现代物理基础丛书 74

量子场论导论

——电磁作用的阿贝尔规范理论

姜志进 编著

科学出版社

现代物理基础丛书 74

量子场论导论

——电磁作用的阿贝尔规范理论

姜志进 编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书较系统地介绍了电磁作用的阿贝尔规范理论的基本知识.全书共分六章,分别讨论自由粒子的相对论波动方程,包括自旋为 0 的标量粒子的克莱因-戈尔登方程,自旋为 1/2 的费米子的狄拉克方程及库仑与洛伦兹规范下光子的波动方程;建立起描述各自由粒子的拉格朗日场理论,给出不同场的能量、动量与自旋表达式;对各自由场实现正则量子化,克服标量粒子与光子的负能困难;讨论相互作用表象的特点,给出 S 矩阵与 S 矩阵元的表达式,导出旋量场电磁作用的费曼规则;在树图近似下计算出正负电子对湮灭为 μ 子对或强子的截面、康普顿散射截面及电子在库仑场中的散射截面;以单圈近似为例介绍旋量场电磁作用的重整化方法,得到重整化的质量与电荷,导出瓦德等式,给出一般相互作用理论的重整化判据.

书中数学推导过程较详细,易读易懂性较强.在内容安排上由浅入深、循序渐进.在理论结构方面前因后果、自成一体.本书适用于作为理论物理及相关专业研究生的教科用书,也适用于作为这类专业科技工作者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

量子场论导论:电磁作用的阿贝尔规范理论/姜志进编著.—北京:科学出版社,2015.11

(现代物理基础丛书)

ISBN 978-7-03-046262-6

Ⅰ.①量… Ⅱ.①姜… Ⅲ.①量子场论 Ⅳ.①O413.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 265592 号

责任编辑:钱 俊 裴 威/责任校对:邹慧卿

责任印制:张 倩/封面设计:陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

北京通州皇家印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 1 月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2016 年 1 月第一次印刷 印张:15 3/4

字数:318 000

定价:98.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前　言

量子场论是 20 世纪 20 年代发展起来的一门描述微观粒子相互作用与转化规律的学科. 它是现代物理学的基础，是理论物理及相关专业研究生的必修课.

量子场论(又名规范场论)所涵盖的内容非常丰富，按所采用的规范变换群，它大致可分为两部分：阿贝尔与非阿贝尔规范理论. 前者采用的是阿贝尔规范变换群，后者是非阿贝尔规范变换群. 如电磁作用，其规范变换群是阿贝尔 $U(1)$ 群，因此电磁作用是一种阿贝尔规范理论，也就是习惯上所说的量子电动力学. 而弱电统一规范理论与量子色动力学(二者统称为标准模型)分别采用 $SU(2)\otimes U(1)$ 与 $SU(3)$ 规范变换群，它们都是非阿贝尔群，因此弱电统一规范理论与量子色动力学都是非阿贝尔规范理论. 在有限的授课时间内，本书将集中于电磁作用的阿贝尔规范理论，介绍该理论的基本知识，这也就是本书书名副标题(电磁作用的阿贝尔规范理论)的由来.

学过量子场论的人都知道：量子场论中的数学公式比较多，许多运算过程长且复杂，更有一些数学问题的处理，需要借助于一些特殊的技巧，这进一步增加了学好该课程的难度. 鉴于此，本书的数学推导过程力求详细，使之易读易懂. 以期即使是具有基本物理专业知识的一般初学者，阅读起来也不至于感到太困难，而能顺利、快速地理解并掌握量子场论的基本知识. 这也是作者撰写本书的主要动因之一.

作为过渡，这里先作如下几点说明.

1. 符号与度规

本书将用 x 表示粒子的时空坐标，它是一个有四个分量的四维矢量，$x^\mu(\mu=0,1,2,3)$是它的逆变分量，且取

$$x^0=t,x^1=x,x^2=y,x^3=z, \tag{0.1a}$$

或简写为

$$x^\mu=(t,\boldsymbol{x}). \tag{0.1b}$$

另外，本书将采用度规张量

$$g^{\mu\nu}=g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}, \tag{0.2}$$

即 $g^{00}=g_{00}=1,g^{11}=g_{11}=g^{22}=g_{22}=g^{33}=g_{33}=-1$，若 $\mu\neq\nu,g_{\mu\nu}=g^{\mu\nu}=0$，而 $g^{\mu\mu}=g_{\nu\nu}=-2$ [注：这里和后面都采用爱因斯坦求和规则，即两相同的角标表示求和]. 通

常称这种度规为 Bjorken - Drell 度规. 而四维时空矢量 x 的协变分量

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu, \tag{0.3a}$$

其各分量为

$$x_0 = t, x_1 = -x, x_2 = -y, x_3 = -z, \tag{0.3b}$$

或简写成

$$x_\mu = (t, -\boldsymbol{x}). \tag{0.3c}$$

当然,对于一个仅有三个或三个以下分量的矢量,其各分量的上、下指标就无须区分了. 四维时空矢量 x 的模方为

$$\begin{aligned} x^2 &= x^\mu x_\mu = g^{\mu\nu} x_\nu x_\mu = x^0 x_0 + x^i x_i = x_0 x_0 - x_i x_i = t^2 - \boldsymbol{x}^2 \\ \Rightarrow \boldsymbol{x}^2 &= \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = -x^i x_i = x_i x_i, \end{aligned} \tag{0.4}$$

若无特殊说明,这里和以后都采用希腊字母,如 μ、ν、α 等表示四维时空的指标,而用拉丁字母,如 i、j、k 等表示其他空间的指标.

由于

$$x_\mu = g_\mu^\nu x_\nu,$$

所以

$$g_\mu^\nu = \delta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{0.5}$$

即混合度规张量 g_μ^ν 是一个单位张量,$g_0^0 = g_1^1 = g_2^2 = g_3^3 = 1$,若 $\mu \neq \nu$,$g_\mu^\nu = 0$,而 $g_\mu^\mu = 4$.

在有关参考书中,经常会遇到另一种度规——Pauli 度规,其度规张量就是一如上式所示的单位张量,这时四维时空矢量 x 的逆变与协变分量相同,都为 $x^\mu = x_\mu = (\boldsymbol{x}, \mathrm{i}t)$,即 $x^1 = x_1 = x, x^2 = x_2 = y, x^3 = x_3 = z, x^4 = x_4 = \mathrm{i}t$. 而 x 的模方为

$$x^2 = x_\mu x_\mu = \delta_{\mu\nu} x_\nu x_\mu = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \boldsymbol{x}^2 - t^2, \tag{0.6}$$

与(0.4)式相差一负号.

两种度规各有利弊,Bjorken - Drell 度规的利是四维矢量的时间分量不含有虚数因子 i,其弊是必须区分四维矢量的上、下指标. 而 Pauli 度规正好相反,四维矢量的时间分量含有一个虚数因子 i,这是它的弊,但此时不必区分上、下指标,这是它的利.

两种度规都有采用,采用不同的度规,相关公式会有一定的差异,所以应加以注意. 如上所述,本书将采用 Bjorken - Drell 度规.

在 Bjorken - Drell 度规下,常用的四维动量矢量 p 的逆变分量为

$$p^\mu = (E, \boldsymbol{p}),$$

协变分量为

$$p_\mu = g_{\mu\nu} p^\nu = (E, -\boldsymbol{p}),$$

而

$$p^2 = p^\mu p_\mu = g^{\mu\nu} p_\nu p_\mu = p^0 p_0 + p^i p_i = p_0 p_0 - p_i p_i = E^2 - \boldsymbol{p}^2$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{p}^2 = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{p} = -p^i p_i = p_i p_i,$$

四维时空坐标 x 与四维动量 p 的标积为

$$\begin{aligned} x \cdot p = xp = x^\mu p_\mu = x_\mu p^\mu = x_0 p^0 + x_i p^i = x_0 p_0 - x_i p_i = Et - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} \\ \Rightarrow \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} = -x_i p^i = x_i p_i, \end{aligned} \tag{0.7}$$

四维时空导数∂的逆变与协变分量分别为

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\boldsymbol{\nabla}\right), \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \boldsymbol{\nabla}\right), \tag{0.8}$$

与(0.1b)、(0.3c)两式相比，空间部分差了一负号，而其平方

$$\begin{aligned} \partial^2 = \partial^\mu \partial_\mu = \partial^0 \partial_0 + \partial^i \partial_i = \partial_0 \partial_0 - \partial_i \partial_i = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2 \\ \Rightarrow \boldsymbol{\nabla}^2 = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} = -\partial^i \partial_i = \partial^i \partial^i, \end{aligned} \tag{0.9}$$

与(0.4)或(0.7)式的形式相同，而

$$\begin{aligned} x^\mu \partial_\mu = x^0 \partial_0 + x^i \partial_i = x_0 \partial_0 - x_i \partial_i = t\partial_t + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\nabla} \\ \Rightarrow \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\nabla} = x^i \partial_i = -x_i \partial_i, \end{aligned} \tag{0.10}$$

与(0.4)或(0.7)式相比，空间部分差了一负号.

2. 自然单位制

1) 自然单位制的定义

这里将要讨论的量子场论，是相对论的量子化场理论，因此公式中将经常出现光速 c 和普朗克常数 h，为了使公式简洁，人们通常取

$$c = \hbar = k_B = 1, \tag{0.11}$$

其中，$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$，k_B 为玻尔兹曼常数，由此构成的单位制称为自然单位制. 可见，在自然单位制中，我们熟悉的速度变得没有单位了. 而该单位制中的基本单位只有一个：GeV. 1GeV$=10^9$eV 是一能量单位，任何其他单位都可用 GeV 表示出来. 如由 $E = mc^2 = m$ 知，质量的单位$[m]=$GeV. 又由量子力学中的德布罗意关系知，波长

$$\lambda = \frac{h}{p} \xlongequal{\text{光子}} \frac{\hbar 2\pi}{mc} = \frac{2\pi}{m},$$

故长度的单位 $[L]=\text{GeV}^{-1}$. 再由真空中光子的周期

$$T = \frac{\lambda}{c} = \lambda$$

知，时间的单位 $[t]=\text{GeV}^{-1}$. 而任何其他物理量的单位都可由基本单位——质量、长度与时间表示出来，这样它们的单位都可以用 GeV 表示出来，所以在自然单位制中，GeV 是一基本单位.

2）自然单位制与高斯单位制间的换算关系

下面来看一下自然单位制与常用单位制，如厘米、克、秒高斯单位制之间的换算关系. 由于

$$1\ c=2.9979\times10^{10}\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}=(c)\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}，\text{其中}(c)=2.9979\times10^{10}；\tag{0.12}$$

$$1\ \hbar=1.0546\times10^{-27}\mathrm{g\cdot cm^2\cdot s^{-1}}=(\hbar)\ \mathrm{g\cdot cm^2\cdot s^{-1}}，\text{其中}(\hbar)=1.0546\times10^{-27}；\tag{0.13}$$

$$1\ \mathrm{GeV}=10^9\ \mathrm{eV}=1.6022\times10^{-3}\mathrm{g\cdot cm^2\cdot s^{-2}}=(\varepsilon)\ \mathrm{g\cdot cm^2\cdot s^{-2}}，\text{其中}(\varepsilon)=1.6022\times10^{-3}.\tag{0.14}$$

由(0.14)式知

$$1\ \mathrm{s}=(\varepsilon)\ \mathrm{g\cdot cm^2\cdot s^{-1}\cdot GeV^{-1}}\xlongequal{(0.13)\text{式}}\frac{(\varepsilon)}{(\hbar)}\ \mathrm{GeV^{-1}}\hbar，$$

亦即

$$1\ \mathrm{s}=1.5192\times10^{24}\ \mathrm{GeV^{-1}}.\tag{0.15}$$

又由(0.12)式知

$$1\ \mathrm{cm}=\frac{\mathrm{s}}{(c)}c=5.0675\times10^{13}\ \mathrm{GeV^{-1}}c，$$

亦即

$$1\ \mathrm{cm}=5.0675\times10^{13}\ \mathrm{GeV^{-1}}.\tag{0.16}$$

又由(0.13)式得

$$1\ \mathrm{g}=\frac{\mathrm{s}}{(\hbar)\mathrm{cm}^2}\hbar=5.6097\times10^{23}\ \mathrm{GeV}\hbar，$$

亦即

$$1\ \mathrm{g}=5.6097\times10^{23}\ \mathrm{GeV}.\tag{0.17}$$

3）开尔文在自然单位制中的换算值

开尔文(K)是热力学中的一个常用单位，用于表示绝对温标中的温度单位，现在来看一下该单位在自然单位制中的换算值.

玻尔兹曼常数

$$k_{\mathrm{B}}=1.3807\times10^{-23}\ \mathrm{J\cdot K^{-1}}.$$

又

$$1\ \mathrm{eV}=1.6022\times10^{-19}\ \mathrm{J}\quad\text{或}\quad1\ \mathrm{J}=6.2414\times10^{9}\ \mathrm{GeV}，\tag{0.18}$$

故

$$k_{\mathrm{B}}=8.6175\times10^{-14}\mathrm{GeV\cdot K^{-1}}\xlongequal{(0.11)\text{式}}1，$$

这样

$$1\ \mathrm{K}=8.6175\times10^{-14}\ \mathrm{GeV}.\tag{0.19}$$

所以在自然单位制中，开尔文(K)为一能量单位.

4）库仑在自然单位制中的换算值

库仑(C)是电磁学中的一个常用单位，用于表示电量，现在来看一下该单位在自然单位制中的换算值.

真空介电常数

$$\varepsilon_0=8.8542\times10^{-12}\ \mathrm{C}^2\cdot\mathrm{N}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-2}=8.8542\times10^{-12}\ \mathrm{C}^2\cdot\mathrm{J}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}.$$

由(0.16)与(0.18)两式知

$$1\ \mathrm{J}\cdot\mathrm{m}=3.1630\times10^{25},$$

这样

$$\varepsilon_0=2.8005\times10^{-37}\ \mathrm{C}^2.$$

在自然单位制中，由于

$$\varepsilon_0\mu_0=\frac{1}{c^2}=1,$$

故

$$\varepsilon_0=\mu_0=1,$$

这样

$$1\ \mathrm{C}^2=3.5707\times10^{36},$$

或者

$$1\ \mathrm{C}=1.8896\times10^{18}, \tag{0.20}$$

所以在自然单位制中，库仑(C)是一无量纲的常数.

在量子场论中，经常要用到常数

$$\alpha=\frac{e^2}{4\pi},$$

称为精细结构常数，其中

$$e=1.6022\times10^{-19}\ \mathrm{C}=0.3028, \tag{0.21}$$

则

$$\alpha=0.0073\simeq\frac{1}{137}, \tag{0.22}$$

所以 α 是一个很小的常数.

3. 外国人名的标注

本书中的外国人名，在正文中第一次出现时，其汉译名后面都标有外文名，为简洁起见，同一人名再次出现时，将只用其汉译名，外文名不再标出.

4. 参考书及其他

在撰写本书的过程中，主要用到如下参考书：胡瑶光编著的《量子场论》；李政道著的《场论与粒子物理学》；J. D. Bjorken 与 S. D. Drell 著的 *Relativistic Quantum*

Fields;朱洪元著的《量子场论》及 D. 卢里著的《粒子和场》等.

该书是根据作者多年来的讲稿编写而成,虽经多次修改,书中的不当之处在所难免,敬请读者不吝批评指正.

最后借此机会,向那些在本书的文字输入方面给予宝贵帮助的同学致以深深的谢意! 向为本书的顺利出版而付出辛勤劳动的科学出版社钱俊编辑等致以深深的谢意!

姜志进

2015 年 2 月于上海

目　　录

第 1 章　自由粒子的相对论波动方程及其平面波解

自由粒子的相对论波动方程及其平面波解是量子场论的基础，其相关内容与结论在后面的讨论中将有重要的应用. 本章将讨论自旋为 0 的标量粒子、自旋为 1/2 的费米(Fermi)子及自旋为 1 的光子的相对论波动方程，给出它们的平面波解. 这部分内容是量子力学在高速情况下的延伸，所以本章又可名曰相对论量子力学. 所得结果，如平面波解，与量子力学中的波函数一样，也是一种几率波，也不能描述粒子的产生与湮灭现象. 不同的是，由于低速情况下不存在自旋效应，所有的微观粒子，不管自旋是多少都可统一地由薛定谔方程来描述. 但到了高速，粒子的自旋效应将显现出来，从而对其运动规律产生影响，使得不同自旋的微观粒子遵守不同形式的波动方程. 因此在相对论量子力学中，不同形式的波动方程描述不同自旋粒子的运动规律，反之亦然，两者一一对应.

1.1　克莱因-戈尔登方程

第一个相对论波动方程是由瑞典物理学家克莱因与德国物理学家戈尔登在 1926 年建立的，人们称其为克莱因-戈尔登(Klein - Gordon)方程.

1.1.1　方程的导出

由量子力学知，微观粒子的运动规律由方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial\psi(x)}{\partial t}=-\frac{\boldsymbol{\nabla}^2}{2m}\psi(x)+V(x)\psi(x) \tag{1.1}$$

描述，该方程是奥地利物理学家薛定谔(Schrödinger)于 1926 年建立的，称为薛定谔方程. 该方程的是由低速情况下的机械能

$$E=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}+V(x) \tag{1.2}$$

作代换

$$E\Rightarrow\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t},\quad \boldsymbol{p}\Rightarrow-\mathrm{i}\boldsymbol{\nabla},\quad \boldsymbol{x}\Rightarrow\boldsymbol{x}, \tag{1.3}$$

两边再同时作用在波函数上得到的.

薛定谔方程是非相对论的，体现在方程中的时间与空间是不对称的：对时间是一阶导数，对空间是二阶导数；这种不对称来源于(1.2)式中能量与动量的不对称：能量