1
现代数学丛书
Series in Contemporary Mathematics

# 非线性波动方程

李大潜　周　忆／著

# Nonlinear Wave Equations

上海科学技术出版社
Shanghai Scientific & Technical Publishers

现代数学丛书

# 非线性波动方程

李大潜　周　忆　著



上海科学技术出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

非线性波动方程 / 李大潜,周忆著. —上海:上海科学技术出版社,2016.1

ISBN 978-7-5478-2611-9

Ⅰ.①非… Ⅱ.①李… ②周… Ⅲ.①非线性方程—波动方程—研究 Ⅳ.①O175.27

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 072055 号

总 策 划 苏德敏 张 晨
丛书策划 包惠芳 田廷彦
责任编辑 田廷彦

**非线性波动方程**
**李大潜 周 忆 著**

上海世纪出版股份有限公司
上 海 科 学 技 术 出 版 社 出版
(上海钦州南路 71 号 邮政编码 200235)
上海世纪出版股份有限公司发行中心发行
200001 上海福建中路 193 号 www.ewen.co
上海中华商务联合印刷有限公司印刷
开本 787×1092 1/16 印张 25.5 插页 4
字数 450 千字
2016 年 1 月第 1 版 2016 年 1 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5478-2611-9/O·46
定价:148.00元

# 《现代数学丛书》编委会

**马志明(MA Zhiming)**
中国科学院数学与系统科学研究院,北京 100190,中国

**Andrew J. MAJDA**
Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, New York, NY 10012, USA.

**Cédric VILLANI**
Institut Herni Poincaré, 75231 Paris Cedex 05, France.

**袁亚湘(YUAN Yaxiang)**
中国科学院数学与系统科学研究院,北京 100190,中国

**张伟平(ZHANG Weiping)**
南开大学陈省身数学研究所,天津 300071,中国

## 助　理

**姚一隽(YAO Yijun)**
复旦大学数学科学学院,上海 200433,中国

# 前　　言

非线性波动方程是一类具有重要理论意义及应用价值的典型的非线性发展方程. 对非线性波动方程具小初值的 Cauchy 问题的经典解的整体存在性及破裂现象的研究,涉及此类方程的零解的渐近稳定性或相应控制系统的镇定性,是一个意义重大且颇具挑战性的研究主题. 这方面的研究,起自 F. John 教授于 20 世纪 70 年代末至 80 年代初,为揭示非线性波动方程的解的破裂现象所举出的一些例证,后经 F. John 教授本人,特别是 S. Klainerman, D. Christodoulou, L. Hörmander 教授以及 M. Kovalyov, H. Lindblad, G. Ponce, J. Shatah, T. C. Sideris 等教授,分别针对不同的空间维数以及不同的非线性右端项的幂次,给出了有关经典解的整体存在性及生命跨度下界估计的种种结果,形成了一个重要而引人注目的前沿研究方向. 这些数学家的研究成果是很深入的,但一时尚未能涵盖所有可能的重要情况,对所建立的经典解的生命跨度的下界估计的 Sharpness,也留下不少空白,整个研究还处于一种方兴未艾的状态. 另一方面,这些数学家所用的方法也各有千秋,互具特色,有的还相当复杂,对这一类问题似乎还没有找到一个统一而简明的处理办法.

我在旅法期间于 1980 年去英国访问 Heriot-Watt 大学的时候,曾遇到当时也在那儿访问的 F. John 教授,得以当面向他请教,得益良多. 1981 年初我在美国访问 Courant 研究所时,见到了 S. Klainerman 教授,和他进行了认真的讨论,他还送给我那篇近 60 页长文的预印本. 这开始了我对非线性波动方程的重视和兴趣,也推动了我们的有关研究工作. 我早期的几位博士研究生,如陈韵梅、俞新及周忆等,都是以此作为博士论文主题的,并且都做出了可贵的贡献. 正是

由于他们的参与和努力，特别是周忆长期不懈的坚持，这一研究方向在复旦大学得以传承至今，并结出了丰硕的成果.我们在这方面的微薄贡献，概括起来主要是两点.一是针对一切可能的空间维数及一切可能的非线性右端项的幂次，对非线性波动方程具小初值的Cauchy问题的经典解的生命跨度建立了完整的下界估计(包括了整体存在性的结果)，而且这些下界估计都是不可改进的最佳估计，为这方面的研究原则上画上了句号.二是提出了处理这类问题的统一而简明的方法——整体迭代法.这一方法仅仅使用了简单的压缩映像原理，其工作量与证明经典解的局部存在性大体相当.

在我和陈韵梅合著于1989年在科学出版社出版的《非线性发展方程》一书中，曾利用整体迭代法证明了非线性波动方程具小初值的Cauchy问题的经典解的整体存在性.而在我和陈韵梅合著稍后于1992年在Longman Scientific & Technical出版社出版的*Global Classical Solutions for Nonlinear Evolution Equations*一书中，整体迭代法则还被进一步用于得到有关经典解生命跨度的一些下界估计.但限于当时的科研进展，对空间维数$n=2$及$n=4$等重要情形，或是没有涉及，或是未得到最佳的结果；此外，关于零条件的有关理论以及一些生命跨度下界估计的Sharpness，也均未涉及.由于这两本书同时涉及非线性热传导方程等非线性发展方程，非线性波动方程只是其中的一个部分，在篇幅上不免受到制约，这也是部分地造成上述缺憾的一个原因.到了1995年左右，我们已经在各种可能的情况下，大体上完成了用整体迭代法统一处理非线性波动方程具小初值的Cauchy问题的经典解的整体存在性及生命跨度下界估计的工作，我和周忆就开始酝酿写一本论述非线性波动方程的专著，上海科学技术出版社也早已向我们约稿.但因杂事烦多，撰写工作时断时续，有时甚至长期停顿.未能下决心尽快成书还有一个重要的原因，就是我们所得到的这些生命跨度的下界估计，当时还有少数尚未被证明是不可改进的最佳估计，匆忙写出来交付出版，终究难以成为完璧，总是心有不甘.近年来，这些生命跨度下界估计的Sharpness终于全部有了眉目，这使我们感到迅速成书的紧迫性.同时，经过了这些年月，已发现以往的有些证明还可以进一步简化或改进，从而能以较新的面貌来呈现，这也是一个额外的收获.尽管我们下决心重整旗鼓，但由于不少的证明需要改写，接着又花了两三年的时间，全书才得于2014年初最终定稿.在经过了这一过程后看到本书面世，作者的欣慰是不言而喻的.

全书共十五章. 前七章是为后文作准备的，但本身也有其独立的意义和价值. 在后八章中，有五章针对各种不同的可能情况，分别用整体迭代法讨论了经典解的整体存在性及生命跨度的下界估计，包括在零条件假设下证明了经典解的整体存在性；有两章专门论证所得生命跨度下界估计的 Sharpness；最后一章则涉及有关的应用与拓展. 书末所附参考文献的绝大部分在正文中都已引用，少数在正文中虽未正式引用，但多少有所相关，希望读者仍可从中获得一些必要的信息. 本书的中文打字、排版一直由王珂博士负责安排，全书并将由李亚纯教授译成英文在 Springer 出版社出版，作者对她们热情、负责的支持和帮助特致深切的谢意.

限于作者水平，本书疏漏及不足之处在所难免，恳请读者不吝赐教.

李大潜

2015 年 2 月 4 日

# 目　　录

# 第一章

# 引言及概述

## § 1. 目标

**非线性波动方程**是一类重要的无穷维动力系统. 所谓无穷维动力系统，是指用非线性发展型偏微分方程(简称非线性发展方程)所描述的系统. 而非线性发展方程是其解除依赖于空间变量外、还依赖于一个特殊的自变量 $t$(时间)的非线性偏微分方程的总称. 例如，在热流与反应-扩散现象中出现的非线性热传导方程(包括反应-扩散方程)，在振动与电磁学中出现的非线性波动方程，量子力学中的非线性 Schrödinger 方程，描述不可压缩流体的 Navier-Stokes 方程，规范场的 Yang-Mills 方程，守恒律双曲组，KdV 方程等等. 这些都是在应用中广泛出现、而且在相关的学科中具有基本重要性的一些方程.

为了说明清楚本书所要研究的问题，先考察有限维的动力系统，即非线性常微分方程(组)的情况. 这时解只是时间变量 $t$ 的函数，而不依赖于空间变量.

先考虑下述最简单的情况：考察下述非线性常微分方程的 Cauchy 问题：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = u^{1+\alpha}, \tag{1.1.1}$$

$$t = 0 : u = \varepsilon, \tag{1.1.2}$$

这里 $\alpha$ 是一个正常数，$\varepsilon > 0$ 是一个小参数. 这个问题的解可明显表示为

$$u(t) = \frac{\varepsilon}{(1-\alpha t\varepsilon^{\alpha})^{1/\alpha}}. \tag{1.1.3}$$

因此，当 $t \to \frac{1}{\alpha}\varepsilon^{-\alpha}$ 时，$u(t) \to +\infty$，如图 1 所示.

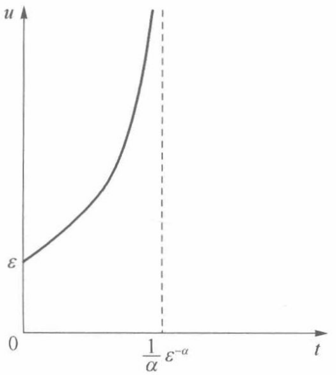


图 1

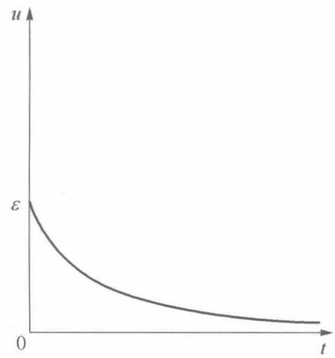


图 2

这样，这个问题不能对所有时间 $t \geqslant 0$ 都存在解，即不存在**整体经典解**（所谓经典解，是指在常规意义下的解；而整体解，是指对所有时间 $t \geqslant 0$ 均存在的解）. 这表现为在一定时间后解要出现奇性（解或其导数→∞；这里解及其导数均→∞），称为解的**破裂**（blow-up）. 和线性的情况不同，对非线性微分方程的 Cauchy 问题，其解一般说来都有可能产生破裂现象. 在现在的情况，既然解要破裂，我们看一看解到底能存在多长时间？显然，若记解的**生命跨度**（life-span），即保证解存在的时间区间的最大长度，为 $\widetilde{T}(\varepsilon)$，就有

$$\widetilde{T}(\varepsilon)=\frac{1}{\alpha}\varepsilon^{-\alpha}\approx\varepsilon^{-\alpha}. \tag{1.1.4}$$

这说明，对小初值来说，当右端非线性项的阶数愈高、即 $\alpha$ 愈大时，解的生命跨度也愈大. 这是因为，对小的解，当右端非线性项的阶数愈高时，其影响愈小.

但是，若在方程中包含耗散项，上述情况将会有很大的变化. 将 $u$ 视为速度，并假设在运动过程中有一个和速度成正比的阻力，上述微分方程(1.1.1)，例如说，将由如下的方程代替（其中比例常数取为 1）：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-u+u^{1+\alpha}, \tag{1.1.5}$$

而初值仍为(1.1.2). 此时 Cauchy 问题(1.1.5)及(1.1.2)的解易知为

$$u(t)=\frac{\varepsilon}{\left[\mathrm{e}^{\alpha t}(1-\varepsilon^{\alpha})+\varepsilon^{\alpha}\right]^{1/\alpha}}, \tag{1.1.6}$$

如图 2 所示. 这时只要 $\varepsilon>0$ 适当小（$\varepsilon<1$），此 Cauchy 问题对所有时间 $t \geqslant 0$ 均有唯一的解，即生命跨度

$$\widetilde{T}(\varepsilon)=+\infty, \tag{1.1.7}$$

且此解在 $t \to +\infty$ 时指数衰减.

为什么这两种情况会有如此重大的差别呢？根本的原因在于相应的线性化方程有很大的不同. 我们看到：方程(1.1.5)的线性化方程为 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-u$，其一切解在 $t \to +\infty$ 时均指数衰减；而方程(1.1.1)的线性化方程为 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=0$，其一切非零解均不衰减. 正是这一本质差别导致是否存在整体解的不同的结果.

实际上，这在常微分方程组的情况有一个相当一般的结论. 考察下面的常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=f(U), \tag{1.1.8}$$

其中 $U=(u_1, \cdots, u_n)^T$ 为未知向量函数，而 $f(U)=(f_1(U), \cdots, f_n(U))^T$ 为 $U$ 的适当光滑的已给函数，且设

$$f(0)=0, \tag{1.1.9}$$

即 $U \equiv 0$ 是系统的一个平衡态(零解). 写出(1.1.8)的线性化方程组

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=AU, \tag{1.1.10}$$

其中

$$A=\nabla f(0) \tag{1.1.11}$$

为方程(1.1.8)的右端非线性项 $f(U)$ 在 $U=0$ 处的 Jacobi 阵.

假设 $A$ 的一切特征值均有负的实部，这等价于假设线性化方程组(1.1.10)的一切解在 $t \to +\infty$ 时均指数衰减，那么原非线性方程组(1.1.8)具小初值

$$t=0: U=U_0 (U_0 \text{ 小}) \tag{1.1.12}$$

的 Cauchy 问题必在 $t \geqslant 0$ 上存在整体解 $U=U(t)$，且当 $t \to +\infty$ 时，$U(t)$ 也指数衰减.

这里“$A$ 的一切特征值均有负的实部”，相当于方程组(1.1.8)具有一定的耗散机制；而“具小初值的 Cauchy 问题在 $t \geqslant 0$ 上有整体解，且解当 $t \to +\infty$ 时指数衰减”意味着：若零解在初始时刻有一个小的扰动，此小扰动最终会以指数衰减的方式在 $t \to +\infty$ 时很快消失，即零解具有渐近稳定性. 这就是常微分方程理论中熟知的**零解的渐近稳定性**定理[85].