

21世纪 应用型本科人才培养规划教材

GAODENGSHUXUE

高等数学

主编 / 王群智 于大光

主审 / 张文鹏

| 经管类

GAODENGSHUXUE

西北大学出版社

陕西省教育厅重点教材建设项目

高等数学

经管类

主 编/王群智 于大光
副主编/李花妮 徐小玲
黄小平 王平安



西北大学出版社
NORTHWEST UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:经管类/王群智,于大光主编.—西安:西北大学出版社,2014.7

ISBN 978-7-5604-3401-8

I. ①高... II. ①王... ②于... III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第165352号

高等数学(经管类)		主 编	王群智 于大光
出版发行	西北大学出版社	社 址	西安市太白北路229号
电 话	029-88303042	邮政编码	710069
经 销	新华书店	印 刷	西安华新彩印有限公司
版 次	2014年8月第1版	印 次	2014年8月第1次印刷
开 本	787毫米×1092毫米 1/16	印 张	21
字 数	510千字	印 数	1—5000
书 号	ISBN 978-7-5604-3401-8	定 价	38.00元

前言

随着陕西省独立学院的不断发展和教学改革的逐渐深入,针对应用型本科学生的特点,我们在总结教学实践经验的基础上,完成了本书的编写工作.本书编写过程中注意了以下几点:

一、在内容的选择和处理上力求做到取材合理,难度适中,既不失其理论科学性,又充分照顾到经管类应用型本科学生的接受能力.比如极限概念的处理.极限是高等数学最基本的工具,但极限的严格定义(即“ $\varepsilon-N$ ”与“ $\varepsilon-\delta$ ”定义)是经管类应用型本科学生学习的难点,本教材在数列极限定义中介绍了极限的严格定义(“ $\varepsilon-N$ ”定义),并且为了使學生能充分认识极限的严格定义的作用,用此定义证明了一个收敛数列的性质.而对于函数极限则简单地用描述性定义来叙述,将严格定义(“ $\varepsilon-\delta$ ”定义)作为选学内容以楷体字形式出现,接着引入无穷小量,以后的定理和性质都不再用极限的严格定义,而是用无穷小量加以证明.

二、作为本科层次的应用型经管类高等数学教材,其内容含盖了经管类高等数学本科教学大纲的所有内容,但考虑到应用型本科人才的培养目标和学生水平的差异,在确保基础理论系统性的同时,对有些理论性较强的内容进行了灵活处理.比如,书中的定理与性质除有些超出学生知识范围的外,大部分都予以证明,但考虑到应用型经管类学生接受能力及各教材使用院校学生水平的差异,对有些较复杂的证明作为选学内容以楷体字的形式出现.本书充分照顾到所述内容间的相互联系和发展规律,对所有的公式、图形、表格都予以编号,使得各章节内容结构严谨,前后呼应,联系紧密,系统完整.

三、从经管类应用型本科人才培养目标出发,本着易教、好学、够用、实用的原则,合理安排理论内容,突出应用性.比如,微元法是高等数学应用中重要的分析方法,体现了微积分的基本思想,作为本科生是必须了解和掌握的.但对于经管类应用型本科学生,如果也像其他本科学生那样每解一题都要找出微元再计算,的确勉为其难.本书首先介绍了微元法的基本思想,并用微元法导出了求平面图形面积和某些立体的体积公式,然后要求学生解题时会套用这些公式即可.再比如,本书在介绍多元函数求条件极值的有效方法——拉格朗日乘数法时,略去了拉格朗日乘数法繁琐的理论推导过程,而着重介绍如何应用拉格朗日乘数法解决实际问题.

四、在例题的数量和题型上较其他本科教材稍多,且某些例题加入了解题思路的分析、引导.这主要是考虑到应用型本科的特点,使学生在做习题时有相应的例题可以参考,达到先模仿,后创造,逐步提高的目的.本书习题分A、B

两部分,其中A类题为基本计算题,题型和题目较多,作为普通学生必须熟练掌握;B类题属于有一定难度的提高题,是为学有余力的学生配备的,但考虑到经管类应用型本科学生的实际状况,绝大部分B类题都在书后习题答案中配有简单的提示,这样既保证了对教学基本要求的巩固,又兼顾了学有余力的同学进一步提高的需要。

五、为了使内容更加符合人们认识事物的客观规律和更加具有启发性,书中的定义、定理尽可能用实例引入。比如函数、极限、连续、导数、积分、级数、微分方程等概念均以实例过渡到一般性定义;再比如求极限的重要方法——罗比塔法则,并不是像其他本科教材那样一上来就介绍定理,然后是定理证明和例题,而是先由一个求极限的实例引入,对未定式先应用柯西中值定理以后再求极限,相当于对未定式的分子、分母分别求导后再取极限,而这种求极限的方法具有一般性,这就是罗比塔法则。

六、有针对性地配有三个附录。附录I为“数学与经济”,阐述了数学对经管类专业的重要性,使学生认识到经管类专业学习数学的必要性,激发同学学习数学的兴趣与热情。考虑到应用型本科学生底子薄、基础差的特点,在附录II中录入了初等数学中常用的代数、几何、三角公式。考虑到当前高中阶段不学极坐标,而二重积分中又必须要用极坐标的实际状况,附录III介绍了极坐标的相关知识和极坐标中的几种常用曲线。

去掉标有“*”和部分楷体字排版的选学内容,本教材约需144学时,适合于128~160计划学时类型的院校使用。

参加本书编写的有:西安工业大学北方信息工程学院李花妮(第1,2章),延安大学创新学院徐小玲(第3,4,9章),西安科技大学高新学院黄小平(第5,6,10章),西京学院王平安(第7章),西安交通大学城市学院王群智(第8章,附录I,II,III)及于大光(第11章)。全书由王群智、于大光总纂定稿。

在编写过程中,我们得到陕西省教育厅高教处及西安市独立学院协作组的指导,得到西安交通大学城市学院的大力支持和资助,西安交通大学城市学院数学教研室董福安、张世梅、蒋春梅、燕秀林、崔建华等老师在本书内容的取舍、习题的配置等方面提出了许多宝贵意见,在此,对他们一并表示衷心感谢。

囿于编者水平,加之时间仓促,书中难免缺点和纰漏,恳请教师同仁及广大读者批评指正,俟再版时更臻完善。

编 者

2014.6

第1章 实数与函数

1.1 预备知识	/1
1.1.1 实数及其几何表示(1)	1.1.2 实数的绝对值及其基本性质(1)
1.1.3 区间与邻域(3)	
1.2 函数的概念	/4
1.2.1 常量与变量(4)	1.2.2 函数的定义(4)
1.2.3 确定函数的两个要素(5)	1.2.4 函数的表示方法(6)
1.3 函数的几何特性	/8
1.3.1 单调性(8)	1.3.2 有界性(8)
1.3.3 奇偶性(9)	1.3.4 周期性(10)
1.4 反函数	/10
1.5 复合函数	/12
1.6 初等函数	/13
1.6.1 基本初等函数(13)	1.6.2 初等函数(15)
1.7 几类常见的经济函数简介	/16
1.7.1 需求函数与供给函数(16)	1.7.2 总成本函数、总收入函数和总利润函数(17)
习题1	/19

第2章 极限与连续

2.1 数列的极限	/23
2.1.1 数列极限的定义(23)	2.1.2 收敛数列的性质(25)
2.2 函数的极限	/28
2.2.1 当 $x \rightarrow \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限(28)	2.2.2 当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限(29)
2.2.3 单侧极限(30)	2.2.4 函数极限的主要性质(31)
2.3 无穷小量与无穷大量	/32
2.3.1 无穷小量的概念与性质(32)	2.3.2 无穷小量的比较(33)
2.3.3 无穷大量(34)	2.3.4 无穷小量与无穷大量的关系(34)
2.4 极限的运算	/34
2.4.1 极限的运算法则(34)	2.4.2 复合函数的极限(38)

2.4.3 两个重要极限(38)	2.4.4 利用等价无穷小量求极限(43)
2.5 函数的连续性	/44
2.5.1 变量的改变量(44)	2.5.2 连续函数的概念(45)
2.5.3 函数的间断点(47)	2.5.4 初等函数的连续性(49)
2.5.5 闭区间上连续函数的性质(50)	
习题 2	/52

第 3 章 导数与微分

3.1 导数概念	/57
3.1.1 引例(57)	3.1.2 导数的定义(58)
3.1.3 可导性与连续性的关系(61)	3.1.4 几个基本初等函数的导数(62)
3.2 导数的四则运算法则	/64
3.3 反函数与复合函数的导数	/67
3.3.1 反函数的导数(67)	3.3.2 复合函数的导数(68)
3.4 隐函数的导数 对数求导法 高阶导数	/71
3.4.1 隐函数的导数(71)	3.4.2 对数求导法(73)
3.4.3 高阶导数(73)	
3.5 微分	/75
3.5.1 微分的概念(76)	3.5.2 微分的几何意义(77)
3.5.3 微分的运算法则(78)	3.5.4 微分在近似计算中的应用(79)
习题 3	/81

第 4 章 中值定理与导数的应用

4.1 中值定理	/86
4.1.1 罗尔定理(86)	4.1.2 拉格朗日中值定理(88)
4.1.3 柯西中值定理(92)	
4.2 罗比塔法则	/92
4.2.1 $\frac{0}{0}$ 型未定式(92)	4.2.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式(94)
4.2.3 其他类型的未定式(95)	
4.3 函数单调性判别法	/97
4.4 函数的极值与最值	/99
4.4.1 函数的极值及其求法(99)	4.4.2 函数的最值(103)
4.5 曲线的凸性、拐点与渐近线	/105
4.5.1 曲线的凸性与拐点(105)	4.5.2 曲线的渐近线(107)
4.6 函数图像的描绘	/108
4.7 导数在经济分析中的应用	/109

4.7.1 边际与边际分析(109)	4.7.2 弹性与弹性分析(112)
4.7.3 经济最优化分析(115)	
习题 4	/116

第 5 章 不定积分

5.1 不定积分的概念与性质	/121
5.1.1 原函数(121)	5.1.2 不定积分的概念(122)
5.1.3 不定积分的基本性质(123)	5.1.4 基本积分公式(124)
5.2 换元积分法	/126
5.2.1 第一类换元法(凑微分法)(126)	5.2.2 第二类换元法(变量代换法)(130)
5.2.3 基本积分公式的扩充(132)	
5.3 分部积分法	/133
习题 5	/136

第 6 章 定积分

6.1 定积分的概念	/139
6.1.1 引例(139)	6.1.2 定积分的定义(141)
6.1.3 定积分的几何意义(142)	
6.2 定积分的基本性质	/144
6.3 微积分基本定理	/146
6.3.1 积分上限函数及其导数(146)	6.3.2 微积分基本定理(148)
6.4 定积分的计算方法	/150
6.4.1 定积分的换元积分法(150)	6.4.2 定积分的分部积分法(152)
6.5 定积分的应用	/153
6.5.1 微元法(153)	6.5.2 平面图形的面积(154)
6.5.3 立体的体积(159)	6.5.4 定积分在经济方面的应用举例(162)
6.6 反常积分初步	/163
6.6.1 无穷限积分(163)	6.6.2 无界函数的积分(165)
习题 6	/167

第 7 章 无穷级数

7.1 常数项级数的概念与性质	/171
7.1.1 常数项级数的概念(171)	7.1.2 收敛级数的基本性质(174)
7.2 正项级数及其审敛法	/176
7.2.1 正项级数(176)	7.2.2 正项级数的审敛法(177)
7.3 任意项级数的审敛法	/182

7.3.1	交错级数及其审敛法(182)	7.3.2	绝对收敛与条件收敛(183)
7.4	幂级数		/185
7.4.1	函数项级数的概念(185)	7.4.2	幂级数及其收敛域(186)
7.4.3	幂级数的性质(189)		
7.5	函数的幂级数展开		/191
7.5.1	泰勒公式(191)	7.5.2	泰勒级数(193)
		7.5.3	某些初等函数的幂级数展开(194)
习题7			/197

第8章 多元函数的微分法及其应用

8.1	空间解析几何简介		/201
8.1.1	空间直角坐标系(201)	8.1.2	空间任意两点的距离(202)
8.1.3	曲面与方程(203)		
8.2	多元函数的基本概念		/208
8.2.1	平面点集与区域(208)	8.2.2	多元函数的定义(209)
8.2.3	二元函数的极限(211)	8.2.4	多元函数的连续(212)
8.3	偏导数与全微分		/213
8.3.1	偏导数(213)	8.3.2	高阶偏导数(216)
		8.3.3	全微分(218)
8.4	多元复合函数及隐函数的微分法		/221
8.4.1	多元复合函数的微分法(221)	8.4.2	隐函数的微分法(224)
8.5	多元函数的极值及其求法		/226
8.5.1	多元函数的极值(226)	8.5.2	多元函数的最值(227)
8.5.3	条件极值(228)		
习题8			/230

第9章 重积分

9.1	二重积分的概念与性质		/235
9.1.1	二重积分的概念(235)	9.1.2	二重积分的基本性质(237)
9.2	二重积分的计算		/238
9.2.1	直角坐标系下二重积分的计算(238)	9.2.2	极坐标系下二重积分的计算(244)
9.3	二重积分的应用		/247
习题9			/249

第10章 微分方程与差分方程初步

10.1	微分方程的基本概念		/252
------	-----------	--	------

10.2 一阶微分方程	/255
10.2.1 可分离变量的微分方程(255)	10.2.2 齐次方程 (256)
10.2.3 一阶线性微分方程(258)	
10.3 二阶常系数线性微分方程	/260
10.3.1 二阶常系数线性齐次方程(260)	10.3.2 二阶常系数线性非齐次方程(264)
10.4 差分及差分方程的基本概念	/268
10.4.1 差分的概念和性质(268)	10.4.2 差分方程的基本概念(270)
10.5 一阶常系数线性差分方程	/271
10.5.1 一阶常系数线性齐次差分方程(271)	10.5.2 一阶常系数线性非齐次差分方程 (272)
习题 10	/275

第 11 章 MATLAB 在高等数学中的应用简介

11.1 MATLAB 的运行方式	/279
11.2 常用函数与符号	/280
11.2.1 MATLAB 的语言规则(280)	11.2.2 MATLAB 变量与数(280)
11.2.3 数学运算符号及特殊字符(280)	11.2.4 基本数学函数(280)
11.3 MATLAB 在高等数学中的应用举例	/281
11.3.1 利用 MATLAB 绘制平面曲线、空间曲线和曲面 (281)	
11.3.2 利用 MATLAB 软件求极限、导数和积分 (287)	
11.3.3 用 MATLAB 求解级数的有关问题 (290)	
11.3.4 用 MATLAB 求解最值问题 (291)	
11.3.5 用 MATLAB 解微分方程 (292)	
11.3.6 一个实例 (目标跟踪问题) (293)	
11.4 用 MATLAB 解线性规划问题 (即线性函数极值求解) ...	/294
11.5 用 MATLAB 作曲线拟合	/296
习题 11	/298
附录 I 数学与经济	/300
附录 II 初等数学中的常用公式	/302
附录 III 极坐标及几种常见的曲线	/306
参考答案	/309
参考文献	/324

第1章 实数与函数

初等数学的研究对象主要是常量，而高等数学则以变量为其主要研究对象。反映各变量之间相互依赖关系的函数是高等数学最重要的基本概念之一。高等数学中对函数的研究主要是在实数范围内进行的。本章在学习与实数有关的基本知识的基础上，进一步介绍函数的概念、性质、初等函数和常见的经济函数。

1.1 预备知识

1.1.1 实数及其几何表示

人类最早知道的数是**正整数**：1, 2, 3, ...。全体正整数通常用 $\mathbf{N}$ 表示。由于做加法逆运算的需要，人们又增添了零和负整数，从而将正整数扩充为一般**整数**。通常用 $\mathbf{Z}$ 表示全体整数。乘法的逆运算又导致了分数的产生，而分数又称为**有理数**。通常用 $\mathbf{Q}$ 表示全体有理数。也就是说，任何有理数都可以写成 $\frac{p}{q}$ 的形式（其中 $p, q \in \mathbf{Z}$ ，且 $q \neq 0$ ）。

公元前 500 年，古希腊人发现等腰直角三角形的腰与斜边没有公度^①，从而证明了 $\sqrt{2}$ 不是有理数。这样，人类首次知道了无理数的存在。后来人们又发现了更多的无理数，如 $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{5}$ ，...，以及 π 与 e 等。我们知道，有理数又可以表示成有限小数或无限循环小数。因此，可以认为**无理数**是无限不循环小数。

有理数与无理数统称为**实数**，通常用 $\mathbf{R}$ 表示全体实数。

笛卡尔^②引入了坐标的概念，把实数集合与一条直线上的点集合建立了一一对应的关系。正像中学所学过的，我们把规定了原点、方向和单位长度的直线称为**数轴**。引入数轴概念以后，数轴上的任何点都可以看作一个实数；反之，实数也可以看作数轴上的一个点。所以，我们常常把实数集合 $\mathbf{R}$ 与数轴等同，把实数与数轴上的点等同，并把实数 a 称为点 a 。

数轴上表示有理数的点称为**有理点**，表示无理数的点称为**无理点**。有理点具有稠密性，即数轴上任意两个有理点之间一定存在无穷多个有理点；同样，无理点也具有稠密性。

1.1.2 实数的绝对值及其基本性质

定义 1.1 设 x 为一实数，则 x 的**绝对值**定义为

① 古希腊有个毕达哥拉斯学派，他们认为任意两条直线段都有公度，亦即对于任意给定的长度分别为 a 与 b 的线段，总存在一条长度为 d 的线段，使得 $a=md$ ， $b=nd$ ，其中 m, n 均为正整数。

② 笛卡尔 (Descartes, 1596—1650)，法国数学家，解析几何的创立者之一，他在推动微积分的早期发展及现代数学方面均有很大影响。

$$|x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

x 的绝对值 $|x|$ 在数轴上表示点 x 与原点 O 的距离, 若 y 为任意实数, 则点 y 与点 x 间的距离可用数 $y-x$ 或 $x-y$ 的绝对值来表示

$$|y-x| = |x-y| = \begin{cases} x-y & y < x \\ y-x & y \geq x \end{cases}$$

绝对值有以下基本性质:

设 x, y 为任意实数, 实数 $a > 0$, 则

1. $|x| \geq 0$
2. $|-x| = |x|$
3. $|x| = \sqrt{x^2}$
4. $-|x| \leq x \leq |x|$
5. $|x| \leq a$ 的充分必要条件是 $-a \leq x \leq a$
6. $|x| \geq a$ 的充分必要条件是 $x \leq -a$ 或 $x \geq a$
7. $|x \pm y| \leq |x| + |y|$
8. $||x| - |y|| \leq |x - y|$
9. $|xy| = |x| \cdot |y|$
10. $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$

这里仅证性质 7 和 8, 其余性质可由定义 1.1 很容易证得, 把它们留给读者作为练习.

证 (性质 7) 在此仅就 $|x+y| \leq |x| + |y|$ 来证明. 由性质 4 有

$$-|x| \leq x \leq |x|, \quad -|y| \leq y \leq |y|$$

两式对应项相加, 可得

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

再由性质 5 即得

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

证 (性质 8) 由性质 7, 有

$$|x| = |(x-y) + y| \leq |x-y| + |y|$$

因此

$$|x| - |y| \leq |x-y|$$

将上式中 x 与 y 的位置互换可得

$$|y| - |x| \leq |y-x|$$

即

$$|x| - |y| \geq -|x-y|$$

从而可得

$$-|x-y| \leq |x| - |y| \leq |x-y|$$

即

$$||x| - |y|| \leq |x-y|$$

1.1.3 区间与邻域

设 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a < b$. 根据变量 x 取值范围的不同, 表 1.1 给出了各种区间的名称、符号、意义及区间在数轴上的几何表示.

表 1.1 中, 实数 a 与 b 分别叫做区间的**左端点**和**右端点**, 右端点与左端点的差 $b-a$ 叫做区间的**长度**; 长度有限的区间叫做**有限区间**, 长度无限的区间叫做**无限区间**; 数轴上的实点记号 “•” 表示该区间包含端点, 空点记号 “○” 表示该区间不包含端点.

今后当讨论的问题与是否包含区间端点无关, 或与区间是否有限无关时, 通常以 “区间 (a, b) ”, 或用一字母, 如 “区间 I ” 来表示各种区间, 而并不一定仅指开区间.

表 1.1

	名称	符号	意义	几何表示
有限区间	开区间	(a, b)	$a < x < b$	
	闭区间	$[a, b]$	$a \leq x \leq b$	
	半开区间	$(a, b]$	$a < x \leq b$	
	半开区间	$[a, b)$	$a \leq x < b$	
无限区间	开区间	$(a, +\infty)$	$a < x < +\infty$	
	开区间	$(-\infty, b)$	$-\infty < x < b$	
	半开区间	$[a, +\infty)$	$a \leq x < +\infty$	
	半开区间	$(-\infty, b]$	$-\infty < x \leq b$	
	开区间	$(-\infty, +\infty)$	$-\infty < x < +\infty$	
邻域	x_0 的 δ 邻域	$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$	$ x - x_0 < \delta$	
	去心邻域	$(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$	$0 < x - x_0 < \delta$	

以后我们还会经常遇到一种以某点为中心的特殊的开区间, 称为点的**邻域**. 确切地说, 设 $x_0, \delta \in \mathbf{R}$, 且 $\delta > 0$, 则称满足不等式 $|x - x_0| < \delta$ 的实数 x 的全体称为点 x_0 的 δ 邻域, 记作 $U(x_0, \delta)$, 即

$$U(x_0, \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$$

其中 x_0 称为该邻域的**中心**, δ 称为该邻域的**半径**.

由不等式 $|x - x_0| < \delta$ 易知, 邻域 $U(x_0, \delta)$ 是以 x_0 为中心, 以 2δ 为长度的开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

有时还会遇到把中心 x_0 去掉的邻域, 这种邻域叫做**去心邻域**. 确切地说, 设 $x_0, \delta \in \mathbf{R}$, 且 $\delta > 0$, 则满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的实数 x 的全体, 称为点 x_0 的去心的 δ 邻域, 记作

$\mathring{U}(x_0, \delta)$, 即

$$\mathring{U}(x_0, \delta) = \{x | 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

易知 $\mathring{U}(x_0, \delta)$ 写成区间形式为

$$(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$$

例如点 2 的 0.01 邻域就是满足不等式 $|x - 2| < 0.01$ 的实数 x 的全体, 即 $1.99 < x < 2.01$, 亦即开区间 $(1.99, 2.01)$, 它表示点 2 的邻近不超过 ± 0.01 的范围, 而点 -2 的去心的 0.01 邻域则指满足不等式 $0 < |x + 2| < 0.01$ 的实数 x 的全体, 亦即开区间 $(-2.01, -2) \cup (-2, -1.99)$.

值得一提的是, 邻域的半径虽然没有规定其大小, 但它一般总是取很小的正数, 如果无需指明邻域的大小, 则用 $U(x_0)$ 与 $\mathring{U}(x_0)$ 分别表示 x_0 的邻域与去心邻域.

1.2 函数的概念

1.2.1 常量与变量

人们在观察自然现象和社会现象的过程中, 经常会遇到各种不同的量, 其中有的量在过程中保持不变, 只取某个固定的数值, 这种量叫做**常量**; 还有一种量在过程中不断变化, 可以取不同的数值, 这种量叫做**变量**. 比如商店在一天的营业活动中, 各种商品的价格一般为常量, 而销售量、营业额和商品库存量等均为变量.

一个量是常量还是变量, 要辩证地看, 要具体问题具体分析. 例如, 由于气温的变化会引起机器上的轴热胀冷缩. 当气温变化引起轴的变化不大时, 如果在一般机器(比如自行车)上, 通常把轴长看作常量; 如果在精密仪器上, 尽管轴长变化不大, 但也会影响机器的精密程度, 这时就应该把轴长看作变量. 再如重力加速度 g , 在地球的纬度变化不大时可看作常量, 在纬度变化较大时则应看作变量.

通常用字母 $a, b, c, \dots$ 表示常量, 用字母 $x, y, t, \dots$ 表示变量.

如果将变量看作是在一非空数集中任意取值的量, 则常量可看作是在单元素集合中取值的变量. 从这个意义上讲, 常量可以看作变量的特例.

1.2.2 函数的定义

在研究同一事物或现象的过程中, 涉及的变量往往不止一个, 这几个变量并不是孤立地变化, 而是彼此联系并遵循着一定的变化规律. 这种变量之间的相互依赖关系就是数学上要讨论的函数关系.

例 1 圆的面积 S 与半径 R 有着确定的依赖关系: $S = \pi R^2$, 即对于 $(0, +\infty)$ 内任意一个确定的值 R (即半径), 按照把半径平方再乘以 π 的运算方法, 便确定了相应的圆的面积 S .

例 2 某化肥厂生产某种化肥 1000 吨, 售价 800 元/吨. 如果一次销售量不超过 700 吨, 则按此价格出售; 如果销售量超过 700 吨, 则对超出部分打 9 折出售. 此时销售总收入 y (元)

与销售量 x (吨) 之间的关系可表示为

$$y = \begin{cases} 800x & 0 < x \leq 700 \\ 800 \times 700 + 800 \times 0.9 \times (x - 700) & 700 < x \leq 1000 \end{cases}$$

当 x 在 $(0, 1000]$ 内任意取定一个数值时, 由此关系式便可确定出 y 的相应的值.

例 3 设表 1.2 提供了某公司产品 1996—2005 年各年度的产量资料,

表 1.2

单位: 吨

年份 T	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
产量 Q	500	650	900	1075	1420	1745	3430	4235	5800	9265

则对 1996—2005 年期间任一年份 T , 按照表 1.2 都能确定当年产量 Q 的值.

从上面的例子中可以看出, 尽管各例中所涉及问题的背景不同, 反映变量之间相互联系的表达式不同, 但它们却有着相同的本质, 即在某个变化过程中的两个变量是相互联系的, 其中一个变量的变化将会引起另一个变量的变化. 变量之间的这种相互依赖关系抽象出来就是函数的概念.

定义 1.2 设有变量 x 与 y . D 是一个给定的实数集合. 如果对于每一个数 $x \in D$, 变量 y 按照一定的法则 (或对应规则) f , 总有唯一确定的值与之对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作 $y = f(x)$. 其中 x 叫做自变量, y 叫做因变量, 实数集 D 称为函数的定义域, 记作 $D(f)$.

对于 $x_0 \in D(f)$ 所对应的 y 的数值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值, 记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 当 x 取遍 $D(f)$ 的各个数值时, 对应的函数值的全体组成的集合称为函数 $f(x)$ 的值域, 记作 $R(f)$, 即

$$R(f) = \{y | y = f(x), x \in D(f)\}$$

函数 $f(x)$ 中的 f 反映自变量与因变量的对应法则. 对应法则也可改用其他字母表示, 如 g, h, φ, F 等, 那么函数也就可相应地记作 $g(x), h(x), \varphi(x), F(x)$ 等. 但要强调的是, 同一问题中的同一函数不能用不同的字母表示其对应法则, 比如在同一问题中, $f(x)$ 与 $g(x)$ 表示的一定是两个不同的函数.

有时为简化符号, 也将函数关系记作 $y = y(x)$, 此时等式左边的 y 表示因变量, 右边的 y 表示对应法则.

1.2.3 确定函数的两个要素

由定义 1.2 可知, 函数 $y = f(x)$ 是由定义域与对应法则所确定的. 定义域与对应法则完全相同的函数, 本质上是同一函数, 至于同一函数中自变量与因变量用什么字母表示是无关紧要的, 所以定义域与对应法则是确定函数的两个要素.

例 4 判定下列各组函数是否相同.

(1) $f(x) = x$ 与 $g(x) = \sqrt{x^2}$

(2) $f(x) = x + 2$ 与 $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

(3) $f(x)=x$ 与 $g(x)=x(\sin^2x+\cos^2x)$

解 (1) 由于 $g(x)=\sqrt{x^2}=\begin{cases} -x & x<0 \\ x & x\geq 0 \end{cases}$, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的对应关系不同, 所以, 这两个函数不相同.

(2) 由于 $D(f)=(-\infty, +\infty)$, $D(g)=(-\infty, 2)\cup(2, +\infty)$, 两个函数的定义域不相同, 所以, 这两个函数不相同.

(3) 由于 $\sin^2x+\cos^2x=1$, 这两个函数的定义域与对应法则都相同, 所以是同一函数.

定义域既然是自变量允许取值的范围, 那么当所讨论的问题具有某种实际意义时, 就要根据实际问题来确定定义域. 例如, 例 1 的定义域为 $0<R<+\infty$, 例 3 中年份 T 只能取 1996~2005 中的正整数.

对于那些不代表任何实际意义, 仅由解析表达式表示的函数, 其定义域应指使该解析表达式有意义的自变量的取值范围, 这种定义域也称为函数的**自然定义域**. 求这种自然定义域时, 必须掌握一些常用的函数表达式有意义的条件. 例如, 负数不能开偶次方; 分式的分母不能为零; 对数的真数必须为正数; 反正(余)弦函数符号下的式子的绝对值不能大于 1; 等等.

例 5 求函数 $f(x)=\sqrt{2+x}+\frac{1}{\lg(1+x)}$ 的定义域.

解 要使函数有意义, 必须使

$$\begin{cases} 2+x\geq 0 \\ 1+x>0 \\ 1+x\neq 1 \end{cases} \quad \text{得} \quad \begin{cases} x\geq -2 \\ x> -1 \\ x\neq 0 \end{cases}$$

由此可得函数的定义域为 $D(f)=(-1, 0)\cup(0, +\infty)$

例 6 求函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-x-6}}+\arcsin\frac{2x-1}{7}$ 的定义域.

解 要使函数有意义, 必须使

$$\begin{cases} x^2-x-6>0 \\ \left|\frac{2x-1}{7}\right|\leq 1 \end{cases} \quad \text{得} \quad \begin{cases} x>3 \text{ 或 } x<-2 \\ -3\leq x\leq 4 \end{cases}$$

由此可得函数的定义域为 $D(f)=[-3, -2)\cup(3, 4]$ (图 1-1).

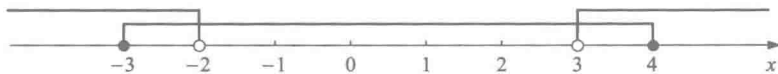


图 1-1

1.2.4 函数的表示方法

函数的表示方法通常有三种, 即图示法、表格法和公式法.

图示法是用坐标平面上的曲线表示纵坐标 y 是横坐标 x 的函数的方法. 例如, 通过自动测温记录仪画出一昼夜的温度变化曲线, 它表示了气温 T 与时间 t 的函数关系. 这条曲线也称为函数 $T=f(t)$ 的图像(图 1-2). 这种表示法的最大特点是明显、直观、便于分析.

表格法是用一系列自变量的值与对应的函数值列成表格表示函数的方法. 例如, 例 3 表

示函数的方法就是表格法, 数学工具书中的对数表、三角函数表等也都是用表格法表示函数. 用这种方法表示函数, 优点是方便、省时, 而且可以表示那些难以知道表达式的函数; 缺点是往往因为表格所列数据不全, 不便于进行理论研究.

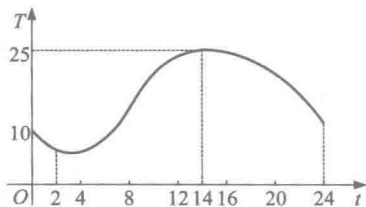


图 1-2

公式法是用数学公式的形式表示函数与自变量关系

的方法. 例如, 例 1 和例 2 就是用公式法表示的函数. 这种表示方法清晰、准确, 便于进行理论分析, 是最常用的函数表示方法.

在此必须指出的是, 用公式法表示函数时, 有时会遇到一个函数在其定义域的不同范围内要用不同的解析式来表示的情形(如例 2). 这种在函数定义域内用多个解析表达式表示的函数称为**分段函数**.

对分段函数, 应注意以下问题:

(1) 绝对不能因为分段函数在不同的区间段内由不同的表达式表示, 而误认为是几个函数. 不论一个分段函数的表达式有几个, 它总归是一个函数.

(2) 在求分段函数的函数值时, 要注意自变量所在的区间, 自变量在哪个区间取值, 就要用该区间所对应的表达式来计算其函数值.

(3) 分段函数的定义域是函数各分段区间的并集.

例 7 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & |x| < 1 \\ x^2 - 1 & 1 < |x| \leq 2 \end{cases}$

(1) 在 $x=1$ 处函数是否有定义? 为什么?

(2) 求 $f(x)$ 的定义域, 并找出其分段点.

(3) 求 $f(-2)$, $f(0)$, $f\left(\frac{3}{2}\right)$.

(4) 画出函数 $f(x)$ 的图像.

解 (1) 由于 $x=1$ 不在函数 $f(x)$ 的定义域内, 所以函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处没有定义.

(2) 由于分段函数的定义域是各分段区间的并集, 故函数 $f(x)$ 的定义域为

$$D(f) = [-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 2]$$

分段点为 $x=-1$ 与 $x=1$.

(3) 由于 $x=-2$ 在区间 $[-2, -1)$ 上, 所以函数值应由表达式 $f(x) = x^2 - 1$ 确定, 因此

$$f(-2) = (-2)^2 - 1 = 3$$

由于 $x=0$ 在区间 $(-1, 1)$ 内, 所以函数值由 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ 确定, 因此

$$f(0) = \sqrt{1-0^2} = 1$$

由于 $x=\frac{3}{2}$ 在区间 $(1, 2]$ 内, 所以函数值由 $f(x) = x^2 - 1$ 确定, 因此

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1 = \frac{5}{4}$$

(4) 函数的图像如图 1-3 所示.

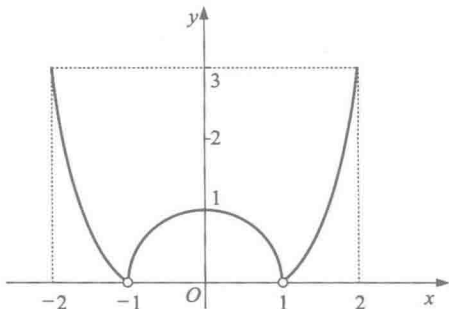


图 1-3