

配合教材
辅导自学

数

高中 教学指导

高三分册
(下)

学

步练习
型丰富

苏州大学出版社

高中数学教学指导

高三分册(下)

初等数学编写组编

苏州大学出版社

(苏)新登字第 015 号

高中数学教学指导

高三分册(下)

初等数学编写组

苏州大学出版社出版发行

江苏省新华书店经销

宜兴印刷厂承印

地址:宜兴市荆溪北路 112 号 邮编:214200

开本 787×1092 1/16 印张 24.5 字数 612 千

1996 年 6 月第 2 版第 1 次印刷 印数 10001—20000

ISBN7-81037-211-4/G·76 定价 21.70 元(上、下册)

苏州大学出版社出版的图书若有印刷装订错误,可向承印厂调换

前言

全国部分重点中学中年骨干教师编写的《高三数学教学指导》(上、下册)一书,供 95 届高三学生数学高考复习之用。此书发挥了编写老师各自的特点,在严格讲究实用性和时代感的同时,力争编成具有独特风格的适应各种层次读者欢迎的好书。

上册为第一轮复习之用,全书共分 116 节,全面覆盖了高中数学所有的知识点,每节分四部分:

(一)提要 这一部分紧扣高考大纲,对每一个知识点,每一个公式和每一节涉及的解题方法与技巧作了比较系统详尽的介绍。

(二)范例 重点突出选择题、填空题解题方法的评讲,一般地说,例题中出现的选择题与填空题,不仅具有典型性和深刻性,同时考虑到实用性和启发性。选取小、巧、活的例题重点分析,这是本书的最大特点之一。

(三)练习 一般是选择题、填空题各三道,中档题二至三道。

(四)评点 实际上是解题方法与重要知识点的再一次强化。一般地说,这一部分的内容既要启发思路,又要增强系统性和学习的兴趣,它也确实本书的又一大特色。

上册从 9 月 1 日开始使用,至明年 3 月底结束。

下册为第二轮复习用书。它是重点难点的进一步强化,思想方法的又一次训练。两个月用完此书。

参加上册编写的有:宜兴市中学张嘉瑾、无锡市一中周祥昌、扬州五中袁桐、江阴市南菁中学余亚夫、祁建新、省常州中学周敏泽、陆月明、梁丰中学顾树柏、无锡县梅村中学李德周、海安中学何明、无锡天一中学浦云龙、苏州浒关中学朱建明、海门四甲中学朱国兴、山东济宁市实验中学王汉岭、四川大竹县中黄景浩、开封高级中学时义等。参加下册编写的有:宜兴市中学张嘉瑾、昆山中学吴中强、省溧阳中学朱心红、宜兴阳羨中学吴镔、江阴市中学赵一中、山东济宁市实验中学王汉岭等,由张嘉瑾老师统稿。秦淦、徐平五等老师在组稿、编写、审稿中做了大量的工作。

我们在编写时虽作了较大的努力,希望它成为同类书中的佼佼者,更希望全国各地的读者都能喜欢。但限于水平,不当之处敬请读者赐正,在明年修改时力求更上一层楼。

编写组

95.5

题 释

何为重点?何为热点?

热点即重点。

热点为重点中之重点。

抓牢热点,意味着握住了高

考命题之魂。

目 录

第一部分 热点评述与测试

热点之一 函数性质及其应用	(1)
§1 集合的运算	(2)
§2 函数的性质	(3)
§3 函数的图象与数形结合思想	(6)
§4 函数的综合问题及应用	(9)
强化与测试(一)	(12)
热点之二 方程与不等式	(14)
§1 方程问题综述	(14)
§2 不等式的证明	(17)
§3 解不等式	(19)
§4 不等式的应用	(22)
强化与测试(二)	(25)
热点之三 等差数列与等比数列	(27)
§1 等差数列与等比数列的概念及基本运算	(27)
§2 等差数列、等比数列的性质及应用	(29)
§3 等差数列、等比数列的综合应用	(32)
§4 数学归纳法	(35)
强化与测试(三)	(38)
热点之四 复数	(40)
§1 复数的概念	(40)
§2 复数的运算	(42)
§3 复数与几何	(44)
§4 复数的综合运用	(47)
强化与测试(四)	(50)
热点之五 三角函数的性质及三角变换	(52)
§1 三角函数的性质	(52)
§2 三角函数图象及应用	(56)
§3 三角恒等变换	(58)
强化与测试(五)	(62)
热点之六 空间角、距离及体积计算	(64)
§1 空间角的计算	(64)

§ 2 空间距离的计算·····	(68)
§ 3 几何体的体积计算·····	(71)
强化与测试(六)·····	(75)
热点之七 直线与二次曲线·····	(77)
§ 1 基本概念与基本方法的应用·····	(77)
§ 2 二次曲线的基本问题·····	(79)
§ 3 直线与二次曲线的位置关系·····	(81)
§ 4 轨迹问题·····	(84)
强化与测试(七)·····	(87)

第二部分 重要方法及典型问题

方法之一 配方法·····	(89)
§ 1 配方法的基本应用·····	(90)
§ 2 配方法的综合应用·····	(92)
强化与测试(八)·····	(95)
方法之二 待定系数法·····	(97)
§ 1 一些常见的题型·····	(97)
§ 2 待定系数法的应用·····	(100)
强化与测试(九)·····	(102)
方法之三 数形结合及定义法·····	(104)
§ 1 数形结合·····	(104)
§ 2 定义法·····	(106)
强化与测试(十)·····	(109)
方法之四 分类讨论·····	(111)
§ 1 分类的原则·····	(111)
§ 2 分类讨论的重要题型·····	(113)
强化与测试(十一)·····	(116)
方法之五 应用题及探索型问题·····	(118)
§ 1 应用问题·····	(118)
§ 2 探索型问题·····	(120)
强化与测试(十二)·····	(123)

第三部分 解答或提示

解答或提示·····	(125)
------------	-------

第一部分

热点评述与测试

(第二轮复习)

热点之一 函数性质及其应用

• 热点简析 •

众所周知,函数是中学数学的主线.有人说,学好了函数,就基本了解和熟悉了数学方法,这话绝不过分,我们将函数比作一条纽带,因为它把中学数学的各个分支紧紧地连在一起.又有人说:无处不函数,这就进一步强调了函数概念广泛的渗透性.一次函数、二次函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数……,这一块块基石,支撑着数学这座灿烂辉煌的宏大迷宫,而对函数的各种性质的讨论,犹如跨进这座迷宫大门的第一步.

函数的本质问题是定义域、对应法则和值域,对函数性质的讨论,又统统建立在定义域的基础上.

学好函数,能熟练地应用其性质和图象解题,这是必须具备的基本素质,在这里,我们开始学习数学的解题方法和思想方法,我们也将清楚地认识到,这些方法决不是孤立地存在着,它们彼此渗透,相互融和,如果我们能站在数学思想方法的高度,去纵览这一章的所有内容,我们定会获得更新、更深刻的感受.须知,学会用数学思想方法去思考和解决问题,这是系统地理解数学本质的开始,这一章的内容就基本上容纳了中学数学中的所有的解题方法和思想方法,这也从另一个侧面反映了函数性质应用的广泛性、解法的多样性和思维的创造性.

这就是为什么“函数”成为历年来高考命题最热的热点的真正理由.

在第一轮复习结束之后,回过头来对函数这一部分内容作一次强化,必须先对基本概念和基本性质有一个系统的再认识,然后讨论一些综合性问题和它在各种场合的应用,只有这样才能进入一个更高的数学境界.

未来的高考,函数比重仍然较大,不仅会考查一般基础知识的活用,而且可能出现某些综合性较强的“压轴题”,因此,对这一部分内容的复习,决不可掉以轻心.

学然后知不足,相信你在又一遍的复习之后,会有更新的感受和收获.

· 热点综述 ·

§1 集合的运算

集合问题的中心,一是元素的互异性;二是子、交、并、补的运算。空集在某些场合所起的作用是特殊的,解题时,遗漏对空集的讨论,时有发生。

一、范例

例1 (1) 已知集合 $A = \{0, 2, 3, 7\}$, $B = \{x | x = a \cdot b, a, b \in A\}$, 则 B 的子集的个数是 ()

- (A) 16 (B) 32 (C) 64 (D) 128

(2) 设 I 是全集, M, N 是非空集合, 且 $M \subset N \subset I$, 下列结论中不正确的是 ()

- (A) $\overline{M} \cup N = I$ (B) $M \cup N = N$ (C) $M \cap \overline{N} = \emptyset$ (D) $\overline{M} \cap N = \emptyset$

分析 对于题(1), 只要抓住两点: 其一, B 中有几个元素(互异性)? 其二, 不要遗忘空集。

结论 设集合有 n 个元素, 则其子集个数是 2^n , 非空真子集有 $2^n - 2$ 个。而题(2)画一张韦恩图, 就清楚了。

韦恩图, 是进行集合的子、交、并、补运算的主要方法之一。

例2 设集合 $A = \{1, 3, x\}$, $B = \{1, x^2\}$, 若 $B \subset A$ 且 $x \in B$, 则 $A =$ _____。

分析 由 $x \in B$ 知 $x \neq x^2$, 即 $x \neq 0$, 因此只能 $x^2 = 3$, $x = \pm \sqrt{3}$ 。

$\therefore A = \{1, 3, \pm \sqrt{3}\}$, 错了! 最直观的感觉就是: A 不是四元素集。

正确结论: $A = \{1, 3, \sqrt{3}\}$ 或 $A = \{1, 3, -\sqrt{3}\}$, 请读者注意这“或”字。

思考 设 $I = \{1, 3, x\}$, $B = \{1, x^2\}$, 若 $B \cup \overline{B} = I$, 则 $x =$ _____。

(答: $x = 0$ 或 $\pm \sqrt{3}$)

例3 设 $A = \{x | |x| \leq 4, x \in R\}$, $B = \{x | |x - 3| \leq a, x \in R\}$, 若 $A \supseteq B$, 那么 a 的取值范围是 _____。

分析 结论是 $0 \leq a \leq 1$ 吗? 错了! 遗忘了 $B = \emptyset$, 只有在反复的强化中, 对空集在解题中的特殊地位才能引起足够重视。

思考 已知 $A \subseteq B$, $A \subseteq C$, $B = \{1, 2, 3, 5\}$, $C = \{0, 2, 4, 8\}$, 则 $A =$ _____。

(答: $A = \emptyset$ 或 $A = \{2\}$)

例4 已知 $A = \{x | x^2 - x - 2 > 0\}$, $B = \{x | x^2 + 4x + p < 0\}$, 若 $A \cup B = A$, 求实数 p 的范围。

分析 $A \cup B = A$ 的含义是什么? $B \subseteq A$ 。注意, 不要遗漏 $B = \emptyset$, 而当 $p \geq 4$ 时, $B = \emptyset$, 这样, 对字母 p 的分类讨论思想已初步形成。

因此, (1) 对二次三项式 $x^2 + 4x + p$, 当 $\Delta = 16 - 4p \leq 0$, 即 $p \geq 4$ 时, 满足题意;

(2) 当 $p < 4$ 时, 要满足 $B \subseteq A$, 必须 $-2 + \sqrt{4 - p} \leq -1$, 此时 $p \in [3, 4)$ 。

综合起来, 所求的 p 的范围是 $[3, 4) \cup [4, +\infty) = [3, +\infty)$ 。

二、练习

1. 已知集合 A, B, C 满足条件: $A \cup B = A \cup C$, 那么下列结论正确的是 ()

- (A) $A \cap B = A \cap C$ (B) $B = C$ (C) $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$ (D) $\overline{A} \cap B = \overline{A} \cap C$

2. 设集合 $p = \{x | x^2 + x - 6 = 0\}$, $Q = \{x | mx + 1 = 0\}$, 若 $Q \subset p$, 则实数 m 可取不同值的个数为 ()

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

3. 设全集 $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap \bar{B} = \{1, 2\}$, $A \cap B \neq \emptyset$, 则满足上述条件的集合 $\bar{A} \cap B$ 的个数是 _____.

4. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B \subset A$, 且 $1 \in (A \cap B)$, $5 \notin (A \cap B)$, 则满足条件的集合 B 的个数是 _____.

5. 设集合 $A = \{x | (x+2)(x+1)(x-1) > 0\}$, $B = \{x | x^2 + ax + b < 0\}$, $A \cup B = \{x | x+2 > 0\}$, $A \cap B = \{x | 1 < x \leq 3\}$, 求 a, b 之值.

6. 已知 $A = \{x | \frac{a}{x+3} \leq 1\}$, $B = \{x | x^2 + px + q \leq 0\}$, 若 $A \cup B = R$, $A \cap B = \{x | 0 \leq x \leq 4\}$, 求 a, p, q 之值.

§2 函数的性质

对函数性质的讨论, 这是解决函数及有关问题的基础, 挖掘隐含着的函数的性质, 往往能找到解题的捷径.

一、范例

例1 下列选择题用什么方法解最好?

(1) 函数 $f(x) = x^2 + 2(a-1)x + 2$ 在区间 $(-\infty, 4)$ 上是减函数, 那么实数 a 的取值范围是 _____.

(A) $a \geq 3$ (B) $a \leq -3$ (C) $a \leq 5$ (D) $a = -3$

(2) 定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 以 2 为周期, 已知当 $x \in [2, 3]$ 时, $f(x) = x$, 那么 $x \in [-2, 0]$ 时, $f(x)$ 的解析式为 _____.

(A) $f(x) = x + 4$

(B) $f(x) = 2 - x$

同不然 (C) $f(x) = 3 - |x + 1|$ (D) $f(x) = 2 + |x + 1|$ 合题意

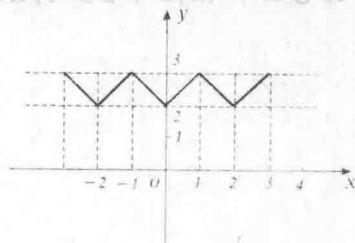
分析 解选择题的方法多种多样,对于具体的问题,什么方法最快呢?除了对基本概念和基本方法必须相当熟练外,还要有较高的灵敏度与较强的应变能力。往往一个反例,就能否定几个选择支,而选反例又必须首先寻找合适的特殊值,故特殊值排除法应当是最重要、最基本的方法之一。

这里给出的两题,都可以用特殊值排除法来解。

(1) 取 $a = 3$, $f(x) = (x + 2)^2 - 2$ 在 $(-\infty, -2]$ 上单调递减,与题设矛盾,排除(A)、(C),再取 $a = -5$ 满足题意,故(B)正确。

(2) 由 $f(x)$ 为偶函数知, $f(2) = f(-2) = 2$,排除(B)、(D)。又以 2 为周期,数 $f(0) = f(2) = 2$,排除(A),选(C)。

多么爽快!当然,画图亦是一种方法, $f(x)$ 在 $[-2, 3]$ 上的图象如右:



由图可知, $x \in [-2, 0]$ 时, $f(x)$ 的解析式为 $3 - |x + 1|$ 。

例 2 解下列填空题:

(1) 函数 $y = \log_a x$ 在区间 $[2, +\infty)$ 上恒有 $|y| > 1$, 则 a 的取值范围是_____。

(2) $f(x) = x^2 + \lg(x + \sqrt{1 + x^2})$, 若 $f(2) = 4.627$, 则 $f(-2) =$ _____。

分析 快速而准确地解答填空题,不仅对双基的活用提出了高要求,而且也是对我们心算能力的鉴定。决不是任何一道填空题都是一算到底获得结论的,挖掘隐含条件,套用现成的结论,借助图形,充分利用数学基本方法,都有可能启发我们省时省力。比如题(1),取特殊值,结合考虑对数函数的图象,就能快速解答。而题(2),一旦判断出 $g(x) = \lg(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 为奇函数,那么问题解决得就很干脆。

略解 (1) 取特殊值 $y = \log_2 x$ 与 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ (特殊值的含义是广泛的,特殊的常数、特殊的图象,甚至可以是特殊的符号!),由对数函数的性质知,

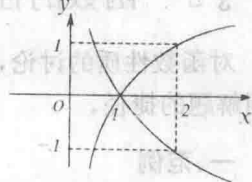
满足题意的 a 的范围是 $(\frac{1}{2}, 1) \cup (1, 2)$ 。

(2) 设 $g(x) = \lg(x + \sqrt{1 + x^2})$, 则 $g(x)$ 为奇函数。

$\because f(x) = x^2 + g(x)$ 又 $f(-2) = 4 + g(-2)$
 $= 4 - g(2)$,

而 $f(2) = 4 + g(2) = 4.627$, 故 $g(2) = 0.627$,

$\therefore f(-2) = 4 - 0.627 = 3.373$ 。



例 3 设函数 $f(x) = \frac{ax^2 + 1}{bx + c}$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$) 是奇函数,且在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, $f(1) = 2$, $f(2) < 3$, (1) 求 a, b, c 之值; (2) 证明 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上是减函数; (3) 作出 $f(x)$ 的图象。

分析 本题涉及了函数的相当多的概念和性质,对它深入研究,能帮我们开拓思路,在解题过程中,用到了哪些解题方法和思想方法呢?

略解 (1) 由题意

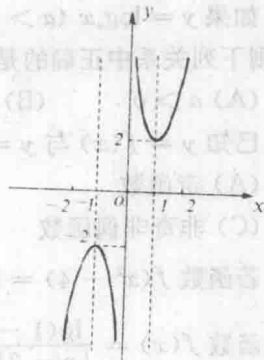
$$\begin{cases} c=0 & (f(x) \text{ 为奇函数}) \\ a=2b-1 & (f(1)=2) \\ 2 < \frac{4a+1}{2b} < 3 & (f(2) < 3 \text{ 且 } f(x) \text{ 在 } [1, +\infty) \text{ 上单调增}) \end{cases}$$

$\therefore c=0, b=1, a=1$, (解题方法: 待定系数法)

故 $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$.

(2) 用函数单调性的定义证明.

(3) $y=f(x)$ 的图象如右:



说明 由 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 得

$f(2) > f(1) = 2$, 这是一般到特殊的推理方法, 而这一条件的挖掘, 又是解决问题的关键.

一般地, 求作函数(或方程)的图象, 必须考虑: ① 定义域; ② 值域; ③ 奇偶性; ④ 单调性; ⑤ 周期性; ⑥ 处理好特殊的点或渐近线.

例 4 设 $f(x) = x^2 - 2ax + 2$, 当 $x \in [-1, +\infty)$ 时 $f(x) \geq a$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

分析 “恒成立”三个字是“题眼”(“题眼”是指: 命题中的关键字、词或条件, 它主宰着全题.)

思路 1 在 $[-1, +\infty)$ 内, $f(x)$ 的最小值大于或等于 a (辩证思想!)

思路 2 有关二次三项式之值恒大于或等于零的问题, 考虑利用“ Δ ”(函数思想、数形结合!).

思路 3 数形结合的思想.

解法 1 由题意, $a \leq x^2 - 2ax + 2$ 在 $[-1, +\infty)$ 内恒成立,

而 $f(x) = x^2 - 2ax + 2 = (x-a)^2 + 2 - a^2$ 在 $[-1, +\infty)$ 上的最小值是

$$[f(x)]_{\min} = \begin{cases} 2 - a^2, & a \in [-1, +\infty) \\ (1+a)^2 + 2 - a^2, & a \in (-\infty, -1], \end{cases}$$

由 $a \leq [f(x)]_{\min}$ 知 $a \in [-3, 1]$

解法 2 $f(x) \geq a \Rightarrow x^2 - 2ax + 2 - a \geq 0$ 在 $[-1, +\infty)$ 上恒成立的条件是

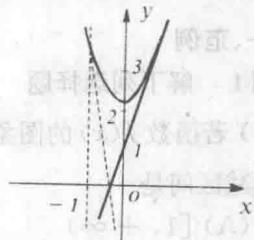
$$(1) \Delta \leq 0 \Rightarrow a \in [-2, 1];$$

$$(2) \begin{cases} \Delta > 0 \\ a < -1 & (\text{对称轴} \Rightarrow a \in [-3, -2]) \\ f(-1) \geq 0 \end{cases}$$

综合起来, $a \in [-3, 1]$.

解法 3 由 $f(x) \geq a$ 知 $x^2 + 2 \geq a(2x+1)$

令 $y_1 = x^2 + 2$, $y_2 = a(2x+1)$, 作图象如右,



当 y_2 与 y_1 相切及 y_2 过点 $(-1, 3)$ 时为极限位置, 可知 $a \in [-3, 1]$.

说明 提供给读者三种解法的真正目的是在一题多解中激发智力, 解题的灵活性和选取最优解必须在长期的艰苦的训练中才能达到理想的目的.

二、练习

1. 如果 $y = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象与 $y = \log_b x$ ($b > 0$ 且 $b \neq 1$) 的图象关于 x 轴对称, 则下列关系中正确的是 ()
(A) $a > b$ (B) $a < b$ (C) $ab = 1$ (D) a, b 关系无法确定
2. 已知 $y = f(x)$ 与 $y = -f(x)$ 的图象关于原点对称, 则 $y = f(x)$ 是 ()
(A) 奇函数 (B) 偶函数
(C) 非奇非偶函数 (D) 既是奇函数又是偶函数
3. 若函数 $f(x^2 - 4) = \lg \frac{x^2}{x^2 - 8}$, 则 $f(x)$ 的定义域是 _____.
4. 函数 $f(x) = \frac{\lg(1 - x^2)}{|x - 2| - 2}$ 的奇偶性是 _____.
5. 若 $f(x) = x^{\frac{1}{1-k}}$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 则绝对值最小的整数 $k =$ _____.
6. $y = \lg|x^2 - 2x + 1|$ 的单调递减区间是 _____.
7. 设 $f(x)$ 是定义域为 R 的单调奇函数, 且 $f(1) = -2$, 若 $f(k \cdot \log_2 t) + f(\log_2 t - \log_2^2 t - 2) > 0$, 求实数 k 的取值范围.
8. 若 $y = \log_2(x^2 - ax - a)$ 在区间 $(-\infty, 1 + \sqrt{3})$ 上是增函数, 求 a 的取值范围.

§ 3 函数的图象与数形结合思想

数与形相辅相成, 互为补充. 数形结合思想在这一章中表现得非常突出. 根据所给条件严密而正确地画出图象, 必须达到十分熟练的程度.

一、范例

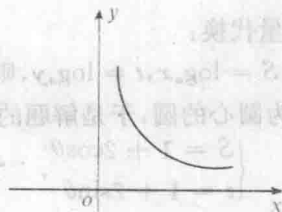
例 1 解下列选择题

- (1) 若函数 $f(x)$ 的图象与函数 $g(x) = (\frac{1}{3})^x$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称, 则 $f(2x - x^2)$ 的单调减区间是 ()
(A) $[1, +\infty)$ (B) $(0, 1]$ (C) $[1, 2)$ (D) $(-\infty, 1]$
- (2) 函数 $y = x^{\frac{m}{n}}$ ($m, n \in Z, m \neq 0, m, n$ 互质) 的图象大致如图, 那么下列结论可能成立的是 ()
(A) $mn > 0, m, n$ 为奇数 (B) $mn > 0, m$ 为偶数, n 为奇数
(C) $mn < 0, m, n$ 为奇数 (D) $mn < 0, m$ 为偶数, n 为奇数

分析 (1) $f(x)$ 的表达式是什么? $f(2x - x^2)$ 呢?

本题考查了哪些主要的知识点? 误选(D) 常见, 忘记了复合函数的定义域受原函数定义域的制约。

(2) 从给出的图象中可以至少得到以下启示: x 的定义域 $(0, +\infty)$, 故 m 为偶数, 又图象与 x, y 轴均无交点, 则 $\frac{n}{m} < 0$ 。



在对条件的分析中去伪存真, 这是解选择题的又一基本方法。

例2 解下列填空题

(1) $x \in [-1, 1]$, 若函数 $f(x) = ax + a + 1$ 的值可正可负, 则 a 的取值范围是_____。

(2) 已知 $f(x) = |\log_2 x|$, 当 $0 < a < b < 2.5$ 时, 有 $f(a) > f(b) > f(2.5)$, 则 a 的取值范围是_____。

分析 (1) 首先发觉 $f(x)$ 是一次函数, 一次函数单调, 其值可正可负,

因此 $f(-1) \cdot f(1) < 0$ 。

(2) 将 $f(x) = |\log_2 x|$ 的图象画出来, 若满足条件, 只能 $\log_2 a < 0$ 且 $-\log_2 a > \log_2 2.5$, 故 $a \in (0, \frac{2}{5})$ 。

在解题过程中, 合理地构造一个图象, 不但可以打开思路, 而且会帮助我们快速作出判断。

例3 设 $f(x) = x^2 - (a+3)x + 3a, x \in R$, 若对任意的实数 a , 函数 $y = f(x)$ 的图象不过点 $(2p, p^2)$, 求实数 p 的值。

分析 何为不过点 $(2p, p^2)$? 这是理解题意的开始, 意思就是说此点坐标不满足方程。

将 $(2p, p^2)$ 的坐标代入函数 $f(x) = x^2 - (a+3)x + 3a$, 得 $4p^2 - (a+3)2p + 3a = p^2$, 整理成 $(3-2p)a + 3p^2 - 6p = 0$,

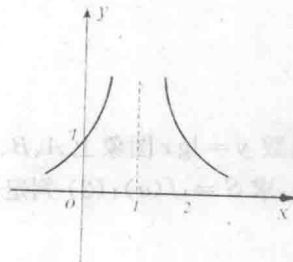
要使得任意实数 a 上面方程不成立, 当然有 $3-2p=0$ 且 $3p^2-6p \neq 0$, 故 $p = \frac{3}{2}$ 。

说明 将问题转化到熟悉的状况中来, 是解题的一种重要策略。

例4 求作 $y = \frac{1}{(x-1)^2}$ 的图象。

分析 求作函数的图象, 是函数性质的综合应用, 描点法是最基本的方法, 缺点是麻烦。通常情况下, 总是通过平移、对称等变换, 再讨论其性质, 描出特殊点, 去实现目的。

解 函数定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$; 值域 $(0, +\infty)$; 它是非奇非偶函数; 亦非周期函数; $(-\infty, 1)$ 上单调递增, $(1, +\infty)$ 上单调递减, 对称轴 $x=1$ 。



例5 已知 $x \geq 1, y \geq 1$, 且满足 $\log_a^2 x + \log_a^2 y = \log_a(ax^2) + \log_a(ay^2)$ ($a > 1$), 求 $\log_a(xy)$ 的最大值和最小值。

分析 这是关于 $\log_a x$ 与 $\log_a y$ 为变量的二次方程, 能否将表达式变形得简化而明了些呢?

变量代换:

令 $S = \log_a x, t = \log_a y$, 则原方程即为 $(S-1)^2 + (t-1)^2 = 4 (S \geq 0, t \geq 0)$, 这是一以 $(1, 1)$ 为圆心的圆, 于是解题的思路就完全通畅了!

$$\text{令 } \begin{cases} S = 1 + 2\cos\theta \\ t = 1 + 2\sin\theta \end{cases}, \because S \geq 0, t \geq 0,$$

$$\text{故 } \begin{cases} \cos\theta \geq -\frac{1}{2} \\ \sin\theta \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right] \quad (\text{只要取这一区间就够了})$$

$$\log_a(xy) = s + t = 2 + 2\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right), \text{ 而 } \frac{\pi}{12} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{11\pi}{12},$$

$\therefore \log_a(xy)$ 的最大值为 $2 + 2\sqrt{2}$, 此时 $\theta = \frac{\pi}{4}$; $\log_a(xy)$ 最小值为 $1 + \sqrt{3}$,

此时 $\theta = -\frac{\pi}{6}$, 或 $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

二、练习

1. 函数 $y = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ 的图象是 ()

(A) 两条直线 (B) 抛物线 (C) 两条射线 (D) 直线

2. 若函数 $y = f(x)$ 的图象过点 $(0, 1)$, 则 $f(4-x)$ 的反函数的图象过点 ()

(A) $(3, 1)$ (B) $(1, 3)$ (C) $(4, 1)$ (D) $(1, 4)$

3. 方程 $\lg x = 3 - x$ 的解 x 属于区间 ()

(A) $(0, 1)$ (B) $(1, 2)$ (C) $(2, 3)$ (D) $(3, +\infty)$

4. 若函数 $y = |\log_{\frac{1}{2}}|x + 1||$ 单调递增, 则 x 的范围是_____.

5. $y = \sqrt{x^2 + 4} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}$ 的最小值是_____ (利用单调性).

6. 求作函数 $y = \sqrt{(2^x - 1)^2 - 1}$ 的草图.

7. 函数 $y = \lg x$ 图象上 A, B, C 三点的横坐标分别是 $a, a+2, a+4 (a > 1)$, (1) 若 $\triangle ABC$ 面积为 S , 求 $S = f(a)$; (2) 判定函数 $S = f(a)$ 的单调性; (3) 求函数 $S = f(a)$ 的值域.

§ 4 函数的综合问题及应用

函数的重要性,主要表现在它自身的深刻性和应用的广泛性。

一、范例

例1 解下列选择题

(1) 设函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称, 当 $x \leq 1$ 时, $f(x) = (x+1)^2 - 1$, 则当 $x > 1$ 时, $f(x)$ 的解析式是

(A) $f(x) = (x+3)^2 - 1$

(B) $f(x) = (x-3)^2 - 1$

(C) $f(x) = (x-3)^2 + 1$

(D) $f(x) = (x-1)^2 - 1$

(2) 若对于一切 $x \in \mathbb{R}$, 偶函数 $f(x)$ 恒满足 $f(m+x) = f(x)$, ($m \in \mathbb{R}$ 且 $m \neq 0$), 那么函数 $y = f(x)$ 的图象

(A) 关于直线 $x = m$ 对称

(B) 关于直线 $x = \frac{m}{2}$ 对称

(C) 关于直线 $x = 2m$ 对称

(D) 除 y 轴外再也没有对称轴

分析 题(1), 用特殊值排除法, 目的是让读者进一步熟练这一方法。点 $(-1, -1)$ 在函数的图象上, 而它关于 $x = 1$ 对称的点为 $(3, -1)$, 满足此点坐标的唯有(B)。

再看题(2), 由 $f(x)$ 是偶函数知, $f(m+x) = f(x) = f(-x)$ 。

$$\therefore f(m+x) = f\left[\frac{m}{2} + \left(\frac{m}{2} + x\right)\right] = f\left[\frac{m}{2} - \left(\frac{m}{2} + x\right)\right] = f(-x),$$

因此, $y = f(x)$ 的图象的对称轴为 $x = \frac{m}{2}$ 。

例2 解下列填空题

(1) 方程 $\log_2(x+4) = 3^x$ 的实数根的个数为_____。

(2) 已知关于 x 的方程 $5^x = \frac{a+3}{5-a}$ 有负根, 则实数 a 的取值范围是_____。

分析 (1) 一眼就看出利用图象来判断方程根的个数。

(2) 方程有负根, 获得以下两条思路: 其一, 取 5 为底的对数, $x = \log_5 \frac{a+3}{5-a} < 0$;

其二, 作出 $y = 5^x$ 与 $y = \frac{a+3}{5-a}$ 的图象, 其交点在 y 轴左侧, 必须 $0 < \frac{a+3}{5-a} < 1$ 。

例3 已知 $f(x) = x^2 - ax, x \in [1, +\infty)$, (1) 求 $f(x)$ 的最小值 $m(a)$; (2) 求函数 $f(a) = m(a) - a^2$ 的最大值。

分析 函数最值问题容纳了函数的所有性质以及解题的许多方法与技巧, 熟练多种最值问题的求法, 这是对初等数学的一次深层次的理解。

解 (1) $\because f(x) = x^2 - ax = (x - \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4}, x \in [1, +\infty)$,

$$\text{故 } m(a) = \begin{cases} -\frac{a^2}{4} & (a \geq 2) \\ 1 - a & (a < 2) \end{cases}$$

$$(2) \because f(a) = \begin{cases} -\frac{a^2}{4} - a^2 & (a \geq 2) \\ 1 - a - a^2 & (a < 2) \end{cases} \therefore [F(a)]_{\max} = \frac{5}{4}, \text{ 此时 } a = -\frac{1}{2}.$$

思考 已知函数 $f(x) = |x^2 - 1| + m|x + 1| + a$ 有最小值 $f(2) = -4$, 求 (1) a, m 之值; (2) $f(1 - 2x)$ 的递增区间.

(答: (1) $a = 5, m = -4$; (2) $(-\frac{1}{2}, 1) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$)

例 4 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2, AD = 4$, 在 BC 边上有一个动点 P , 现将矩形右下角折起, 使点 A 与点 P 重合, 折痕 MN 的两端点 M, N 分别在 AB, AD 上;

(1) 设 $\angle PAB = \theta$, 用 θ 表示线段 MN 的长 $f(\theta)$;

(2) 求函数 $f(\theta)$ 的定义域;

(3) 当 θ 为何值时, $f(\theta)$ 有最小值, 最小值是多少?

分析 当 A 与 P 重合时, 折痕 MN 与 AP 有什么特殊的关系呢?

略解 (1) 由 $AM = PM, AN = PN$ 知 MN 为 AP 的中垂线, 设垂足为 E ,

则 $AP = 2\sec\theta, AE = \sec\theta, AM = \sec^2\theta$,

故 $MN = \sec^2\theta \cdot \csc\theta$, 即 $f(\theta) = \frac{1}{\sin\theta \cdot \cos^2\theta}$.

(2) 显然, P 在 BC 中点时, $\angle PAB$ 最大 (否则 P 点向 C 靠近时, 点 M 将不在线段 AB 上), 此时 $\angle PAB = \frac{\pi}{4}$, 当 $PD = AD = 4$ 时, $\angle PAB$ 最小, (否则 P 点向 B 靠近时, AP 的垂直平分线与线段 AD 无交点), 此时 $\angle PAB = \frac{\pi}{12}$, 因此 $f(\theta)$ 的定义域为 $[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}]$.

(3) $\because \theta \in [\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}]$, $\therefore f(\theta) > 0$,

当 $[f(\theta)]^2 = \frac{1}{\sin^2\theta \cdot \cos^4\theta}$ 有最小值时, $f(\theta)$ 也有最小值.

$$\because \sin^2\theta \cdot \cos^4\theta = 4\sin^2\theta \cdot \frac{\cos^2\theta}{2} \cdot \frac{\cos^2\theta}{2} \leq 4 \left[\frac{\sin^2\theta + \frac{\cos^2\theta}{2} + \frac{\cos^2\theta}{2}}{3} \right]^3 = \frac{4}{27},$$

$\therefore$ 当 $\theta = \arctg \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $f(\theta)$ 有最小值 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

二、练习

1. 设函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$, 已知 $f(x)$ 的两根分别在 $(1, 2)$ 和 $(2, 3)$ 之间则

(A) $f(1) \cdot f(2) \geq 0$

(B) $f(1) \cdot f(2) \leq 0$

(C) $f(1) \cdot f(3) < 0$

(D) $f(1) \cdot f(3) > 0$

2. $f(x)$ 是定义在 R 上的非零函数, 且满足关系 $f(10+x) = f(10-x)$, $f(20-x) = f(20+x)$, 则 $f(x)$ 是

(A) 偶函数又是周期函数

(B) 偶函数不是周期函数

(C) 奇函数又是周期函数

(D) 奇函数不是周期函数

3. 集合 $A = \{(x, y) | y = ax + 1\}$, 集合 $B = \{(x, y) | y = |x|\}$, 若 $A \cap B$ 是单元素集, 则 a 的取值范围是_____.

4. 设 a 是大于 0 的常数, 则 $f(x) = \lg a + \lg(-x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{a^2}})$ 的图象关于_____