

非齐次分布生物动力系统

李成林 何 斌 著



科学出版社

非齐次分布生物动力系统

李成林 何 斌 著



科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书着重介绍非齐次分布生物动力系统的最新研究成果和研究方法,共6章,主要包括交叉反应扩散种群模型、具有保护带的非齐次分布种群模型、非齐次分布脉冲种群模型和非齐次分布时滞种群模型等。

本书可供高等院校数学、生态学等相关专业的高年级本科生、研究生、教师以及有关科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

非齐次分布生物动力系统/李成林,何斌著. —北京:科学出版社,2015.7
ISBN 978-7-03-045256-6

I. ①非… II. ①李… ②何… III. ①动物生态学—研究 IV. ①Q958.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 172264 号

责任编辑:昌盛 周金权 / 责任校对:蒋 萍

责任印制:徐晓晨 / 封面设计:陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京教图印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016年1月第 一 版 开本:720×1000 B5

2016年1月第一次印刷 印张:13 5/8

字数:264 000

定价:49.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

生物数学是生命科学与数学之间的交叉学科,早在 1974 年就被联合国科教文组织在学科分类中列为一级学科. 从 20 世纪 80 年代开始,国内对生物数学产生兴趣的人越来越多. 从事这方面研究、学习的人已居世界各国之首. 已有很多学者在这方面出版了专著或教材,然而,生物动力系统作为生物数学的一个主要分支,在非齐次分布动力系统方面的教材和书籍还不多见. 为加强交流和丰富生物动力系统的内容,作者编写了本书.

传统的生物动力系统是在假定空间资源的分布为齐次的基础上建立的,但空间资源的分布总是非齐次的,因此,传统的生物动力系统是一种理想状态下的模型. 为反映更准确的实际情况,生物数学家提出了非齐次分布生物动力系统.

本书主要介绍非齐次分布生物动力系统的最新研究成果及研究方法,其中部分内容是作者近期的研究成果. 书中所涉及的模型有交叉反应扩散模型、具有保护带的非齐次分布种群模型、非齐次分布脉冲种群模型和非齐次分布时滞种群模型等. 研究内容包括解的存在性、稳定性和分岔等,作者力图用模型研究得到的结论去揭示其生物意义. 为方便读者理解,每一节前尽量先介绍后面讨论所用到的偏微分知识. 本书的出版得到红河学院数学学院的大力支持,在此表示感谢.

由于作者水平有限,书中难免有疏漏之处,恳切希望得到广大读者的批评和指正.

作 者

2014 年 7 月

目 录

前言

第 1 章 绪论	1
1.1 引言	1
1.2 生态背景知识	2
1.2.1 种群概念、基本特征及增长方式	2
1.2.2 捕食与被捕食	5
1.2.3 种群扩散	5
1.3 捕食模型介绍	6
第 2 章 交叉反应扩散种群系统解的存在性	10
2.1 一般交叉反应扩散捕食系统古典解的存在性	10
2.1.1 一维空间中 Gagliardo-Nirenberg 不等式	11
2.1.2 解的全局存在性	12
2.1.3 解的全局渐近稳定性	20
2.2 具有食饵趋向的种群食物链系统古典解的存在性	21
2.2.1 一类非线性抛物方程解的局部存在性	23
2.2.2 解的局部存在性	23
2.2.3 解的全局存在性	25
2.3 具有食饵趋向的非齐次分布捕食系统弱解的存在唯一性	28
2.3.1 不动点方法	29
2.3.2 弱解的存在性	34
2.3.3 弱解的唯一性	36
第 3 章 非齐次分布种群系统解的定性分析	39
3.1 作用系数适中的非齐次分布捕食系统	39
3.1.1 平衡点的稳定性	40
3.1.2 正平衡点处的 Hopf 分支	44
3.1.3 正解的先验上下界估计	44
3.1.4 非常数定态解的存在性	46
3.2 作用系数很强的非齐次分布捕食系统	49
3.2.1 最大值原理	50
3.2.2 非常数定态解的不存在性	52

3.2.3 全局分支	64
3.3 一般交叉反应扩散捕食系统	66
3.3.1 平衡点的稳定性	67
3.3.2 解的先验估计	69
3.3.3 非常数定态解的存在性	72
3.4 Leslie 交叉反应扩散捕食系统	77
3.4.1 常数正解的存在性和稳定性	79
3.4.2 解的上下界估计	80
3.4.3 非常数定态解的存在性	83
3.4.4 非常数定态解的不存在性	87
3.5 具有非单调反应函数的交叉反应扩散捕食系统	90
3.5.1 正解的上下界估计	90
3.5.2 非常数正解的存在性	92
3.5.3 渐近极限和奇性摄动法	97
3.6 具有保护带的非齐次分布捕食系统	102
3.6.1 分岔	104
3.6.2 大的保护带情况	110
3.6.3 小保护带情况	121
3.6.4 生态意义	124
3.7 具有保护带的交叉反应扩散捕食系统	125
3.7.1 正解的先验估计	126
3.7.2 半零解处的局部分支	128
3.7.3 全局分支	130
第4章 非齐次分布脉冲种群系统	142
4.1 扇形算子与分数幂	143
4.2 持续生存	144
4.3 周期解	149
4.4 生态意义	151
第5章 非齐次分布时滞种群系统	153
5.1 非齐次分布常数时滞种群系统	153
5.1.1 解的有界性、存在性和唯一性	154
5.1.2 非负常数平衡点的稳定性	158
5.1.3 共存态的渐近稳定性	161
5.1.4 常数平衡点的全局稳定性	166
5.1.5 生态意义	172

5.2 非齐次分布非局部时滞种群系统	172
5.2.1 全局收敛性	174
5.2.2 生态意义	185
第 6 章 非齐次分布种群系统的行波解	186
6.1 具有非局部时滞的非齐次分布种群系统的行波解	190
6.2 具有分布时滞的非齐次分布种群模型的行波解	195
6.2.1 定理 6.2.1 的证明	196
6.2.2 应用举例	201
参考文献	204

第 1 章 绪 论

1.1 引 言

生态系统是一个许多不同物种相互依赖、相互作用、相互制约的有机体系统,其内部不同的物种共同维系着生态系统的结构和功能.通常地,物种越丰富,生态系统就越稳定,人类赖以生存的环境就越易得到保护.捕食是生态系统中最常见的现象,捕食动物与被捕食动物之间的关系,对生态系统的平衡是非常重要的.这些物种间的平衡一旦被打破,就有可能使整个生态系统的平衡遭受破坏.因此捕食现象是种群生态学研究的重点课题之一.通过研究这一现象,人们能更好地了解种群间捕食的相互作用规律,进一步为物种的保护和维护生态平衡提供必要的知识基础.显然,只从定性上来分析研究是不能满足客观实际的知识需求,从定性研究发展到定量研究是现实客观的要求,只有充分地应用数学工具才能得到更深入的定量研究.

在 20 世纪 20 年代初, Lotka 和 Volterra 几乎同时用微分方程来建立种群间相互作用的数学模型,通过研究数学模型,得到种群的动力学行为.此后,种群模型的研究如雨后春笋般发展起来,而且得到很多既实用又有说服力的结果.通过建立数学模型来研究种群捕食的动力学行为,从中可把握到捕食现象的机理(如两物种共存的条件,两物种生存的现状以及未来的发展趋势等),从而为人们更好地保护种群提供必要的理论基础和依据.在没有扩散的情况下,捕食现象可通过建立常微分方程模型来研究这两种群间的动态规律,已有很多研究种群的成果是用常微分方程来研究的,如系统的稳定性、分岔、极限环的存在性、周期解等.空间资源分布总是非齐次的,为了更多地获取生存资源(以便能更好地生存)及寻找更多的交配机会等,种群总是从自身密度高的地方朝向密度低的地方运动,因此,捕食过程往往伴随着种群的自由扩散过程,很多具有自由扩散的捕食系统(偏微分方程)已建立,并有很多的研究成果,如全局解的存在唯一性、平衡点的稳定性和分岔、非常数平衡点的存在性等.在捕食过程中,两种群除自由扩散外,还有自扩散及交叉扩散,自扩散是由同一物种内部的压力产生的,交叉扩散是由种外的物种吸引或驱散排斥产生的.一般地,食物越丰富,越能吸引捕食者捕食,相反地,捕食者密度越大,食饵逃避的速度就越快. A. Okubo 指出捕食者在捕食过程中的速度变化和运动方向的改变常常取决于食饵的梯度(从而产生交叉扩散),且这一假定在后来得到进一步的测定证实. A. Okubo 在《扩散和生态问题》一书中提出了一般交叉反应扩散捕

食模型.

这类模型的研究是当今国内外种群研究的热点问题之一,仍有许多问题没有解决.例如,就一般交叉反应扩散捕食模型而言,若不加限制条件,解的存在性问题仍未得到证明.现在研究的内容包括全局解的存在性,非负常数定态解的稳定性与分岔,以及非常数定态解的存在性等.对于交叉反应扩散系统,全局解的存在性证明是个难点问题.现只有少数交叉反应扩散方程全局解的存在性得到证明,而且都有很强的限制条件(如某些系数为零).一般交叉反应扩散捕食系统稳定性及分岔研究也不多见(其中一个原因是很多交叉反应扩散系统全局解的存在性未证明),对于非常数定态解的研究虽有些成果,但仍有许多交叉反应扩散捕食系统可研究.

利用不动点原理、Hölder 连续、Schauder 估计、 L_p 估计、上下解方法及一些重要的不等式(如 Gagliardo-Nirenberg 不等式)等理论和方法可以证明部分交叉反应扩散捕食系统解的全局存在性.常数解的稳定性研究分为局部稳定性研究和全局稳定性的研究,局部稳定性研究可利用特征值的方法来考察,全局稳定性研究可利用构造 Lyapunov 函数方法证明.对于反应扩散捕食系统的分岔研究,通常是利用经典的分支理论来讨论的.非常数定态解的存在性也可利用度理论来证明.

对于这一课题的研究能使人们在理论上了解:①种群数量变化的规律;②种群内种群间存在的复杂生态共系;③种群共存的条件和种群生存状态;④种群的发展和进化等问题.同时它有深远的实践意义,它直接与农业、渔业和林业生产、森林管理、病虫害防治、珍稀动物保护等关系到人类自身生存的问题相关联.

1.2 生态背景知识

后面所讨论的模型皆为非齐次分布种群动力系统,这些模型涉及一些生态背景知识.为方便阅读,本节参阅文献[1~3]后给出了以下相关的生态背景知识.

1.2.1 种群概念、基本特征及增长方式

种群是在特定空间和一定时间内生活和繁殖的同种个体的总和.种群虽是由同种个体组成的,但种群与环境之间、种群内个体与个体之间不是孤立的,也不是简单的个体相加,而是通过一种种内关系组成的一个有机整体,这一有机体表现出该种生物体的某些特殊的生态规律性.种群内个体的生物特征主要体现在出生、生长、发育、衰老及死亡等方面.而种群则具有出生率、死亡率等数量特征.这是种群内个体所没有的,而组成种群后才出现的新特征.种群间的关系是一种相互依存和相互制约的关系.

一般地,种群有空间、数量和遗传三个基本特征,下面只介绍空间和数量特征.

1. 空间特征

种群中的每个个体都需要一定的空间来生存与繁殖. 在这个空间中, 要有供种群个体生存所需的食物和各种营养物质, 并能使个体与环境进行物质和能量交换. 不同种群的个体对空间的要求各不同. 体型大的生物所需的生存空间也较大, 如东北虎活动范围为 $300 \sim 600 \text{ km}^2$. 小型生物所需要生存空间较小. 根据食物链和营养级的理论很容易理解这一点. 当某个生物个体生长或某个种群数量增加时, 每个生物个体所占有的空间就会越来越少, 种群数量的增加速度就会减小, 随之产生了有机个体的争夺和种群扩散.

2. 数量特征

种群密度可用两种方法来表示. 一种是用单位面积(体积)内的个体数量来表示; 另一种是用单位面积(体积)内个体的鲜重或干重来表示.

出生率是指单位时间内每个个体的新生个体数或单位时间内产生的新个体数. 事实上, 出生率一词具有较为广泛的意义, 它描述的是生物个体产生新个体的情况, 不论这些新个体是生育的、孵化的, 还是出芽的或分裂的等. 最大出生率(有时也称为生理或绝对出生率)是指在理想的条件下(即无任何生态限制因子, 如食物充足、温度适中等, 繁殖只受生理因素限制)产生新个体的最大产量, 对某一特定种群, 它是一特定常数. 生态出生率或实际出生率, 表示的是种群在某个真实的或一定的环境条件下新个体的增长率; 它对种群来说, 是可改变的, 是随种群的组成、大小和物理环境条件等而变化的.

死亡率是用来描述种群个体死亡的. 与出生率有某些相互平行的概念, 但意义相反. 死亡率可以用一定时间中死亡的个体数(即单位时间死亡数)来表示, 也可以用整个种群或种群中一部分的死亡数与个体数总数之比来表示. 实际死亡率或生态死亡率, 是在一定条件下的个体死亡数. 该个体死亡数随着种群生存状况和环境条件的改变而改变. 类似地, 有理论上的最低死亡率, 它是描述种群存亡的一个常数, 表示在理想状态下的或无限制条件下的死亡数. 也就是说, 在理想的条件下(最好条件下), 个体死于因生理寿命决定的老年. 一般地, 生理寿命常常超过平均的生态寿命.

内禀自然增长率是生态种群的一个统计特性, 与特定的生态环境条件有关. 是在特定实验条件下(最好的温度、湿度、丰富的食物和无限的空间等)的增长率. 在这种最好的有利条件下, 种群的生长率是最大的, 是特定年龄分布的种群特征, 也是生态种群固有能力增长的唯一指标.

种群增长模式有指数增长模型和逻辑斯谛(Logistic)增长模型. 种群的增长可用下列常微分方程来描述:

$$\begin{cases} dN/dt = rN, \\ r = dN/(Ndt), \end{cases} \quad (1.1)$$

常数 r 是种群的瞬间增长率. 由此可得种群的下列指数增长模型:

$$N_t = N_0 e^{rt}, \quad (1.2)$$

其中, N_0 表示初始时间的数量, N_t 表示时间为 t 时的数量. 当 $r > 0$ 时, 种群数量的增长将按指数曲线的增长; 当 $r < 0$ 时, 种群数量将按指数曲线的减少; 当 $r = 0$ 时, 种群数量不增不减、相对稳定. 由方程 $N_t = N_0 e^{rt}$ 可知, 种群数量的增长与 J 型曲线相似, 因此, 在不受资源环境限制的条件下, 种群的增长模型称为 J 型指数增长模型.

在式(1.2)的两边取自然对数, 可得

$$\begin{cases} \ln N_t = \ln N_0 + rt, \\ r = (\ln N_t - \ln N_0)/t. \end{cases} \quad (1.3)$$

由式(1.3), 作两次种群数量大小的测量, 则可计算指数 r (在种群无限制增长中任取两个时间的 N_{t_1} 和 N_{t_2} , 可代替式(1.3)中的 N_0 和 N_t , 而 $(t_2 - t_1)$ 可代替式中 t). 指数 r , 为瞬时特殊出生率 b 和瞬时特殊死亡率 d 的差, 所以, 可得 $r = b - d$. 事实上, 在无资源环境条件限制下, 种群总增长率 r 由年龄组成和各年龄群的特殊增长率决定. 因此, 同一种群, 可能有几个 r 值. 在建立了稳定的年龄分布后, 此时的增长率就是内禀自然增长率.

影响种群个体数量的因素很多, 有些因素与种群密度有关, 种群密度增加, 生存压力加大, 而密度降低时, 生存压力减少. 这种因素就是密度制约因素. 例如, 在密度高的种群内传染病更容易传播, 因而种群数量就可能较少, 相反, 在密度小的种群中传染病的传播率就减少; 再如, 种群密度大的竞争强度就大, 对种群数量的影响也就大, 反之则较小.

生态种群的相对稳定和有规律的波动是与密度制约因素的作用有关的. 当种群数量的增长超过环境容纳量时, 密度制约因素对种群的作用增加, 从而死亡率增加, 种群数量减少. 当种群数量在环境容纳量以下时, 密度制约因素对种群的作用减弱, 从而使种群数量增加. 这就是负反馈调节. 例如, 在 90 年的时间里, 研究人员对生活在加拿大的猞猁和雪兔数量进行了研究, 结果发现猞猁种群密度的变化随雪兔种群密度的变化而改变, 雪兔数量多时, 猞猁的密度就随之上升, 相反就减少. 这就是食物对种群密度调节的影响.

Verhulst(1839)及 Pearl 和 Reed(1920)(参见文献[3]、[4])彼此独立地用数学模型表达了上述情况, 这个模型就是逻辑斯谛方程:

$$dN/dt = rN(K - N)/K, \quad (1.4)$$

式中: N, t, r 的定义与指数增长模型相同; K 代表环境容量; $(K - N)/K$ 代表环境阻力. 显然, 当 $K - N > 0$ 时, 种群个体数量增加; 当 $K - N < 0$ 时, 种群个体数量减

少;当 $K-N=0$ 时,种群数量处于相对稳定的平衡状态. 逻辑斯谛曲线向着环境容纳量 K 逼近,呈一条 S 型曲线.

1.2.2 捕食与被捕食

捕食是一种种群(食饵)被另一种种群(捕食者)追捕并吞食的现象. 狭义地讲,捕食是指肉食动物捕食草食动物. 广义地讲,捕食还包括草食动物吃食植物以及寄生等. 特殊情况下,捕食可能导致被食者(食饵)种群的消亡,进而反过来威胁到捕食者本身的生存. 但在很多情况下总有部分生命力强的食饵能逃避捕食者,且能在捕食者数量因食物缺乏而减少时重新迅速繁殖起来,有时食饵也能通过自卫能力制约捕食者的过度捕食. 从而使得捕食者与被捕食者种群数量交替消长的周期性波动.

捕食者与食饵之间的关系,是经过长期共同进化建立起来的,实际上是对两种群都有利的一种关系. 在一个较为稳定的生态系统中,捕食者与食饵之间的长期相互作用,必然导致一种相对平衡共存状态,一旦这种平衡共存态被打破,将会出现预想不到的结果. 例如,在美国亚利桑那州开巴草原上黑尾鹿与狮狼之间的生态关系原本是平衡的,为了发展鹿群,人们大量猎杀捕食者,开始时鹿群增加,但之后不久却带来草原资源的过度利用,鹿群也随之较少;为了获得更多的有经济价值的雷鸟,在 19 世纪挪威人大量捕杀吃食雷鸟的猛禽和兽类,结果导致雷鸟因寄生虫病广泛传播而大量死亡. 原来捕食者绝大多数是捕食一些老弱病残个体,是有利于种群的长期维持和进化的.

1.2.3 种群扩散

种群的生存繁衍都需要食物、空间和配偶等条件. 种群密度很大时,对空间的需要不易满足,食物缺乏及环境恶化都会限制种群的生存与发展. 与植物相比,动物具有主动寻找生存空间、食物和躲避危险(如被捕食)的能力. 很多情况下,动物的主动扩散发生在生殖期. 许多动物在交配季节到处寻找交配对象和生育的场所,当其生存附近的区域多被占据时,就被迫扩散. 扩散过程中多数个体往往会遇到不利环境而死亡,但只要少数个体遇到食物丰富且天敌很少的适合生存环境时,就可能建立起新的种群,使种的分布区域逐渐扩大. 很多昆虫也有很大的扩散能力,它们中许多表现出多态现象,即同一物种中存在两种或多种形态和行为,而且均为不相同的类型,其中之一专为扩散,如具翅或具其他有利于扩散的结构.

动物的扩散有三种形式:迁出、迁入和迁移. 分离出去而不再返回的单方向运动称为迁出;进入的单方向运动即为迁入;周期性的离开和返回称为迁移. 迁移时动物常常集群行动,经过相同的路径,在一定时间达到一定的地点. 迁移又可分为外因性迁移和内因性迁移,外因性迁移是因周围生态环境变化而引起的,

内因性迁移与动物种群数量繁殖有关. 外因性迁移又可分为周期性迁移和非周期性迁移两种. 季节性迁移是一种周期性的迁移, 在许多鱼类、鸟类、某些哺乳动物和一些昆虫中都可以观察到, 这与食物条件、气候条件的季节性变化有非常密切的关系. 非周期性迁移与周围生态环境的非周期性变化有非常密切的关系, 特别与生活环境条件的剧烈恶化有关. 例如, 在缺少食物的年代里, 松鼠成群向远处迁移至两百公里以外. 因冬季地面积雪过厚, 地面上取食的留鸟会被迫迁移. 此外, 自然灾害也是引起动物迁移的另一个重要原因. 内因性迁移主要是由于种群繁殖和种群密度的影响而发生的. 例如, 旅鼠、蝗虫在种群密度大幅增加的年代表现出大规模的迁移.

动物的迁移可使种群间和种群内的个体得以交换, 避免了近亲繁殖; 可维持或补充在正常分布区域以外的暂时性分布区域的种群数量; 可扩大种群的分布区域.

植物中也有主动扩散的事例, 如许多豆科植物果实成熟时果荚裂开将种子散落出去; 凤仙花的果实成熟后, 若受外力触碰, 果皮即向内卷缩将种子弹出. 不过这种扩散的能力不高, 传播范围有一定局限.

扩散是研究种群数量变动的重要因子. 在生产实践中, 害虫和杂草的扩散会给人类健康和农牧业带来损害. 因此, 了解生物扩散的特性, 对防治有害生物有重要意义. 许多细菌性和病毒性人畜疾病及作物病害的防治, 往往取决于切断病原体的传播途径. 稻纵卷叶螟和褐飞虱是中国南方成群长距离扩散的重要水稻害虫, 田间种群数量经常突增或突减, 掌握其扩散规律便可预测它的发生量和发生期. 利用捕食性天敌防治害虫时, 必须研究天敌和害虫在各种环境(包括不同的地形、植物长势、气候变化等)中的扩散能力、传播方向和可能的传播距离等, 以便确定人工释放天敌的数量、野外释放点布局和释放点高度等.

1.3 捕食模型介绍

A. J. Lotka(1925)和 V. Volterra(1926, 1931)分别建立了捕食-食饵系统模型(以下简称捕食模型)和竞争系统模型, Odum(1971)(参见文献[4])把前述两类模型推广到互利合作系统. 这三类模型被后人统称为 Lotka-Volterra 模型. 在第一次世界大战期间, 因意大利 Fimme 港口捕鱼量下降而导致非食鱼类数量明显减少但食肉鱼类数量大量增加, Volterra 根据这一生态现象建立了反映这一动态变化的微分方程模型并通过模型分析成功地解释了鱼类数量比的变化波动. Lotka-Volterra 模型的建立有效地反映了种群数量变动规律, 其中最好的一个例子是山猫和玉兔捕食系统成功地反映了加拿大一百多年间这两种群数量周期性波动的生态现象.

70 多年来, Lotka-Volterra 动力系统模型吸引了许多数学家、生态学家和生态数学家, 他们从不同的角度, 用各自熟知的方法技能去建立并研究模型, 从而得到

种群间相互作用规律.生态学家进行了许多野外考察、实验观测和研究,有的实例确实证实了 Lotka-Volterra 模型能成功地描述、解释一些生态规律且能预测和控制着某些种群的生态变化.目前种群间相互作用的动力系统的研究经久不衰,从特殊到一般,从简单到复杂,呈现出多种多样的模型构建,研究成果也丰富多彩.

在种群间相互作用的动力学数学模型中,研究最多的是捕食-食饵系统.在生态学文献中刊载或者在自然界观察到的结果和在实验室条件下用种群模型模拟这些系统(或是用数学方法分析)得到的结果往往不一致,这迫使人们不断改进模型,使其结果尽量与实际相符.

设食饵种群的密度为 u ,捕食种群的密度为 v .在捕食者 v 不存在的情况下,食饵种群 u 按指数方式增长,即 $du/dt=r_1u$;捕食种群在无食饵时,因食物缺少而死亡,故捕食种群 v 按指数方式减少,即 $dv/dt=-r_2v$,其中 $r_1>0, r_2>0$ 分别为食饵和捕食者的内禀增长率.假设在某一时期这两种群共处于同一个空间,因捕食作用,食饵密度的增长率随着捕食者密度的增加而下降,而捕食者密度 v 随着食饵密度 u 的增加而增加.因此捕食模型中的参数 r_1 和 r_2 就需分别改成 $r_1-\beta v$ 和 $-r_2+\alpha u$,常数 $\beta>0$ 是食饵在捕食过程中所受到的捕食压力(也称作用系数).常数 $\alpha>0$ 是捕食者捕杀食饵的捕获率. α 越大,捕食者的捕杀能力越强,捕食者密度增加越快, β 越大,食饵增长减缓.从而得到 Lotka-Volterra 捕食-食饵动力系统模型:

$$\begin{cases} du/dt=(r_1-\beta v)u, \\ dv/dt=(-r_2+\alpha u)v. \end{cases} \quad (1.5)$$

生态学家通过实验和野外考察,验证模型时发现式(1.5)所描述的系统与现实结果有很大差异.因此对模型进行了修改.

Leslie 和 Gower(1960 年)(参见文献[4])考虑到食饵种群内部的密度制约因素,它使食饵密度 u 呈逻辑斯谛增长,也考虑到食饵密度 u 对捕食密度 v 增长的影响.当捕食密度 v 大而食饵密度 u 小时,比值 v/u 大,这使捕食种群密度增长减缓;反之,食饵密度 u 大而捕食密度 v 小时,比值 v/u 小,这使捕食种群密度增长加速,从而把式(1.5)改造为

$$\begin{cases} du/dt=(r_1-b_1u-c_1v)u, \\ dv/dt=(r_2-c_2v/u)v. \end{cases} \quad (1.6)$$

Holling(1965)(参见文献[4])在实验研究的基础上,对不同类型的捕食者提出了三种不同的功能反应函数(见文献[4]第 148 页),它反映了捕食者在饱饿不同情况下的捕食率,这样具有 Holling 功能型反应函数的捕食系统可表为

$$\begin{cases} du/dt=au-\varphi(u)v, \\ dv/dt=k\varphi(u)v-mv, \end{cases} \quad (1.7)$$

其中 a 为食饵种群 u 的增长率, m 为捕食种群 v 的死亡率, $\varphi(u)$ 为反应函数. 若考虑密度制约因素, 常用逻辑斯谛项 $r(1-u/K)u$ 代替自然增长项 au , 则模型变为

$$\begin{cases} du/dt = r(1-u/K)u - \varphi(u)v, \\ dv/dt = k\varphi(u)v - mv, \end{cases} \quad (1.8)$$

其中 K 为环境容纳量, r 为增长率. 若空间资源分布是非齐次的, 为了更多地获取生存资源(以便能更好地生存)和寻找更多的交配机会, 种群总是从自身密度高的地方朝向密度低的地方自由运动. 因此, 捕食过程常常伴随着种群的自由扩散过程. 具有自由扩散的捕食模型为

$$\begin{cases} \partial u / \partial t - d_1 \Delta u = u(r - bu - f(u, v)), & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ \partial v / \partial t - d_2 \Delta v = v(-a + g(u, v)), & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ \partial u / \partial \nu = \partial v / \partial \nu = 0, & (x, t) \in \partial \Omega \times (0, T), \\ (u(0, x), v(0, x)) = (u_0(x), v_0(x)) \geq (0, 0), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1.9)$$

其中 u 和 v 分别代表食饵和捕食者密度; 函数 $f(u, v)$ 是反应功能性函数; d_1 和 d_2 分别代表食饵和捕食者的自由扩散系数.

在捕食过程中, 两种群除自由扩散外, 还有自扩散及交叉扩散, 自扩散是由同一物种内部的压力产生的, 交叉扩散是由种外的物种压力(吸引或驱散排斥)产生的. 通常, 食饵越丰富, 越能吸引捕食者追捕食饵, 相反地, 捕食者密度越大, 食饵逃避的速度就越快. A. Okubo 指出在捕食过程中捕食者在空间上的临时变化速度和方向常取决于食饵密度的梯度, 且这一假定在后来的实验观测中得以证实. 同时, 食饵对捕食者的捕食行为也产生逃避或团体进攻行为, 从而产生交错扩散. A. Okubo 在《扩散和生态问题》(英文)一书中提出了一般交叉反应扩散捕食模型:

$$\begin{cases} \partial u / \partial t - \nabla \cdot (K_{11}(u, v) \nabla u + K_{12}(u, v) \nabla v) = u(r - bu - f(u, v)), & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ \partial v / \partial t - \nabla \cdot (K_{21}(u, v) \nabla u + K_{22}(u, v) \nabla v) = v(-a + g(u, v)), & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ \partial u / \partial \nu = \partial v / \partial \nu = 0, & (x, t) \in \partial \Omega \times (0, T), \\ (u(0, x), v(0, x)) = (u_0(x), v_0(x)) \geq (0, 0), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1.10)$$

其中 u 和 v 分别代表食饵和捕食者密度; 函数 $f(u, v)$ 是反应功能性函数; K_{11} , K_{12} , K_{21} 和 K_{22} 分别表示扩散和交叉扩散过程. 生态学意义要求满足

$$K_{11}, K_{22} > 0, \quad K_{12} \geq 0, \quad K_{21} \leq 0.$$

就扩散而言, 只有食饵趋向的反应扩散捕食系统是一般交叉反应扩散捕食系统的特殊情况. 只具有食饵趋向的反应扩散捕食系统如下:

$$\begin{cases} \partial u / \partial t - d_1 \Delta u + d_1 \nabla \cdot \chi u \nabla v = -au + ecuf(u, v), & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ \partial v / \partial t - d_2 \Delta v = rv(1 - v/K) - cuf(u, v), & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ \partial u / \partial \nu = \partial v / \partial \nu = 0, & (x, t) \in \partial \Omega \times (0, T), \\ (u(0, x), v(0, x)) = (u_0(x), v_0(x)) \geq (0, 0), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1.11)$$

其中有界区域 $\Omega \in \mathbf{R}^N$ ($N \geq 1$ 的正整数), $\partial \Omega$ 为光滑边界; u 和 v 分别代表捕食者和食饵密度, 正常数 d_1 和 d_2 分别是捕食者和食饵的扩散系数; 正常数 $a, r, K, e, m/c, b/c$ 分别代表捕食者的死亡率、食饵增长率、食饵的环境容纳量、转化率、一个捕食者抓捕一个食饵所需要的时间、操纵时间; $f(u, v)$ 是反应功能性函数; 捕食者被食饵所吸引, χ 记为食饵趋向的敏感性系数; 部分流 $\chi u \nabla v$ 取决于食饵 v 增加的密度, 按此方式, 捕食者朝向食饵密度较高的地方进行捕食.

第2章 交叉反应扩散种群系统解的存在性

本章主要研究交叉反应扩散种群系统解的存在性. 由于空间资源的非齐次分布, 种群总是从自身密度高的地方向密度低的地方运动, 从而产生了自由扩散现象. 同时一种群的运动变化常会引起另一种群的行为变化, 不同的种群又会引起不同的种群运动, 这种扩散过程较为复杂, 例如, 入侵、追捕与逃跑等, 这类生态现象通常可用交叉反应扩散来建模.

2.1 一般交叉反应扩散捕食系统古典解的存在性

文献[5]和[6]提出了一般的交叉反应扩散食饵-捕食系统(1.10)(以下简称捕食系统). 就交叉扩散的种群模型, 多数研究的是 SKT(Shigesada N, Kawasaki K, Teramoto E)竞争模型^[7~11], 而交叉扩散的捕食模型较为少见. 本节考虑如下具有功能型 II 的一般交叉反应扩散捕食模型:

$$\begin{cases} \partial u / \partial t - \Delta[(d_1 + \alpha_{11}u + \alpha_{12}v)u] = r_1(1 - u/K_1)u + ecuv/(m + bv), & 0 < x < 1, t > 0, \\ \partial v / \partial t - \Delta[(d_2 + \alpha_{21}u + \alpha_{22}v)v] = r_2(1 - v/K_2)v - cuv/(m + bv), & 0 < x < 1, t > 0, \\ \partial u / \partial \nu = \partial v / \partial \nu = 0, & x = 0, 1, \\ (u(0, x), v(0, x)) = (u_0(x), v_0(x)) \geq (0, 0), & 0 < x < 1, \end{cases} \quad (2.1)$$

其中, u 和 v 分别代表捕食者和食饵密度, 正常数 $K_i, r_i (i=1, 2), e, c/m, b/m$ 分别表示相应种群的环境容纳量、内禀增长率、转化率、搜索效率、捕食者抓捕和消耗一个食饵所需的操纵时间. 交叉扩散压力 α_{21} 表示食饵逃离捕食者的一种趋向, α_{12} 表示捕食者逃离食饵群体的一种趋向(参见文献[12]), 在捕食者与食饵相互作用的关系中, 食饵种群会大量聚集以阻止捕食者的进攻. 在系统(2.1)中, 捕食者 u 扩散的流为

$$\begin{aligned} J &= -\nabla(d_1u + \alpha_{11}u^2 + \alpha_{12}uv) \\ &= -(d_1 + \alpha_{12}v + 2u)\nabla u - \alpha_{12}u\nabla v. \end{aligned}$$

部分流 $-(d_1 + \alpha_{12}v + 2u)\nabla u$ 朝向捕食者密度减少的方向, 说明食饵逃离捕食者. 部分流 $-\alpha_{12}u\nabla v$ 朝向食饵密度减少的方向, 说明捕食者由于食饵的团体进攻而逃离. 这一节将证明系统(2.1)的解的全局存在性和一致有界性. Amann 已在文献[13]—[15]证明了解的局部存在性, 结论如下.

引理 2.1.1 对 $p > n$, 设 u_0, v_0 为 $W_p^1(\Omega)$. 则系统(2.1)有唯一非负解 $u, v \in$