函数的响应 .....	150
3.2.3	线性空不变系统的传递函数 .....	155
3.2.4	基元函数的传递函数 .....	156
3.3	光场解析信号表示 .....	159
3.3.1	单色光场的数学形式和复数表示 .....	159
3.3.2	准单色光场的复数表示 .....	161
3.3.3	多色光场的复数表示 .....	163
3.4	光场的复振幅空间描述 .....	165
3.4.1	球面波的复振幅 .....	166
3.4.2	球面波的近轴近似 .....	167
3.4.3	平面波的复振幅 .....	170
3.5	光场的空间傅里叶分析 .....	174
3.5.1	平面波的空间频率 .....	174
3.5.2	球面波的空间频率 .....	178
3.5.3	复振幅分布的空间频谱和角谱 .....	179
3.5.4	局域空间频率 .....	180
3.5.5	复杂光波的分解 .....	181
3.6	函数抽样与函数复原 .....	183
3.6.1	函数的离散 .....	183
3.6.2	一维抽样定理 .....	184
3.6.3	二维抽样定理 .....	191
3.6.4	空间—带宽积 .....	193



3.6.5 线性光学系统的分辨率 .....	196
习题3 .....	196
<b>第4章 标量衍射理论</b> .....	<b>200</b>
4.1 从矢量电场到标量电场 .....	203
4.1.1 波动方程 .....	203
4.1.2 亥姆霍兹方程 .....	204
4.2 基尔霍夫衍射理论 .....	205
4.2.1 惠更斯—菲涅耳原理 .....	205
4.2.2 格林定理 .....	207
4.2.3 基尔霍夫积分定理 .....	208
4.2.4 基尔霍夫衍射公式 .....	210
4.2.5 菲涅耳—基尔霍夫衍射公式 .....	213
4.2.6 球面波的衍射理论 .....	214
4.3 衍射在空间频域的描述 .....	217
4.3.1 从空间域到空间频域 .....	217
4.3.2 谱频的传播效应 .....	217
4.3.3 角谱的传播 .....	220
4.3.4 孔径对角谱的效应 .....	221
4.3.5 传播现象作为一种线性空间滤波器 .....	223
4.4 衍射的菲涅耳近似和夫琅禾费近似 .....	224
4.4.1 菲涅耳近似 .....	224
4.4.2 夫琅禾费近似 .....	226
4.4.3 衍射区域的划分 .....	227
4.4.4 衍射屏被会聚球面波照射时的菲涅耳衍射 .....	228
4.4.5 衍射的巴俾涅原理 .....	229
4.5 菲涅耳衍射的计算 .....	231
4.5.1 周期性物体的菲涅耳衍射 .....	232
4.5.2 矩形孔的菲涅耳衍射 .....	236
4.5.3 特殊矩形孔的菲涅耳衍射 .....	244
4.5.4 圆孔的菲涅耳衍射 .....	247
4.6 夫琅禾费衍射的计算 .....	249
4.6.1 矩形孔和狭缝 .....	249
4.6.2 衍射光栅 .....	255
4.6.3 圆形孔径 .....	265
习题4 .....	270
<b>第5章 光学系统的成像分析</b> .....	<b>275</b>
5.1 成像系统概述 .....	275

5.2 透镜的结构及变换作用 .....	277
5.2.1 透镜的结构 .....	278
5.2.2 透镜的成像 .....	279
5.2.3 透镜的相位变换作用 .....	280
5.2.4 薄透镜的厚度函数 .....	281
5.2.5 薄透镜的相位变换及其物理意义 .....	283
5.3 透镜的傅里叶变换性质 .....	284
5.3.1 透镜的一般变换特性 .....	285
5.3.2 物在透镜之前 .....	287
5.3.3 物在透镜后方 .....	291
5.4 透镜的空间滤波特性 .....	292
5.4.1 透镜的截止频率、空间一带宽和视场 .....	293
5.4.2 透镜孔径引起的渐晕效应 .....	295
5.5 光学系统的一般模型 .....	297
5.5.1 孔径光阑和视场光阑 .....	297
5.5.2 入射光瞳和出射光瞳 .....	299
5.5.3 入射窗和出射窗 .....	300
5.5.4 黑箱模型 .....	301
5.6 衍射受限系统成像的空域分析 .....	302
5.6.1 衍射受限系统的点扩散函数 .....	302
5.6.2 正薄透镜的点扩散函数 .....	304
5.6.3 单色光照明衍射受限系统的成像规律 .....	306
5.6.4 准单色光照明衍射受限系统的成像规律 .....	307
习题5 .....	310
<b>第6章 光学成像系统的传递函数 .....</b>	<b>316</b>
6.1 光学成像系统像质评价概述 .....	316
6.1.1 星点检验法 .....	317
6.1.2 图像分辨率板法 .....	319
6.2 光学传递函数概述 .....	325
6.3 衍射受限相干成像系统的传递函数 .....	327
6.3.1 相干传递函数 .....	327
6.3.2 相干传递函数的计算 .....	329
6.3.3 相干传递函数的角谱解释 .....	334
6.4 衍射受限系统非相干成像的传递函数 .....	335
6.4.1 非相干成像系统的光学传递函数 .....	335
6.4.2 OTF 和 CTF 的关系 .....	339
6.4.3 衍射受限的 OTF 的计算 .....	339
6.4.4 有像差系统的传递函数 .....	343

6.5 线扩散函数和刃边扩散函数 .....	345
6.5.1 线扩散函数和刃边扩散函数的概念 .....	345
6.5.2 相干及非相干线扩散函数和相干及非相干刃边扩散函数 .....	347
6.6 相干与非相干成像系统的比较 .....	349
习题6 .....	350
<b>第7章 部分相干光的干涉和衍射 .....</b>	<b>354</b>
7.1 概述 .....	354
7.2 互相干函数和相干度 .....	355
7.2.1 概述 .....	355
7.2.2 两束部分相干光的干涉 .....	356
7.2.3 互相干函数的谱 .....	358
7.3 空间相干性 .....	359
7.3.1 杨氏干涉 .....	360
7.3.2 两球面波的干涉 .....	360
7.3.3 光源宽度对双孔干涉的影响 .....	362
7.3.4 光场的空间相干性 .....	365
7.4 时间相干性 .....	367
7.4.1 光源的发光特性 .....	367
7.4.2 迈克耳逊干涉仪 .....	368
7.4.3 时间相干性的描述 .....	370
7.4.4 相干时间和相干长度 .....	373
7.5 准单色条件下的干涉和互强度 .....	375
7.5.1 准单色光的干涉 .....	375
7.5.2 傅里叶变换光谱技术 .....	377
7.5.3 准单色光的互强度 .....	379
7.6 互相干函数的传播和广义惠更斯原理 .....	382
7.6.1 互相干函数的传播定律 .....	382
7.6.2 互相干函数的波动方程 .....	385
7.6.3 互谱函数的传播 .....	386
7.7 范西泰特—策尼克定理及其应用 .....	386
7.7.1 范西泰特—策尼克定理 .....	387
7.7.2 相干面积 .....	390
7.7.3 范西泰特—策尼克定理的应用例子 .....	393
习题7 .....	397
<b>第8章 光学全息 .....</b>	<b>402</b>
8.1 全息术概述 .....	402
8.1.1 全息术的发展简史 .....	402

8.1.2	全息照相的基本特点 .....	404
8.1.3	全息图的类型 .....	405
8.1.4	光学全息的应用 .....	406
8.1.5	基本术语 .....	406
8.2	全息照相的基本原理 .....	409
8.2.1	全息照相的基本过程 .....	409
8.2.2	波前记录 .....	410
8.2.3	记录过程的线性条件 .....	411
8.2.4	波前再现 .....	412
8.2.5	同轴全息图 .....	414
8.2.6	离轴全息图 .....	416
8.3	基本全息图 .....	419
8.3.1	基元全息图 .....	419
8.3.2	平面波全息图 .....	421
8.3.3	点源全息图 .....	427
8.3.4	菲涅耳全息图和夫琅禾费全息图 .....	435
8.3.5	傅里叶变换全息图 .....	435
8.4	其他几种类型的全息图 .....	440
8.4.1	像全息图 .....	440
8.4.2	彩虹全息 .....	444
8.4.3	体积全息 .....	448
8.4.4	模压全息图 .....	455
8.5	全息记录介质 .....	457
8.5.1	记录介质的特性曲线 .....	457
8.5.2	常见的全息记录介质 .....	458
8.6	计算全息 .....	465
8.6.1	计算全息图的制作 .....	465
8.6.2	计算全息图的绘制与再现 .....	467
8.6.3	迂回相位全息图 .....	467
8.6.4	计算全息干涉图 .....	470
8.6.4	相息图 .....	472
习题8	.....	473
第9章	光学信息处理技术 .....	476
9.1	引言 .....	476
9.2	相干光信息处理 .....	477
9.2.1	阿贝成像理论和阿贝—波特实验 .....	477
9.2.2	空间频率滤波的傅里叶分析 .....	479
9.2.3	空间滤波器的种类及应用 .....	486

9.2.4	基于相干照明的空间滤波系统 .....	491
9.2.5	多重像的产生 .....	493
9.3	相干光信息处理的应用 .....	494
9.3.1	相关光学系统 .....	494
9.3.2	图像的相加和相减 .....	495
9.3.3	图像边缘增强 .....	497
9.3.4	光学图像识别 .....	500
9.3.5	图像消模糊 .....	501
9.3.6	综合孔径成像 .....	502
9.4	非相干光信息处理 .....	503
9.4.1	相干光与非相干光处理的比较 .....	503
9.4.2	基于衍射的非相干光处理 .....	504
9.4.3	基于几何光学的非相干光处理 .....	509
9.5	部分相干光信息处理 .....	511
9.5.1	白光处理系统的工作原理 .....	512
9.5.2	相关检测和图像相减 .....	514
9.5.3	黑白图像的假彩色编码 .....	515
9.6	非线性光信息处理 .....	520
9.6.1	$\theta$ 调制 .....	520
9.6.2	半色调网屏技术 .....	522
	习题9 .....	525
	参考文献 .....	530

## 第 1 章 信息光学的数学基础

信息光学是在光的波动性的物理基础上,用数学的方法来描述与处理光信息问题,这便会涉及许多数学方面的知识。本章介绍信息光学中常用的一些数学基础知识,以方便学习和深入理解后续的课程内容。

### 1.1 光学中常用的非初等函数

在现代光学尤其是信息光学中,经常会用到一些非初等函数和特殊函数,用来描述各种物理量,如光场的分布、透射率函数等。掌握和熟悉它们的定义、数学表达式、功能和图形,有助于分析和理解许多光学现象。我们知道,在高等数学中,初等函数是指在自变量的定义域内,能用单一分析式子表示的函数,而这一分析式子是由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算(加、减、乘、除)以及有限次的函数复合步骤所形成的。基本初等函数有幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数。非初等函数是指在自变量的定义域中不能用单一分析式子表示的函数。这一节介绍在信息光学中常用的非初等函数的定义、性质以及习惯使用的符号。给出了一些函数在 MATLAB 中的表示和画出这些函数图形的程序,运行这些程序并观察函数的图形有助于对这些函数有更为直观的感觉,同时可以掌握在计算机中如何使用和表达这些函数。这些函数在信息处理中有着广泛的应用。

由于光信息处理中常用到二维非初等函数,掌握其定义与图形是极为重要的。所以这一节除了给出常用一维非初等函数的定义外,还给出了其相应二维非初等函数的定义。要特别注意的是,二维函数除了可以在直角坐标系中描述外,还可以在极坐标系中描述,对具有圆对称性的函数而言,这样做通常有利于运算的简化。

信息光学中常用到的一些非初等函数,它们的数学表达式虽然都比较简单,但所涉及的问题常常已超出了经典函数的范畴。在这些函数中,有的函数存在间断点,有的函数值有突变,有的函数则是广义函数(见 1.4)的傅里叶变换等。所以,运用这些函数时,要特别小心谨慎。

#### 1.1.1 矩形函数

矩形函数(rectangle function)是在光信息处理中很有用的非初等函数之一,习惯上用  $\text{rect}$  或  $\Pi$  表示。信号脉冲如光脉冲、电脉冲等的形状为矩形时,就可用矩形函数来描述,所以矩形函数也常称为矩形脉冲。对一个具有确定形状的脉冲,通常可以用脉冲的宽度、高度和脉冲面积(即一维函数曲线下所包含的面积,也即函数在整个定义域上的积分值)这三个参数来描述,这三个参数中两个确定了,另一个也就确定了。把描述脉冲形状的某些参数取单位值 1 时,会使问题变得简洁、方便又不会失去其特性,这就是所谓的单位脉冲(或单位函

数),有时也称为标准脉冲(或标准函数)。单位脉冲通常先设定脉冲面积为1,如果脉冲面积无法定义,就设定高度为1,当然也可将宽度设定为1。

一维单位矩形函数的定义为:

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1/2 \\ 1/2 & |x| = 1/2 \\ 0 & |x| > 1/2 \end{cases} \quad (1.1.1)$$

式(1.1.1)所表示的函数,中心在 $x=0$ 点,在区间 $(-1/2, 1/2)$ 内函数值为1,否则为0。 $x = -1/2, 1/2$ 处为不连续点(间断点)。在处理实际问题时,不连续点需要作特别的处理,其函数值不计入所处理的问题中,而且不连续点处函数值的取值具体是多少,通常也不影响对问题的处理,所以原则上不连续点处函数值的取值可以是任意的,具体的取值通常根据具体问题的需要。如式(1.1.1)的形式是不连续点的函数值取其左右数值的平均值,即为 $1/2$ ,这是信号处理中常用的取法,对有类似间断点特性的函数,如阶跃函数(见1.1.2)、符号函数(见1.2.3)也是适用的。这样可使这些函数有统一的表示,并可建立这些函数之间的代数关系。

由于在不连续点处函数值的定义不同,在文献中,单位矩形函数有三个差别微小的表达式,但也都是常用的形式。另两种表达式的定义是:

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1/2 \\ 0 & |x| > 1/2 \end{cases} \quad (\text{不连续点处的函数值为1}), \quad (1.1.2)$$

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1/2 \\ 0 & |x| > 1/2 \end{cases} \quad (\text{不连续点处的函数值没有定义}). \quad (1.1.3)$$

式(1.1.1)~(1.1.3)就是一个高度、宽度和面积都为 $1(S = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(x) dx = 1)$ 的单位矩形脉冲,其图形如图1.1.1(a)所示。

单位矩形函数通过平移和缩放,可得到一般形式矩形函数的表达式:

$$h\text{rect}\left(\frac{x-x_0}{a}\right) = \begin{cases} h & |x-x_0|/a < 1/2 \\ h/2 & |x-x_0|/a = 1/2 \\ 0 & |x-x_0|/a > 1/2 \end{cases} \quad (1.1.4)$$

式中: $a(a > 0)$ ,  $h$ 和 $x_0$ 分别为矩形的宽度、高度和中心点,其图形如图1.1.2(b)所示。

显然,矩形的面积为 $S = \int_{-\infty}^{\infty} h\text{rect}\left(\frac{x-x_0}{a}\right) dx = |ha|$ 。

在MATLAB中,一维矩形函数可用函数`rectpuls`来实现。

格式1:  $y = \text{rectpuls}(x)$

功能:产生单位高度为1、宽度为1、中心为0的矩形。注意:在MATLAB中,该函数间断点的值规定为`rectpuls(-0.5) = 1`和`rectpuls(0.5) = 0`。

格式2:  $y = \text{rectpuls}(x, a)$

功能:产生指定宽度为 $a$ 的矩形。

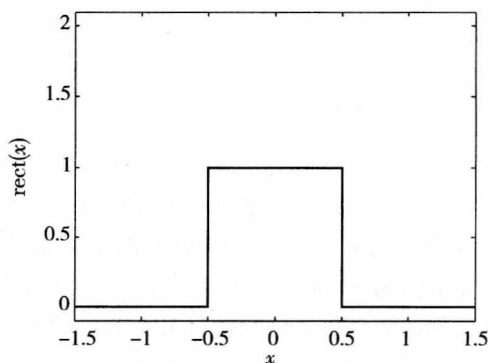
**例 1.1.1** 用MATLAB画出中心在原点的单位矩形脉冲和中心在1.5、脉宽为2、高度为2的矩形脉冲。

**解:**运行如下MATLAB程序,所得结果如图1.1.1(a)和图1.1.1(b)所示。

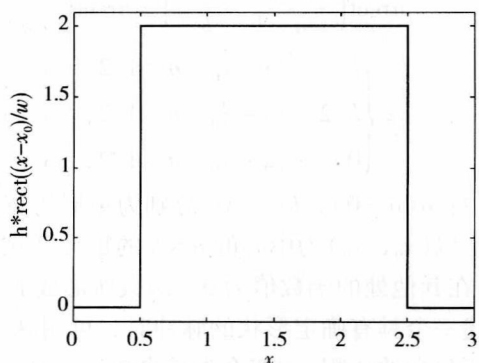
```

x1 = -1.5 : 0.001 : 1.5; y1 = rectpuls(x1); x0 = 1.5;
x2 = 0 : 0.001 : 3.0; a = 2; y2 = 2 * rectpuls(x2 - x0, a);
figure(1)
plot(x1,y1,'k','LineWidth',2); axis([-1.5 1.5 -0.1 2.1]); set(gca,'Ytick',[0 0.5 1.0
1.5 2.0]'); xlabel('x'); ylabel('rect(x)')
figure(2)
plot(x2,y2,'k','LineWidth',2); axis([0 3.0 -0.1 2.1]); set(gca,'Ytick',[0 0.5 1.0
1.5 2.0]'); xlabel('x'); ylabel('h*rect((x-x0)/w)')

```



(a) 单位矩形函数



(b) 一般形式的矩形函数

图 1.1.1 一维矩形函数

矩形函数与某函数相乘后,可限制该函数自变量的取值范围,起到截取函数的作用,即可以用来以任意幅度  $h$  和任意宽度  $a$  截取某个函数的任一段。所以,矩形函数也称为门函数 (gating function), 或矩形窗口函数。例如,乘积  $\sin(\pi x) \text{rect}(x - \frac{1}{2})$  表示正弦函数只出现在区间  $(0, 1)$  内,其图形如图 1.1.2 所示,图中实线部分表示被矩形函数截断的正弦函数部分。这也提供了函数在一段区间内的简洁表达方式,如:

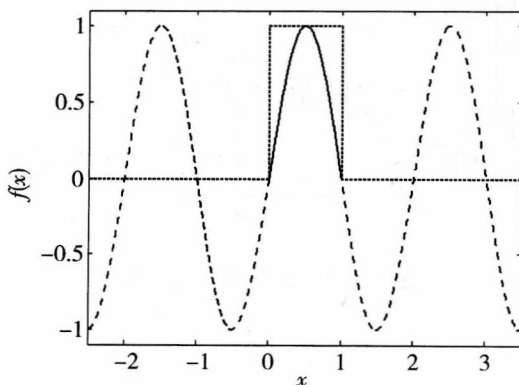


图 1.1.2 矩形函数的截断作用



$$f(x) = \sin(\pi x) \operatorname{rect}\left(x - \frac{1}{2}\right) \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sin(\pi x) & 0 < x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

脉冲函数可表示电路中的门脉冲、激光器输出的光脉冲等，也可表示理想的低通、带通滤波器等。无限大不透明屏上单个狭缝的透射率(在空间域，变量  $x$  为空间坐标，矩形宽度  $a$  为缝狭的宽度)、照相机快门(在时间域，变量  $x$  为时间坐标，矩形宽度  $a$  就是曝光时间)都可用一维矩形函数来描述。

二维矩形函数定义为两个一维矩形函数的乘积，其一般形式为：

$$h \operatorname{rect}\left(\frac{x-x_0}{a}, \frac{y-y_0}{b}\right) = h \operatorname{rect}\left(\frac{x-x_0}{a}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{y-y_0}{b}\right) \\ = \begin{cases} h & |x-x_0|/a < 1/2, |y-y_0|/b < 1/2 \\ h/2 & |x-x_0|/a = 1/2, |y-y_0|/b = 1/2 \\ 0 & |x-x_0|/a > 1/2, |y-y_0|/b > 1/2 \end{cases} \quad (1.1.5)$$

式中： $a(a > 0)$ ， $b(b > 0)$ 分别为矩形的宽度和长度。式(1.1.5)所表示的函数，在  $x-y$  平面上以  $(x_0, y_0)$  为中心的  $a \times b$  的矩形区域内，其函数值为  $h$ ，在不连续点处的函数值为  $h/2$ ，在其他处的函数值为 0。函数所形成的长方体的体积为  $abh$ 。由此可见，用二维函数来描述一个具有确定形状的脉冲时，可用脉冲的宽度、长度、高度和脉冲体积(指二维函数曲面所包含的体积)这四个参数来描述。脉冲体积等于 1 时为单位脉冲。可用 MATLAB 画出二维矩形函数的三维图，图 1.1.3 显示了一个中心在原点且  $a = b = h = 1$  的二维单位矩形函数的图形。

在光学中，矩形孔可用二维矩形函数来表示，所以可用来描述无限大不透明屏上矩形孔的透射率。一幅图像可以用二维函数来表示，用二维矩形函数与其相乘时，就可以截取矩形孔范围内的函数值，其他位置的函数值则被置零，这在图像处理中常会用到。

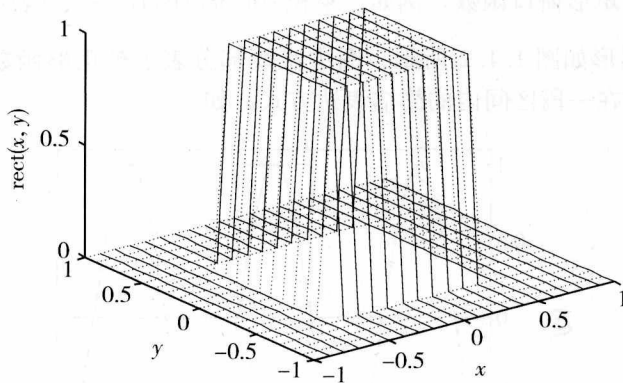


图 1.1.3 二维单位矩形函数

### 1.1.2 阶跃函数

阶跃函数(step function)用  $\operatorname{step}$  或  $H$  表示。为了纪念英国著名的电气工程师海维赛德(Heaviside, 1850—1925)，阶跃函数又称海维赛德函数。一维单位阶跃函数的定义为：