数学物理方程学习辅导二十讲

陈恕行

高等教育出版社

数学物理方程学习辅导二十讲

SHUXUE WULI FANGCHENG XUEXI FUDAO ERSHI JIANG

陈恕行

高等教育出版社·北京

内容简介

本书为高等学校数学类专业数学物理方程课程的学习辅导书，其深度与数学物理方程的课程相当。作者根据多年的教学实践，分二十讲对学生在学习过程中常遇到的疑问作了阐述与解答，也提出了一些值得进一步思考的问题。为使学生能有更多练习与思考的机会，在本书中还提供了一定数量的例题与各种类型的习题。

图书在版编目（CIP）数据

数学物理方程学习辅导二十讲 / 陈恕行编著. -- 北京 : 高等教育出版社, 2015.8
ISBN 978-7-04-042884-1

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①陈… Ⅲ. ①数学物理方程-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①O175.24

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第115716号

策划编辑 兰莹莹　责任编辑 兰莹莹　封面设计 尹文燕　版式设计 马敬茹
插图绘制 尹文军　责任校对 李大鹏　责任印制 田 甜

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	三河市吉祥印务有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787 mm× 1092 mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	7.25	版　　次	2015年8月第1版
字　　数	170千字	印　　次	2015年8月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	18.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　42884-00

前　言

数学物理方程是数学学科的一个分支,它主要指从物理学及其他各门自然科学、技术科学中产生的偏微分方程(有时也包括和此相关的积分方程、微分积分方程等)。它们反映了有关的未知变量及其关于时间的导数和关于空间变量的导数之间的制约关系,其涉及领域与应用范围日益广泛与深入。

数学物理方程也是高等学校数学类专业的一门重要基础课程的名称,它主要以波动方程、热传导方程与调和方程为代表讨论二阶线性偏微分方程,介绍这些偏微分方程的导出、物理背景、求解方法、解的性质等。为配合数学物理方程课程的教学,作者根据多年的教学实践,分二十讲对学生在学习过程中常遇到的疑问作了阐述与解答,也提出了一些值得进一步思考的问题。

本书是数学物理方程课程教学的辅导材料,它以数学物理方程教科书的内容编排为线索来展开讨论。读者可参考复旦大学谷超豪等编写的数学物理方程(高等教育出版社,2012 年第三版)使用本书。作者在本书中首次尝试用对话的方式来阐述相应的数学内容,希望这种问答的方式能更贴近于学生实际学习时的思考过程,并能以较生动的方式叙述较枯燥的数学内容,以便于理解和掌握。同时,为帮助学生能有更多的练习与思考,本书中还提供了一定数量的例题与各种类型的习题。相信这些材料对于学习与深入掌握数学物理方程课程的内容能起到一定的辅助作用。

由于本书是数学物理方程课程教学的辅导材料,很多在数学物理方程教科书中已有的基本内容,特别是在教科书中详细写出的定理证明或相关运算,在本书中均不再重复,仅在必要时为了释疑的方便,将一些记号或证明要点加以复述。本书中选配的例题与习题提供了比常规教材更为开阔的思考余地,希望同学们感兴趣于此。

本书的编写参考了国内外不少教材与文献资料,也从中选取了部分习题。在编写过程中得到了同事们的许多支持与帮助,特别是秦铁虎教授的大力支持,在此深表感谢。由于本书的写作方式是初次尝试,更由于作者水平所限,书中有许多不妥与疏漏之处,望读者指正。

陈恕行

2015 年于复旦大学

反盗版举报电话　(010) 58581897　58582371　58581879
反盗版举报传真　(010) 82086060
反盗版举报邮箱　dd@hep.com.cn
通信地址　北京市西城区德外大街4号　高等教育出版社法务部
邮政编码　100120

目　　录

第一讲　导　　引

教　师　数学物理方程是数学与应用数学专业很重要的基础课程.

学生 A　每个老师都说自己所教的课程是很重要的.

学生 B　那当然啦,不重要的课程就不会安排在教学计划中了.

教　师　关键是为什么说这门课程是重要的,以及它有什么特点.

数学物理方程主要指从物理学与其他各门自然科学、技术科学中所产生的偏微分方程.它反映了有关的未知变量及其关于时间变量的导数或关于空间变量的导数之间的关系.一门自然科学中所特别关心的定量关系往往可以用一个偏微分方程来描写.例如,流体力学中的基本方程是欧拉方程组与纳维－斯托克斯方程组,水力学、空气动力学、海洋流、大气运动等各式各样流体力学中的问题都会归结到欧拉方程组与纳维－斯托克斯方程组(或其简化形式)在各种特定条件下的求解.相仿地,弹性力学中的基本方程就是弹性力学方程组,电动力学中的基本方程是麦克斯韦方程组,量子力学中的基本方程是薛定谔方程,相对论中的基本方程是爱因斯坦方程,相对论量子力学中的基本方程是狄拉克方程,如此等等.简言之,一个偏微分方程就成为一门学科的数学基础,其重要性不言而喻.今天,离开了这些重要的数学物理方程就无法想象怎么来研究相应的学科.

学生 A　就是说,很多情形下在研究一门自然科学时就得天天与某一类偏微分方程打交道吗?

教　师　可以这样说吧.数学物理方程有时也包括和此相关的积分方程、积分微分方程等.例如,描写稀薄气体运动的玻尔兹曼方程就是一类积分微分方程.

学生 B　数学物理方程在物理中的用途可真大!

教　师　这里的物理应当理解为广义的物理.实际上,现在在化学、生物、经济学乃至社会学的研究中都会遇到数学物理方程.

学生 A　还有社会学?

教　师　是的.例如在环境科学中,空气污染的治理就与扩散方程有关.还有,人口迁移的研究也可用偏微分方程来描写.

学生 C　数学物理方程的用途确实很大,可这么多内容我们怎么学啊?

教　师　我们在这门课程中当然只能学一些基础性的内容.选一些最基本的且形式较简单的偏微分方程进行讨论.其中包括数学模型的建立,方程的求解以及解的性质的研究等.但这些基本内容的掌握对于更困难问题的学习与研究是一个重要的基础.此外,从偏微分

方程与数学学科的其他分支的联系来说,这些内容也是必不可少的.

学生 A　偏微分方程与数学学科的其他分支有很多联系吗?

教　师　有,而且很密切.例如,偏微分方程与常微分方程同属微分方程,但偏微分方程中出现的是偏导数,除了时间变量外还有空间变量,显然其研究的问题要更复杂些,而它的研究也必定要以对常微分方程的了解为基础.又如,偏微分方程属于分析学,但所讨论的问题与方法常有几何上的意义,故与几何,特别是微分几何有密切联系.此外,泛函分析理论的发展为偏微分方程的研究提供了许多新观点与新方法,而偏微分方程也为泛函分析提供了许多具体的模型.至于微积分,则是近代数学必不可少的基础,对偏微分方程也是一样.事实上,在历史上,偏微分方程最早只是微积分理论的一个部分,仅在其内容逐渐丰富与成熟后,才脱离微积分,成为一门独立的科学.

学生 B　所以,其他数学类课程的掌握对学好偏微分方程是十分重要的.

教　师　是的.以上所说的这些联系大家可在学习过程中逐渐体会到.

学生 C　我有个问题,既然数学物理方程课程的主要内容是偏微分方程,为什么不称这门课程为偏微分方程呢?

教　师　课程的名称并不重要.现在美国与欧洲很多大学数学系的课程名称中就是偏微分方程而不是数学物理方程;我国大学课程目录中称该课程为数学物理方程可能有历史的原因吧.但我觉得数学物理方程的课程名称也很好,它更强调了这门课程与物理等应用科学的联系,也强调了这门课程在数学理论到各类应用中起到桥梁作用的特点.

还有一点要说明的,按偏微分方程的定义,任何一个含有未知函数以及该函数的偏导数的等式都可称为偏微分方程.但随意写的一个等式不一定有物理意义,我们关心的数学物理方程就是在物理等应用科学中有意义的偏微分方程,这些方程才是我们讨论的对象.

学生 A　在物理系的课程安排中通常有数学物理方法课程,这与数学物理方程是否一回事?

教　师　在物理系的数学物理方法课程通常包括积分变换、数学物理方程、特殊函数等,故数学物理方程只作为该课程内容的一部分出现.此外,与数学系的教学相比,物理系的数学物理方程教学中更注重于方法,理论分析少一些.

学生 B　柯朗与希尔伯特写了很厚的数学物理方法,其第二卷是专门写偏微分方程的.

教　师　是的.这两位大师写的这本书是很有影响的著作.但此书内容太多,初学者不容易自学.此外,这本书是在20世纪中叶出版的,有些内容(如广义解)现在已可以用更简洁与标准的语言叙述,更容易理解.

学生 A　请您介绍一下本课程的参考书好吗?

教　师　好的.国内出版名为数学物理方程的书已有数十种,一般是直接用于教学的.例如复旦大学编写的《数学物理方程(第三版)》,可在70学时内教完,如只教前4章,则50学时就够了.别的数学物理方程教材若针对较少学时的课程,内容还要少些.姜礼尚编写的

《数学物理方程》的变分原理部分，齐民友、吴方同编写的《广义函数与数学物理方程》均有其特色，值得参考. 国外出版的相应内容的书冠名为偏微分方程的比较多. Fritz John 编写的 *Partial Differential Equations* 在大学本科中还用得较多，但如按国内的讲授方法也难在一学期内讲完. 其他很多书往往是供研究生用的，所以篇幅较多. 例如 Lawrence C. Evans 编写的 *Partial Differential Equations* 内容丰富，但远超出我们大学本科数学物理方程教学大纲的要求，故对多数大学三年级的同学来说，将此作为主要参考书并不合适. 彼得罗夫斯基写的《偏微分方程讲义》是一本经典的书. 近年来他的学生奥列尼克以同名写的《偏微分方程讲义》内容翔实，体现了俄罗斯的数学传统与风格，特别是里面有些理论分析以及习题还是相当难的. 苏联还有一些名为数学物理方程的参考书，如吉洪诺夫、萨马尔斯基写的《数学物理方程》，在偏微分方程的应用方面展开很多. 如有时间与精力学习一下还是很好的，但不一定在初次接触数学物理方程时就看那么多.

这里得对初学本课程的同学说两句. 一般来说，主要的精力应放在对基本教材的理解上，对有关的概念与定理要理解透彻，做好必须做的习题，以后在扩充知识面时就会触类旁通. 初学时不宜花过多的时间在阅读参考书上. 事实上，不同的书都有讨论问题不同的观点与思路，甚至一些定义、记号都不一样. 在你对某一部分内容没有深入理解时，不断地调整思路适应不同作者的叙述，是相当累的. 而当你真正理解时，就会触类旁通，发现这些不同的说法实际上就是一回事. 当然，在阅读参考书的问题上要因人而异. 有些同学有余力，扩展知识面与加深思考一些问题都是有意义的.

学生 C 听说数学物理方程的习题有很多运算?

教　师 数学物理方程课程的一个重要内容就是解方程. 应该说，当你面临一个难解决的问题，通过已掌握的数学工具能将解找出来，是一件很愉快的事. 而要找到解当然就得进行一定的数学运算. 这时，对你以前的数学功底，特别是微积分运算的能力就是一次考试. 希望大家在遇到这类运算时一定要运算到底.

第二讲　弦振动方程与定解条件的导出

教　师　数学物理方程课程首先遇到的问题就是方程的导出，它是物理现象的数量规律的描述. 这也是一个建立数学模型的问题.

学生 A　建立数学模型需要对所考察问题的物理背景有足够的了解吗？

教　师　是的. 我们先讨论一些较经典的物理现象，如力的相互作用，热的传递等. 这些现象通常在中学的课程中都遇到过，但现在要用微积分的工具来重新描写这些现象.

学生 B　那我们还得重新学习一下.

教　师　先以弦振动现象为模型导出弦振动方程. 如[1]中所述，我们要对弦作一些理想化的假定，即：

(1) 弦是均匀的，弦的截面直径与其长度相比可以忽略，因此，弦可以视为一根曲线，它的线密度是常数.

(2) 弦在某一平面内作微小横振动，即弦的位置始终在一直线段附近，且各点的运动方向与弦所在的直线方向垂直.

(3) 弦是柔软的，它在形变时不抵抗弯曲，弦在各点的伸长形变与所受张力成正比.

学生 C　这么多条，怎么背得下来呢？

教　师　不要背，在导出方程过程中会发现这些假设是必要的.

学生 A　如果没有这些假定会怎样呢？

教　师　如果没有这些假定，推导出的方程可能会更复杂. 这一点我们以后再说.

学生 A　我们还假定了物体运动速度远小于光速，从而不需考虑相对论效应.

教　师　你说得对，但一些常规假定就不一一列举了，否则“假定条件”就更长了. 我们是以牛顿力学为基础来导出运动方程的，即应用牛顿第二定律 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$，它的另一表述为：

作用在物体上的冲量 = 使该物体产生的动量的变化.

学生 A　弦的各部分受力与运动情况都不一样吧？

教　师　是的，所以要取弦的一个无穷小的小段来讨论其受力与运动情况，再作综合. 为便于理解，先将所取的弦的小段为$[x,x+\Delta x]$，时间段为$[t,t+\Delta t]$，在写出这一小段的运动方程后，令 $\Delta x,\Delta t$ 趋于零，舍弃高阶小量，从而得到弦振动方程. 这是微积分学的基本方法，详细推导过程在[1]中已写有，有什么疑问吗？

学生 B　您是否能解释一下前面那么多假定用在哪里呢？

教　师　首先,因为弦的截面与其长度相比可以忽略,就可以将弦看成一条线.从而可以用单变量 x 来表示弦上质点的位置.因为弦在一条直线附近运动,故可以将该直线取为 x 轴,从而建立 x 坐标.

其次,因为弦的运动始终在一个平面内发生,故只需在这个平面上来考察弦上各质点的运动.由于弦仅作横振动,所以可用质点偏离中心线位置的垂直距离 u 来刻画振动.

再则,弦是柔软的假定表示该弦只能承受张力,而不能产生抵抗弯曲的剪切力.这大大简化了关于微小段的弦的受力与形变情况的分析.张力与伸长形变成正比在推导方程过程中明显被用到.弦的均匀特性意味着弦的线密度是常数,也在推导中直接用上了.

学生 C　这么多假定果然一一都用上了.我想问,要是其中某些假定不成立会产生什么情况?

学生 A　齐次弦振动方程的标准形式为 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,其中 a 是常数.要是在这些假定中某个不成立,将不同程度地使问题变得复杂.例如:

若弦的线密度不是常数,则方程中的 a 也不会是常数,而且在方程中还会出现一阶项.

若弦所受的张力与伸长形变不成正比,则我们将得到弦的非线性振动方程.非线性方程肯定要比线性方程难得多.

若弦不在一个平面中振动,那么至少得用两个振动量 (u,v)(甚至更多)来刻画弦的振动,这样就将导致方程组的研究.

若弦不是在一条直线附近作微小振动,而是作大幅度振动,那也必定要用非线性方程来刻画.

最后,若弦的粗细不可忽略,那么,就得将弦看成一个三维的弹性体.这时所导出的方程将含有时间变量 t 与空间变量 x,y,z,显然,它要比仅含一个空间变量的弦振动方程复杂得多.

学生 B　原来进一步的考虑有这么多复杂的情形.我想,弦振动方程应该是最基本的吧!

教　师　要将所有因素都考虑进去,问题肯定要复杂得多.我们先集中力量研究弦振动方程,就是抓住问题的本质部分.

学生 C　弦振动方程只是对实际运动的一种近似刻画,我们是否也因此而没有必要对弦振动方程作精确的数学研究了?

教　师　不对.弦振动方程是从实际运动过程提炼出来的一个数学模型,作为一个已提炼成的数学问题,它应该被精确地研究.等式两边的相等就是精确的相等,稍差一点就不行.对方程以及方程的解的性质应该有确切的了解,只有将最基本的方程研究清楚了,才能准确地把握问题的本质,进而过渡到更一般的情形,也只有这样才能应用于实际.而且,基本的弦振动方程也常成为研究较复杂数学问题的工具,这时就更容不得半点误差了.

学生 B　有了刻画运动的弦振动方程,为什么还要有定解条件呢?

教　师　弦振动方程给出了弦运动的一般规律,但要了解一个具体的弦振动的过程,就得与特定的场景条件一起考虑.合适的定解条件的选取才能正确地描写所研究的弦的运动.

学生 A 在常微分方程的求解中所加上的初始条件也属于定解条件吧?

教 师 是的. 由于常微分方程不涉及空间变量,故往往初始条件就足以界定一个具体的运动过程. 偏微分方程则不同. 为确定具体的弦振动过程,除了初始条件外还得有边界条件.

学生 B 什么样的边界条件才是合适的边界条件呢?

教 师 边界条件的选取也要根据实际问题来确定. [1]中列出的三种边界条件是最常见的,即 $u=g, \frac{\partial u}{\partial x}=g, \frac{\partial u}{\partial x}+\sigma u=g$ 三种. 它们分别对应于固定边界、自由边界以及弹性支撑边界的情形. 特别是对应于取固定边界条件的狄利克雷问题又是最基本的情形.

学生 C 还有其他类型的边界条件吗?

教 师 有. 具体的物理过程往往各有特点,所以边界条件可以是各种各样的. 有时在边界上还可以耦合一个常微分方程. 但如果对基本的情形有详尽的了解,对于各种特殊的情形也有应对的基础了.

学生 A 所以我们还是应当对教材中所选定的内容达到透彻的理解.

教 师 为了检验你们是否已透彻理解了这些内容,建议大家多做一些习题.

学生 C 在建立方程的习题中还需要具备很多物理知识.

教 师 为了建立数学模型,与此问题相关的物理知识是必要的. 本书所选定的习题尽量只用到大家已熟悉的物理知识,必要时在习题中添加一些说明. 必须指出的是,以后你们在真刀真枪解决实际问题时,相关的物理知识是没有人帮你们准备的,必须自己去摸索,在实践中逐步做出正确的选择.

学生 B 数学物理方程第一课是数学建模,这与其他的分析、代数、几何等课程都不一样!

教 师 这正体现了这门课程的特点.

学生 A 不管怎样,做习题是很好的练兵,我们要认真对待.

学生 B 在习题中我还看到有所谓弹性杆的纵振动,这是怎么回事?

教 师 在这类振动问题中弹性杆也用一个均匀的直线来表示,弹性杆上诸质点振动时的运动方向与该直线方向一致.

学生 C 这时也要设定很多条件吧?

教 师 是的. 例如要求弹性杆每一部分的形变与它所受的应力成正比,即满足胡克定律. 有些条件将根据不同情况而定. 例如在有些问题中忽略弹性杆自身的重量,但有时候必须考虑该杆自身重量的影响时,就得将它计入.

学生 A 螺旋弹簧就像个弹性杆,弹簧的每个部分都在弹簧的轴线方向上下振动.

教 师 宏观地说,若将螺旋弹簧视为一个均匀的圆柱体时可以这样理解. 但就螺旋弹簧的螺旋线上的质点来说,情况更复杂,需要对弹性力学有更多的了解.

学生 A 奇怪的是,柔软的弦的横振动方程与弹性杆的纵振动方程竟然完全相同!

学生 B 而且三类基本的边界条件的形式也是一样的!

教 师 不仅如此,以后你们在其他物体的振动中也会发现它可用弦振动方程来描写.这正是数学抽象的威力,也是它的魅力所在.

以下我们以变截面的弹性杆振动为例导出其运动方程.

例 2.1 设有一长度为 l、截头为圆锥形的弹性杆,其两端的底半径分别为 R 与 $r(R>r)$,杆的密度与杨氏模量分别为 ρ 与 E.如果杆的一端固定,一端自由,试在杆不受外力的情况下确定杆的纵振动满足的方程与边界条件(设杆中的点只有沿杆轴方向的位移,且在垂直于轴线的任一截面上的振动情况是相同的).

解 取杆的半径为 R 的底面圆心为原点,杆的轴为 x 轴(见图 2.1).以 $u(x,t)$ 表示杆上平衡时在 x 处的垂直于 x 轴的截面于时刻 t 沿 x 轴方向的位移.为确定 x 处的相对伸长,考察一杆段 $[x,x+\Delta x]$.在时刻 t,点 x 的位置应为 $x+u(x,t)$,点 $x+\Delta x$ 的位置应为 $x+\Delta x+u(x+\Delta x,t)$.杆段 $[x,x+\Delta x]$ 的相对伸长为 $(u(x+\Delta x,t)-u(x,t))/\Delta x$.令 $\Delta x\to 0$,即得 x 处的相对伸长为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)$.

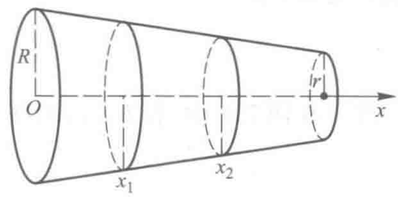

图 2.1

现在来建立 $u(x,t)$ 所满足的方程.取杆段 $[x_1,x_2]$(见图 2.1),此杆段在两端面受应力作用.以 $S(x)$ 表示截头圆锥在 x 处的截面积.由胡克定律可知,两端由应力所产生的作用力分别为

$$-ES(x_1)\frac{\partial u}{\partial x}(x_1,t) \text{ 与 } ES(x_2)\frac{\partial u}{\partial x}(x_2,t).$$

故其合力为

$$ES(x_2)\frac{\partial u}{\partial x}(x_2,t)-ES(x_1)\frac{\partial u}{\partial x}(x_1,t).$$

另外,这一杆段所受的惯性力为

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\rho S(x)\,\mathrm{d}x.$$

由力的平衡关系有

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\rho S(x)\,\mathrm{d}x+ES(x_2)\frac{\partial u}{\partial x}(x_2,t)-ES(x_1)\frac{\partial u}{\partial x}(x_1,t)=0.$$

将上式写成如下积分形式:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[\rho S(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)-E\frac{\partial}{\partial x}\left(S(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)\right]\mathrm{d}x=0.$$

因上式对一切 $x_1,x_2\in[0,l]$ 均成立,故得

$$\rho S(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)-E\frac{\partial}{\partial x}\left(S(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)=0. \tag{2.1}$$

剩下的工作就是写出 $S(x)$ 的显式表达式. 由初等几何计算不难得

$$S(x)=\frac{\pi R^2}{h^2}(h-x)^2,$$

其中 $h=\dfrac{Rl}{R-r}$. 将其代入(2.1)式即得

$$\rho\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-E\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0. \tag{2.2}$$

这就是我们所要求的方程.

现在来考察边界条件. 设左端($x=0$)固定,则相应的边界条件为

$$u(x,t)\big|_{x=0}=0.$$

设右端($x=l$)自由,即无任何约束,此时端面 $x=l$ 处不受任何力的作用,故由胡克定律,其相对伸长应为零,即

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\bigg|_{x=l}=0.$$

注　在例 2.1 中,若 $R=r$,此时 $S(x)=\pi r^2$,代入(2.1)式得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,$$

其中 $a^2=\dfrac{E}{\rho}$. 这就是均匀(截面相同,ρ 为常数)弹性杆的纵振动方程,它与标准弦振动方程的形式相同($f=0$).

教　师　最后,我们再列出一些习题,给你们更多的练习机会. 下面的习题中有关于气体振动与电路振荡的方程推导,在推导这些方程时,是需要相应的物理知识配合的.

习　　题

1. 长度为 l 的均匀弹性杆被铅直地放置在自由下落的电梯内,其上端刚性地固定在电梯的天花板上,下端是自由端. 设电梯达到速度 v_0 时突然停止,试写出杆的微小纵振动所满足的边值问题.

2. 在无阻尼的介质中,一均匀弹性杆的一端刚性地固定着,另一端受到一个与速度成正比的阻力的作用,试写出杆的微小纵振动所满足的边值问题.

3. 在一圆形管道中充满静止的理想气体. 现管道中有一小扰动,在扰动的传播过程中,管道中一切气体分子均作平行于管轴的运动,且在垂直于管轴的同一横截面内,气体的状态相同. 设管道一端用不透气的隔板封闭,另一端开着. 试导出气体流动速度 v 所满足的偏微分方程及相应的定解条件.

4. 设有一导线,其单位长度的电阻 R、自感 L、电容 C 均为常数,绝缘电阻略去不计. 以 $V(x,t)$ 与 $I(x,t)$ 表示在 t 时刻,距线路一端距离为 x 的断面处的电压与电流. 试证:V 与 I 满足同样形式的方程

$$u_{xx}=CLu_{tt}+CRu_t.$$

这个方程称为电报方程.

5. 不重的弦(即弦的重量与张力相比很小)在围绕铅直轴以常角速度旋转时位于水平面内,而且弦的一端固定在轴的某一点上,另一端自由. 在初始时刻 $t=0$ 时,弦上的点有一个沿铅直方向的微小偏移与速度. 试给出弦上各点离开水平面的偏移所满足的方程.

6. 在上一题中,若需考虑弦的自身重量,则方程的形式如何?

7. 证明:如果 $u(x,t)$ 是方程 $u_{xx}-u_{tt}=0$ 的解,则函数

$$v(x,t)=u\left(\frac{x}{x^2-t^2},\frac{t}{x^2-t^2}\right)$$

在 $x^2\neq t^2$ 处也满足方程.

8. 证明:如果 $u(x,t)$ 是方程 $u_{xx}-u_{tt}=0$ 的解,且 $u(x,t)$ 存在三阶连续偏导数,则 xu_x+tu_t 与 $u_x^2+u_t^2$ 也是该方程的解.

第三讲　达朗贝尔公式及其应用

教　师　偏微分方程的初值问题即柯西问题是最基本与最常见的定解问题.

学生 A　常微分方程也有初值问题. 对常微分方程的初值问题求解时, 常常先求出通解, 再利用初始条件决定通解表达式中的任意常数. 这种方法在解偏微分方程时是否也有效?

学生 B　弦振动方程的达朗贝尔公式就是这么导出的.

学生 C　弦振动方程的达朗贝尔公式真妙, 一下子将弦振动方程柯西问题的解用显式表示出来了. 要是偏微分方程的各类问题都能这样求解就好啦.

教　师　可是这样的机会太少了. 偏微分方程一般是很难得到通解的表达式的. 18 世纪偏微分方程刚刚引起人们注意时, 达朗贝尔等人利用研究常微分方程的思考方式研究了弦振动方程的定解问题, 在 1746 年得到了解的表达式. 但是, 以后的研究发现, 能像达朗贝尔公式那样, 用有限积分的形式得出偏微分方程定解问题的解是很特殊的情形.

学生 B　在解题中利用达朗贝尔公式将初始条件代入求解很简单. 它是否有更多的应用呢?

教　师　达朗贝尔公式不仅给出了弦振动方程柯西问题的解的表达式, 而且从中可以导出弦振动方程的一些重要性质. 下面对弦振动方程引入依赖区间、决定区域、影响区域等概念, 它们可叙述如下:

过 (x,t) 平面上任一点 (x_0,t_0) 作直线 $x-x_0=\pm a(t-t_0)$, 两条直线所截下 x 轴上的一段 (x_0-at_0,x_0+at_0), 称为 (x_0,t_0) 点的依赖区间.

在 $x=0$ 直线上给定一区间 (x_1,x_2), 由两端作直线 $x=x_1+at$, $x=x_2-at$, 该两直线与 x 轴所围成的区域称为 (x_1,x_2) 的决定区域.

在 $x=0$ 直线上给定一区间 (x_1,x_2), 由两端作直线 $x=x_1-at$, $x=x_2+at$, 在 $x>0$ 半平面上该两直线中间所夹的区域称为 (x_1,x_2) 的影响区域.

学生 A　依赖区间、决定区域、影响区域三个概念实际上说的是一回事. 只是正过来、倒过去看同一个现象.

教　师　对! 你抓住问题的本质了. 只要这三个概念有一个成立, 就可导出相应的另两个概念. 它们统称为扰动的有限传播速度性质. 以后你们还会看到, 扰动的有限传播速度性质不仅对弦振动方程成立, 而且对以弦振动方程为代表的一大类偏微分方程都成立.

学生 A　在空气中声音传播的速度是有限的, 是否也是一种扰动有限传播速度性质?

教　师　对! 这是高维波动方程的扰动有限传播速度性质, 以后你们会学到.

学生 A　我注意到决定区域与影响区域的边界都是形为 $x\pm at=\text{const}$ 的直线, 其中 a 为正常数,

表示传播速度,函数 $F(x-at)$ 表示波形 $F(x)$ 以速度 a 往右传播.

相仿地,以 $x+at$ 为变元的函数 $G(x+at)$ 表示波形 $G(x)$ 以速度 a 往左传播.

教 师 这些直线称为特征线(characteristic lines).你们看,以 $x-at$ 或 $x+at$ 为变元的函数就满足弦振动方程.这样的函数有什么性质?以 $F(x-at)$ 为例,它在 $x-at=\text{const}$ 时,其值不变.这就是说,在弦振动过程中扰动是沿着这样的直线传播的.扰动传播轨迹的特征线在偏微分方程理论的研究中起着重要的作用.

学生 C 我翻阅过一些介绍数学专业名词的书籍,里面除特征线外,还有特征射线、特征面、特征流形、特征形式、特征集,以及什么次特征、重特征等概念,这些概念都与上面所说的特征线有关吗?

教 师 都有关联.我们上面所说的特征线是最基本的,以此为基础又发展出了其他概念.它们统称为"特征".你们在以后的学习中会逐步体会到"特征"在偏微分方程研究中的重要作用.

教 师 达朗贝尔公式还可用来解一些其他的定解问题,以下我们介绍一个例题.

例 3.1 设 k 为满足 $0<k<a$ 的常数,求以下边值问题的解:

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, \quad t>0,\ kt<x<at, \\ u\big|_{x=kt}=\psi(x), \\ u\big|_{x=at}=\varphi(x), \end{cases} \tag{3.1}$$

其中 $\psi(0)=\varphi(0)$.

解 设 u 具有形式

$$u(x,t)=F(x-at)+G(x+at),$$

其中 F,G 的形式待定.令 $t=\dfrac{x}{a}$,得

$$\varphi(x)=F(0)+G(2x).$$

所以

$$G(x)=\varphi\left(\frac{x}{2}\right)-F(0),$$

$$u(x,t)=F(x-at)+\varphi\left(\frac{x+at}{2}\right)-F(0).$$

再在上式中令 $t=\dfrac{x}{k}$,得

$$\psi(x)=F\left(x-\frac{a}{k}x\right)+\varphi\left(\frac{k+a}{2k}x\right)-F(0).$$

从而有

$$F\left(\left(1-\frac{a}{k}\right)x\right)=\psi(x)-\varphi\left(\frac{k+a}{2k}x\right)+F(0),$$

$$F(x)=\psi\left(\frac{kx}{k-a}\right)-\varphi\left(\frac{k+a}{2(k-a)}x\right)+F(0).$$