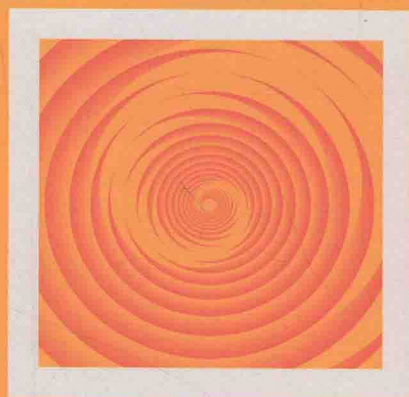


代数之管见

——漫谈代数学习

孟道骥 著



科学出版社

代数之管见

——漫谈代数学习

孟道骥 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是根据作者退休后在一些学校、场合有关数学的一些讲话整理出来的,一个讲话列为一讲.前面12讲主要是与本科生和研究生的座谈:内容涉及介绍伟大的国际数学大师陈省身先生在中国改革开放之后,回到祖国促进中国数学走向大国、强国之路;如何提高学习数学的动力,学习数学的方法;如何提高数学能力;几何学的重要性;代数学的一些特性;通过函数的泰勒展开得到欧拉公式及其推广体会微分学的精要;由河图、洛书到幻方、正交拉丁方介绍一点组合数学;用连续5次报告向同学介绍李群的产生、成长和发展.这12讲的内容都在宜宾学院讲过.第13讲则是作者在宜宾学院发展高峰论坛上的发言,说明这些讲话的初衷.第5讲与第14讲、第15讲是在科学出版社主办的有关课程研讨会上的发言;第16讲、第17讲是在黑龙江省高校教学发展示范中心“大学数学基础课程”骨干教师教学技能培训班上的讲话;最后一讲则是与教师们座谈培养学生话题.本书还收集了一些有关照片和图片与大家分享.

本书可供数学类各专业及相关专业的本科生、研究生和教师、研究人员使用,也可作为数学爱好者的参考读物.

图书在版编目(CIP)数据

代数之管见:漫谈代数学习/孟道骥著. —北京:科学出版社, 2016.2
ISBN 978-7-03-047251-9

I. ①代… II. ①孟… III. ①线性代数-高等学校-教学参考资料
IV. ① O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 018605 号

责任编辑:王 静/责任校对:胡小洁
责任印制:霍 兵/封面设计:陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

三河市骏杰印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016年4月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2016年4月第一次印刷 印张:13 1/2

字数:272 000

定价:49.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

我大学时期学习数学, 研究生时期主要学习代数; 工作后在中学教书, 教的是数学; 后来在大学教书, 教的仍然是数学, 所教更多的是代数方面的课程. 总之, 我是以数学谋生的人, 简称“数学人”. 在年近古稀时我退休了, 这是自然的事, “神龟虽寿, 终有尽时”嘛. 人总是憧憬美好生活, 将这无可奈何的自然发展进程比喻为“夕阳”, 可以享受夕阳的美景.

有些年轻的朋友 (如秦厚荣、郜云、彭联刚、张世清等) 认为我还可以做点事情, 于是建议他们的单位邀请我访问. 在 2011 年之前, 我访问了东北师范大学、南京大学、常熟理工学院、中国科学技术大学、哈尔滨师范大学、四川大学、四川师范大学、西华师范大学等. 访问期间除了讲授本科、研究生和博士生的课程, 完成一些教材的出版外, 还有一些座谈、讲座、报告之类. 2011 年 9 月到 2012 年 6 月, 我应宜宾学院汪明义校长的邀请访问该学院. 宜宾学院给予我一个非常宽松的环境, 让我给他们正在从事的改革和建设提些建议, 特别是与数学学院的老师们探讨课程的改革, 与同学们座谈交流学习体会等. 正因为如此我必须也有可能回忆、加深、加细以前的一些报告、座谈会上的发言. 根据整理出来的结果, 我又添加了一些话题, 在宜宾学院给同学们做了十二个报告. 2012 年学年结束时, 宜宾学院要求我将这些报告由提纲变成“文章”. 我特别要感谢宜宾学院的李小蓉老师, 我在宜宾学院的每次报告她都参加, 并认真记录, 随后又帮我整理, 没有她的帮助, 我想呈现在读者眼前的最多就是一些讲话提纲.

宜宾地处川南, 四川云南交界处. 宜宾学院原是宜宾专科学校, 2001 年前升格为本科学校, 现在规模有学生一万二千多人, 每年招生是第二批录取. 这



样的学校简称“二本院校”。二本院校无论是学校数量、在校学生人数和教职工人数都占了全国高校很大的比例。如果二本院校的质量不高,就会直接影响我国整个高等教育的质量。另一方面,二本院校的经费、设备、师资、学生入学时的学习水平都与一本院校、重点院校相比,不必讳言确实有不小的差距。提高二本院校的质量是刻不容缓的任务,而任务却是艰巨的。我与宜宾学院的汪明义校长相识多年,知他不仅深入研究教育学,而且颇有见地,提出了许多深刻的理念,又勇于实践。在他的推动下,宜宾学院正在进行本科课程体系的改革和建设。他也十分重视科普讲座的工作。他认为青年人的科学创新原动力主要在心理和精神两个层面。心理层面是指好奇心、求知欲和兴趣等。精神层面则是强烈的社会责任感和人类责任感。好的科普讲座必然涉及科学家的人格魅力和科学精神,因而无论是心理层面还是精神层面对科学创新原动力均有很好的激发作用。为此,宜宾学院从2009年就开设了“科学与人文”和“奋斗者的足迹”两个系列讲座。宜宾学院的数学学院近几年也请了不少著名学者来开设讲座。

2012年学年末,宜宾学院召开了“宜宾学院发展高峰论坛”,并让我发言。我借这个发言的机会向宜宾学院汇报了我在这一年的工作,其中也谈到了我所做十二个报告的初衷,这就是本书第13讲。

在宜宾这一年,也继续教材的出版,并蒙科学出版社的邀请参加了在南京师范大学举办的几何课程研讨会、在徐州工程学院举办的代数课程研讨会,此前,在2008年参加了该社在东南大学举办的线性代数课程研讨会。在这三个研讨会上的发言经过整理也收入到本书中。

2013年5月,黑龙江省高校教师教学发展示范中心在哈尔滨师范大学举办“大学数学基础课程”骨干教师教学技能培训班,包括数学分析和高等代数两门课程,我应邀出席并做高等代数的主题讲座,本书的第16讲,第17讲就是相关内容。

最后一个内容,则是关于高校数学老师如何培养人的问题。这是根据我在中国科学技术大学数学系、哈尔滨师范大学数学学院、黑龙江大学数学学院等



院系与老师们座谈的提纲整理而成的。

我访问这些学校时,都得到了盛情款待,证明了“学数学不仅可以吃饭,而且也可以吃好饭”(陈省身语)这个定理。这当然令人愉快。“三句话不离本行”,访问中还在谈论、讨论数学,这也是数学人最喜欢、最快乐的事情了。所以我的夕阳行是在快乐地学习、讨论数学中进行的。故原打算把本书称为《快哉言数——夕阳行》,并以此来感谢邀请我访问的所有学校和单位。本书的编辑说“言数”,数太宽,不能确切反映本书内容。她建议用现在的书名:《代数之管见——漫谈代数学习》。她的建议非常好。本书里绝大多数内容直接就是代数,还有部分如几何、数学分析、组合数学(幻方)等也是与代数密切相关的,当然还有一些更一般的学习数学的动力、方法,提高数学能力等也和代数相关。其实,数学就是一个整体,关注数学的统一性是非常重要的。我高兴地采纳了编辑关于书名的建议,并向她致谢!

在编辑本书时,特别是插入图片时,孙文昌、安桂梅、王立云、袁腊梅、孟新宇和刘天庆等都给予我很大帮助,在此表示衷心感谢。

李小蓉、吴月柱、陈良云、白瑞蒲、朱富海和王艳等老师以及马瑶博士仔细阅读了初稿,并提出了许多宝贵意见和建议。我据此又进一步修改了稿件。再次感谢他们。

南开大学数学学院的田冲书记、梁科教授帮助我获得了充分的资助,在此表示衷心的感谢!

由于个人水平所限,难免有不妥之处,敬请读者赐教。

孟道骥

2013年7月16日

于南开大学

目 录

前言

第 1 讲 纪念陈省身先生诞辰百周年// 1

- 1.1 简历片段// 2
- 1.2 向数学大国进军// 4
- 1.3 创办南开数学研究所// 7
- 1.4 创办南开大学数学试点班// 12
- 1.5 陈省身先生与数学科普// 14
- 1.6 实现数学大国, 向数学强国迈进// 17

第 2 讲 漫谈数学学习// 20

- 2.1 学习需要巨大的、持之以恒的动力// 20
- 2.2 学习数学需要积极的态度和正确的方法// 24
- 2.3 构建和谐的环境// 26

第 3 讲 提高数学能力// 27

- 3.1 知识是能力的基础// 27
- 3.2 积累经验// 28
- 3.3 提出问题// 29
- 3.4 解决问题// 30
- 3.5 推广成果// 31

第 4 讲 代数之管见// 34

- 4.1 代数学是什么?// 34
- 4.2 “玄之又玄”——抽象性是代数学的重要特点// 35



- 4.3 “众妙之门”——联系的广泛性// 38
- 4.4 浪漫性是代数的艺术特征// 39
- 4.5 为把中国建成数学强国而奋斗// 43
- 第 5 讲 向几何学习// 44**
 - 5.1 数学之源// 44
 - 5.2 有容乃大// 46
 - 5.3 几何会被“吃掉”吗?// 49
 - 5.4 感谢科学出版社的支持// 50
- 第 6 讲 五朵金花// 52**
 - 6.1 虚数 $\sqrt{-1}$ // 53
 - 6.2 圆周率 π // 53
 - 6.3 自然对数的底 e // 54
 - 6.4 欧拉公式 $e^{\pi\sqrt{-1}} + 1 = 0$ // 55
 - 6.5 指数函数 e^x 的推广// 56
- 第 7 讲 幻方、拉丁方与矩阵// 60**
 - 7.1 引言// 60
 - 7.2 拉丁方// 62
 - 7.3 幻方构成的线性空间// 67
 - 7.4 幻方的某些对称性// 71
 - 7.5 幻方的张量积// 76
 - 7.6 经典幻方// 78
- 第 8 讲 李群的故事 (一)// 83**
 - 8.1 李群李代数的产生// 83
 - 8.2 什么是李群李代数// 88
 - 8.3 李群李代数的成长// 88
 - 8.4 李群李代数的发展// 90

- 8.5 李群李代数在中国 // 91
- 第 9 讲 李群的故事 (二)——特殊线性群及其李代数 // 95
 - 9.1 方阵的指数映射 // 95
 - 9.2 李群 $GL(n, \mathbf{C})$ 与 $SL(n, \mathbf{C})$ // 96
 - 9.3 李代数中的运算 // 97
 - 9.4 复一般线性李代数与复特殊线性李代数 // 99
- 第 10 讲 李群的故事 (三)——正交群 $SO(n, \mathbf{C})$ 及其李代数 $so(n, \mathbf{C})$ // 101
 - 10.1 正交群与正交李代数 // 101
 - 10.2 偶数阶正交李代数 // 102
 - 10.3 奇数阶正交李代数 // 104
 - 10.4 李代数的一些基本概念 // 105
- 第 11 讲 李群的故事 (四)——辛群、酉群及其他 // 108
 - 11.1 辛群 $SP(n, \mathbf{C})$ 及其李代数 $sp(n, \mathbf{C})$ // 108
 - 11.2 酉群及其李代数 // 110
 - 11.3 洛伦兹群及其他 // 111
- 第 12 讲 李群的故事 (五)——黎曼对称空间 // 114
 - 12.1 背景 // 114
 - 12.2 对称性的数学刻画 // 115
 - 12.3 黎曼对称空间的定义 // 117
 - 12.4 黎曼对称空间与李群 // 118
 - 12.5 例子 // 119
 - 12.6 中国数学家与黎曼对称空间 // 124
 - 12.7 结束语 // 125
- 第 13 讲 在宜宾学院高峰论坛的发言 // 126
- 第 14 讲 高等代数与解析几何的改革 // 131
 - 14.1 改革的由来 // 131
 - 14.2 高等代数与解析几何的改革 // 132



- 14.3 改革的效果// 138
- 第 15 讲 代数课程设置的考虑// 141**
 - 15.1 课程改革的由来// 141
 - 15.2 代数课程的内容// 142
 - 15.3 代数学的特性// 146
 - 15.4 若干问题// 152
- 第 16 讲 矩阵与线性方程组// 155**
 - 16.1 矩阵的初等变换// 155
 - 16.2 打洞技巧// 166
 - 16.3 线性方程组理论// 175
- 第 17 讲 线性空间与线性变换// 184**
 - 17.1 秩、维数// 184
 - 17.2 线性变换的特征多项式// 188
 - 17.3 正规变换// 195
- 第 18 讲 学习, 学习, 再学习 —— 培养创新人才之路// 200**
 - 18.1 高校教师的任务// 200
 - 18.2 学习, 学习, 再学习// 201
 - 18.3 十年面壁图破壁// 203
 - 18.4 大眼界、大目标// 204



第1讲 纪念陈省身先生诞辰 百周年^①



陈省身

1972年随着中美关系的改善,陈省身先生开始每年回国访问,后又定居在南开大学,直到逝世.他为中国数学事业的发展作出了巨大贡献.从陈省身先生开始回国访问就受到中国的高度重视,原国家领导人邓小平、江泽民等多次会见陈省身先生.

2011年是陈省身先生诞辰一百周年,我们怀着深深的敬爱来纪念这位属于中国,也属于全世界的伟大数学家.对陈先生的评价有许多权威人士都做过,但一般侧重于学术价值、人格魅力等方面.1984年我参加了陈先生倡议举办的全国研究生数学暑期教学中心,身份是“讲员”.2004年11月17日下午4点半后,我下了微分几何课,在数学楼二楼电梯前遇见先生.“陈先生,您好.”“道骥,我正好有事找你.”于是我推着先生的轮椅到了办公室.陈先生告诉我,要办一

^① 根据作者在宜宾学院给本科生和研究生的报告整理而成.

个“陈省身数学班”，要一个“学术顾问”，一个“行政顾问”，并问我愿不愿意做学术顾问。我说：“陈先生，这是我的荣幸，我要努力地去做。”这竟是我与先生最后的见面与谈话。

从1984年到2004年，我能经常见到陈先生并参加他组织的许多活动，深深感觉到、体会到、认识到陈先生为把中国建成数学大国，进而推向数学强国不仅以坚强的意志努力奋斗，而且以天才的智慧提出了伟大的战略思想、战略部署和采取了战略性的措施。这20年是我一生最难以忘怀的20年。陈先生是我永远怀念的伟人。

1.1 简历片段

陈省身先生1911年10月28日生于浙江嘉兴，2004年12月3日逝世于天津。

1936年2月在德国获博士学位，赴法国做博士后，师从嘉当(É. Cartan)。

1937年回国任清华大学教授。

1938年，因抗战随学校内迁至云南昆明，任西南联合大学教授。

1948年当选中央研究院第一届院士。

1961年当选美国科学院院士。

1975年获美国国家科学奖章，由美国总统福特给陈先生授奖。

1984年获沃尔夫数学奖，由以色列总统贺索给陈先生授奖。

2004年获首届邵逸夫奖。

2004年一颗小行星被命名为陈省身星。



福特给陈先生授奖



贺索给陈先生授奖



陈省身先生生前经常提到他的两位老师，一位是他在南开大学求学时的老师姜立夫，另一位是他在法国做博士后时的老师嘉当。

姜立夫先生 (1890—1978) 1919 年获美国哈佛大学博士学位。中国现代数学教育早期代表人物之一。南开大学算学系 (数学系) 创办人，陈省身的老师。民国时期中央研究院数学所所长，陈省身为代理所长。译有《黎曼几何学·正交标架法》。



姜立夫

嘉当 (1869—1951) 法国数学家。他利用外微分形式和活动标架法研究李群和微分几何学，对李群的结构和表示，以及黎曼几何学都有重要贡献。他提出的射影空间和联络空间的理论对现代微分几何学颇有影响。主要著作有《连续群



嘉当



论和广义空间》《黎曼空间几何》《积分不变式》《李群几何学与对称空间》等。陈省身在德国获博士学位后，到法国跟随嘉当做博士后。陈省身先生受嘉当的影响最大。

1.2 向数学大国进军

随着我国改革开放方针的实施，国门打开，陈省身先生与许多科学家从美国回到阔别多年的祖国。党和国家希望他们回来帮助祖国的发展。

邓小平、江泽民等多位党和国家领导人多次会见陈先生。此后中国数学的学术活动日趋活跃。可以想象这与陈先生提出的许多发展中国数学的建议有关。

在 20 世纪 70 年代召开的展望 21 世纪的中国数学的学术会议上，陈先生提出了要实现中国数学的“独立和平等”，并预测“中国在 21 世纪将会成为数学大国”。陈先生的预测，被中国数学界称为“陈省身猜想”。

为什么大家觉得是“猜想”呢？因为感到 21 世纪要成为数学大国的信心不足。为何信心不足？因为中国数学与西方数学差距本来就大，“文化大革命”期间，这个差距更大了。有句成语形容差距大，叫“望尘莫及”。20 世纪 60~70 年代是数学大发展的时期，不仅许多重大数学问题被解决了，而且出现了许多新的分支。国内的数学家们对这些基本上都不知道。所以不只是“望尘莫及”，而是尘都望不到了。所以把陈先生的预测称为“猜想”不无道理。

为了实现数学大国的猜想，陈先生在与领导人会谈时，提出了深思熟虑的、切实可行的建议：

1. 聘请国外专家讲学；
2. 推荐数学教师出国访问；
3. 设立陈省身留学项目派遣留学生；
4. 在国内召开国际学术会议；
5. 建立全国数学研究生暑期教学中心（现为全国研究生数学暑期学校）。

这些建议得到支持并付诸实施.

陈先生身体力行,自己也回来做了系统的微分几何的讲学,讲稿由陈维桓整理出版为《微分几何讲义》(北京大学出版社).国外专家的讲学是多方面的,这些讲学使国内的数学家们大开眼界,知道数学发展到了何等地步.

数学的发展离不开数学人才的培养.让数学老师了解当今数学的状况,这样的老师才可能培养出好的人才.因而派遣留学生、老师出国访问都是重要的.

我经陈先生推荐,由香港王宽诚教育基金会资助访问美国一年,我访问了四个学校,最后的两个半月在陈先生的办公室里完成了《复半单李代数》的书稿.

学术会议的好处是参加的人比较多,在某个分支反映的动态更全面,受益面更广.我第一次在国际学术会议上发言是 1984 年的北京国际群论讨论会,介绍了当时我正在进行的研究.讨论会期间部分与会代表举办了恭贺段学复院士七十寿诞的活动.



北京国际群论讨论会



段学复院士与部分学生合影^①

数学研究生暑期教学中心面向全国研究生,是共享教师资源非常好的方法.第一届暑期中心于1984年在北京大学举行.项武义教授主讲李群,侯自新和我是讲员.1984年对于我的重要性在于参加到陈省身先生所倡导的数学工作中了.



第一届数学研究生暑期教学中心合影

第二届数学研究生暑期教学中心于1985年在南开大学举行.林节玄教授

^①第一排,从左到右依次为聂灵沼,王萼芳,段学复,作者.第三排左二沈光宇,左三许以超.



主讲有限群表示论,我和复旦大学的黄昌龄老师是讲员.以后将“暑期中心”更名为“暑期学校”.我多次作为主讲员参加这项活动,如2001年在中国科学技术大学的第七届暑期学校我讲授李群与黎曼对称空间.2008年在中国科学技术大学的第十四届暑期学校我讲授有限群表示.



第七届全国数学研究生暑期学校师生合影

1.3 创办南开数学研究所

1985年一个在中国科学院系统之外的,由外籍人士担任有职权的所长的南开数学研究所成立了.这个外籍人士就是陈省身先生.南开数学研究所里特设了一个理论物理室,由诺贝尔物理学奖的得主杨振宁先生任主任.

南开数学研究所是陈先生建立的第三个数学研究所.第一个是民国时期中央研究院的数学研究所.该所筹建时所长姜立夫不在国内,所以由代理所长陈省身先生负责一切筹建工作.第二个是美国的国家数学研究所.陈省身先生由芝加哥大学转到加州伯克利后建议建立美国的国家数学研究所,这个建议被采纳,并由陈先生负责建立.南开数学研究所则是陈先生建立的第三个数学研究所.