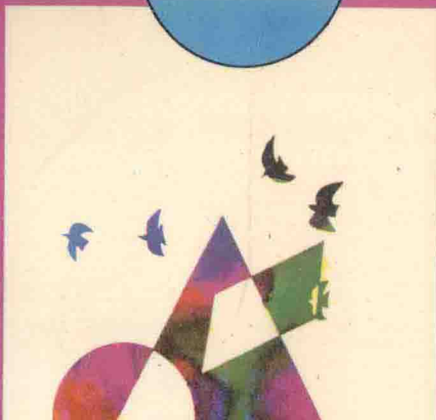
省成人中专教材

数学教程辅导与练习

江苏省教育委员会编

下册



河海大学出版社

江苏省成人中专教材

数 学 教 程

辅导与练习（下）

河海大学出版社

责任编辑　谢业保

数学教程辅导与练习(上、下)

出版发行:河海大学出版社
(地址:南京市西康路1号　邮政编码:210098)
印刷:南京金阳彩色印刷厂
(地址:江宁县丹阳镇　　邮编:211157)

开本　787×1092毫米　1/32　印张:6.375　字数:145千字
1996年8月第2版　　1997年8月第2次印刷
印数　1～25,000册

ISBN 7－5630－0862－4

G·129　　定价:4.60元(上)　4.80元(下)

前　言

遵照省教委指示，并应广大教师和学员的要求，在省教委成人学校教导处带领下，我们编写了这本《数学教程辅导与练习》(上、下册)，与成人中专数学教材配套使用。

《数学教程辅导与练习》按教材章节顺序编写，每章中的每一大节为一个单元，每个单元设“基本要求”、“教材说明”、“例题分析”、“自测题”、“教材练习答案”五个栏目。本书附有教材中的练习、习题、自我检查题的答案及提示，每章后又附了一份自我检查题。

“基本要求”　具体指出单元学习要达到的目标。

“教材说明”　指出教材内容的层次以及重点、难点，对一些知识点进行释疑、解惑。

“例题分析”　运用教材中的例题或另举例题，进行分析，力求归纳出题型，揭示解题规律，以帮助学员提高解题能力。

“自测题”　选编一些与教材中练习、习题难度相当的题目，以使学员及时消化、巩固所学教学内容。

“教材练习答案”　供学员在学习中自我评价。

参加本书编写的有王国华、沙小宏、王友林、项复民、杨大仁、仲善堡、黄中元、尤顺祥、杨万成。在编写过程中得到有关市教育行政部门和学校的大力支持，在此表示衷心的感谢。由于编者水平有限，敬请专家、成人中专校的数学教师和读者提出宝贵意见，以便修改。

江苏省成人中专数学教材编写组

一九九五年三月

目　录

第十一章 极限与连续的初步知识

微积分以初等函数为主要研究对象. 本章主要研究初等函数、极限、函数的连续性三个问题. 极限概念贯穿微积分的始终，许多重要概念如连续、导数、定积分等，都建立在极限的基础上，因此，极限概念的建立及极限的计算是本章的重点. 而极限的计算主要依靠极限的四则运算法则和两个重要极限. 由于今后的学习以函数为研究对象，故本书只研究函数极限. 函数的连续性借助函数极限定义的，同时又反过来解决了连续函数求极限的问题，在得出“初等函数在其定义域内是连续的”结论后，相应一批极限的计算就顺利解决了.

一、复合函数与初等函数

基本要求

明确基本初等函数的含义，理解复合函数的概念，会判定初等函数，能比较熟练地分解初等函数.

教材说明

本单元重点是，分解初等函数；难点是，分解初等函数.

为了顺利地达到上述目标，应该复习并熟悉：函数概念、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数的定义及其图象和性质，还有分段函数.

教材首先给出基本初等函数的定义；接着通过圆柱体的体积引出复合函数的概念，给出定义，指明理解定义的不可忽

视之点，提出学习复合函数的两点要求；在此基础上，又给出了初等函数的定义；最后，就“分解初等函数”的涵义作了阐述.在今后的学习中，基本上同复合函数打交道，因而，应该多下点功夫，比较好地解决对复合函数结构的认识，认清中间变量的层次以及它们间的衔接性，通过多做一些练习解决好这个问题.

判定初等函数，课本所列举的是肯定例证.下面两个函数就不是初等函数：

$$y=\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}+\cdots+\frac{x^n}{n+1}+\cdots;$$

$$y=\begin{cases}1,\text{若 } x \text{ 是有理数},\\0,\text{若 } x \text{ 是无理数}.\end{cases}$$

初等函数定义中的“有限次”和“用一个式子表示”是判定初等函数的关键性词语.

例题分析

本单元要会解三种类型的题目.

第一种象课本第 2 页例 1、例 2 那样，会把几个简单的函数合成为一个复合函数，课本指出：“复合的过程是利用中间变量依次代入的过程，”但要注意，中间变量的变化范围是能否成为复合函数的决定因素，课本第 2 页第 2 段提出的问题就是一例.

第二种是象课本第 3 页例题那样，会分解初等函数，这类题目是重点.所谓“分解”，课本第 3 页，已经作了明确的答复.解题步骤一般是这样的：将要分解的初等函数与有关基本初等函数相比较，如果位于有关基本初等函数自变量 x 的位置的不是简单的一个变量 x，而是含有用 x 来表达的一个式子，这样的函数就成了复合函数，这时，只要把那个“含有 x 的表

达式”设为一个新变量，就可把原来函数分解成两个函数. 例如 $y=\cos\sqrt{x}$，把 $\sqrt{x}$ 看作 u，则 $y=\cos\sqrt{x}$ 可分解为 $y=\cos u, u=\sqrt{x}$，前者是三角函数，后者是幂函数. 有时分解一次不能达到要求，就需要继续分解，如 $y=\ln[\ln(\ln x)]$，先把 $\ln(\ln x)$ 看作 u，则 $y=\ln[\ln(\ln x)]$ 可分解为 $y=\ln u, u=\ln(\ln x)$，后者还需要进一步分解，把 $\ln x$ 看作 v，则 $u=\ln(\ln x)$ 可分解为 $u=\ln v, v=\ln x$. 要注意的是，分解到一个函数是常数与基本初等函数的和、差、积、商时就可停止，就得最后结果. 例如 $y=(2x^3+x)^2$ 分解为 $y=u^2, u=2x^3+x$ 就可以了，因为 u 是幂函数与常数的积、和，已经符合“分解”的要求.

判定初等函数的题目，课本虽未列出，但应掌握用定义去判定的方法.

自测题

下面给出了函数的分解过程，请将其纠正：

1. $y=\sin x^2$

分解：$y=u^2, u=\sin x$；

2. $\sqrt{\sin\sqrt{x}}$

分解：$y=\sqrt{\sin u}, u=\sqrt{x}$；

3. $y=\sin^2(\ln x)$

分解：$y=\sin u, u=v^2, v=\ln x$；

4. $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

分解：$y=\dfrac{1}{u}, u=1-x^2$.

[正确的分解过程为：

1. $y=\sin u, u=x^2$；

2. $y=\sqrt{u}, u=\sin v, v=\sqrt{x}$;

3. $y=u^2, u=\sin v, v=\ln x$;

4. $y=u^{-\frac{1}{2}}, u=1-x^2$.]

教材练习答案

11.1 练习

1. (1) $y=\sqrt{x^2+1}$;　　(2) $y=\ln 3^{\sin x}$;

2. (1) $y=e^u, u=\cos x$;

   (2) $y=\ln u, u=\cos x$;

   (3) $y=e^u, u=x^2$;

   (4) $y=\cos u, u=e^v, v=x^2$;

   (5) $y=\arccos u, u=\dfrac{1}{x}$.

11.2 练习

1. $y=\sin u, u=314t+\dfrac{\pi}{6}$;

2. $y=a^u, u=v^{\frac{1}{3}}, v=x^2+1$;

3. $y=\ln u, u=\mathrm{tg}\, v, v=x+2$;

二、极限的概念

基本要求

了解函数极限的意义,会从自变量的变化趋势中,分析、观察因变量的变化趋势,能用极限概念去分析和解决一些简单的问题.

教材说明

教材根据教学大纲的精神,以介绍概念、方法和应用为

主，数学理论的严谨性为次．关于极限的概念，只要求用直观语言描述．本单元具体介绍了函数极限的描述性定义，学习时，重点应放在观察变量在某一“特定条件下”的变化趋势．

1．函数是以实数为自变量，是连续变化着的，根据函数的自变量的变化过程，教材介绍了4种函数极限的定义，即定义1、定义2、定义3、定义4．要注意运用表格和图象去领会这4种定义，在此基础上，不难看到，函数极限概念的本质是研究在自变量的某种趋向下函数的变化趋势问题．

2．教材定义4后的注意1说明：在x无限趋近于x_0时，仅与函数$f(x)$在点x_0附近的函数值的变化有关，而与函数$f(x)$在点x_0的值无关，甚至点x_0可以不属于函数$f(x)$的定义域．

例题分析

从运算的角度来说，求极限是数学中的一种重要运算．极限运算与代数运算不同，代数运算是有限运算，极限运算是无限运算．运用本单元介绍的几种极限定义去求极限，其方法已在课本例3的解中指明，即：运用表格和图象或直接从函数关系式进行观察．容易看到，用这样的办法求极限，能解决的问题实在有限！

自测题

1．已知函数$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，求$\lim\limits_{x\to 0}y$、$\lim\limits_{x\to -\infty}y$、$\lim\limits_{x\to +\infty}y$、$\lim\limits_{x\to \infty}y$

［1、不存在、0、不存在］

2．已知函数

$$y=\begin{cases}-1 & x<0,\\ 0 & x=0,\\ 1 & x>0.\end{cases}$$

求$\lim\limits_{x\to 0}x$. ［不存在,因为在 x 从大于 0 或小于 0 的方向趋近于 0 时,y 不趋近于一个确定的实数］

教材练习答案

11.3 练习

1. 0；　2. 0；　3. 1；　4. 0；　5. 2；

6. $\frac{1}{2}$；　7. 1；　8. 3.

三、极限的四则运算

基本要求

明确函数极限的四则运算法则,并能熟练地运用它们计算极限.

教材说明

本单元重点是会用极限的四则运算法则求极限,难点是,对函数解析式进行适当的恒等变换.为此要复习并熟悉:因式分解、根式的有理化、分式运算、等差数列求和公式等知识.

1. 数学中引进一种新的运算后,往往要建立其运算法则,对于极限是如此,今后将要学习的导数、积分也是如此.单凭定义去计算极限,只在某些特别简单的情况下才有可能,而建立了一些运算法则后,就可以把一些复杂的问题化为较简单的问题来处理.

课本指出的法则都是需要证明的，限于大纲要求没有给出证明，有兴趣的读者可以参阅较详细的微积分教本，这种情况后续教材中屡有出现，不再一一说明.

2. 教材说明2，揭示了极限四则运算法则的实质，学员要细心领会. 两种运算(极限运算与四则运算)的变换为求极限带来很大的方便.

3. 学习教材说明第2点时，应注意"有限个"这个量词. 例如，有人求

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}\right)$，是这样做的：

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}\right)\\
=&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}\\
=&0+0+\cdots+0\\
=&0.
\end{aligned}$$

这种运算步骤是错误的. 因为当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}$ 就不是有限个了，此时，法则失效！

例题分析

1. 教材列举6道例题，指明了运用极限四则运算法则的基本规律. 首先是法则中的前提条件要被满足，即：每个极限都要存在，法则3中分母的极限不能为零. 违背这一要求，即使最后结果被"碰对"，也是错误的.

2. 例1、例2因为满足法则的前提条件，故可以直接运用

法则求出极限.必须指出:今后求极限,这样的情况不多见,也就是说,多数情况是法则的前提条件不被满足,例 3 至例 6 的 4 道例题,就是介绍在这种情形下的处理办法的.

3. 当极限四则运算法则的前提条件不被满足时,就得采用教材最后指出的办法:根据具体情况对函数解析式作适当的恒等变换,使之符合条件.例 3、例 4 等用约去极限为零的公因式的办法,为了得到极限为零的因式,例 3 用了分解因式的方法,例 4 是有理化分母(有时也用有理化分子).例 5、例 6 采用的办法是,在函数解析式中分析出极限为零的一些式子,分子、分母中同除以分母中自变量的最高次幂,就是为了达到这一目的.

4. 本单元的例题和习题,集中在函数解析式是多项式或多项式的商,少数也涉及一些解析式为根式的和、积、商等.对于后者,其解法与前者基本一致.例如

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{x+\sqrt[3]{x}}{x}}{\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}=\frac{1}{1}=1.$$

本单元求极限的训练,应以熟悉法则为主,不搞难题、繁题.

自测题

1. 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1-x}$;[0]　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{1-x^2}$;[0]

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$.　[−1]

2. $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$,求:

(1) $\lim\limits_{x\to2}f(x)$; [3]　　(2) $\lim\limits_{x\to0}f(x)$;　[−1]

(3) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$. $\left[-\dfrac{3}{2}\right]$

3. $f(x)=\dfrac{x^3-x^2-6x}{2x-3x^2+x^3}$,求:

(1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$;$[-3]$　　(2) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$;$[1]$

(3) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$;$\left[-\dfrac{2}{3}\right]$　(4) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$;　$[0]$

(5) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$. $[0]$

4. 求出下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}$;$\left[\dfrac{1}{4}\right]$　(2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}$;$[0]$

(3) $\lim\limits_{x\to +\infty} [\sqrt{x}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})]$.　$\left[\dfrac{a}{2}\right]$

教材练习答案

11.4　练习

(1) 21;　(2) 29;　(3) -9;　(4) $3\dfrac{2}{3}$;　(5) $\dfrac{1}{x^2}$;

(6) $\dfrac{1}{2}$;　(7) $\dfrac{2}{3}$;　(8) 0;　(9) $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$;　(10) $2x$.

四、无穷小与无穷大

基本要求

明确无穷小、无穷大的定义及它们之间的关系,能比较无穷小以及运用无穷小的性质求有关的极限.

教材说明

本单元重点:无穷小、无穷大的概念.

1. 教材首先从存在极限的变量中分离出极限是零的变量，给出无穷小的定义，接着，由极限的四则运算法则导出无穷小的性质；进而研究与无穷小有密切关系的变量——无穷大，揭示了在自变量相同趋向下无穷小与无穷大间的关系，并且总结出在自变量趋向无穷大时求有理分式极限的法则；最后，研究了无穷小的比较.

2. 学习无穷小概念时，要注意以下几点：

(1) 无穷小只不过是极限值为 0 的变量；

(2) 因为是极限问题，故离不开极限过程，即不能笼统说哪个变量是无穷小，而一定要指出在自变量如何变化的条件下，因变量是无穷小.

(3) 无穷小不是一个很小的数，它是变量，变量和常数是有本质区别的，但作为特殊性说，常函数 $f(x)=0$ 是任何极限过程下的无穷小.

3. 无穷小性质 3 中的“有界量”，书中没有给出定义，只能从字面上去领会其含义. 在两个常数之间取值的量，那就是有界量，如 $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$，$\sin x$ 就是有界量.

4. 无穷大与无穷小一样，它也是一个变量，而且与自变量的变化趋向有关，同一个函数在自变量的不同趋向下，情况是不同的. 例如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，当 $x\to 0$ 时，$f(x)$是无穷大，而在 $x\to\infty$时，$f(x)$成为无穷小，当 $x\to x_0(x_0\neq 0)$时，$f(x)$有极限 $\dfrac{1}{x_0}$，既非无穷小，也非无穷大.

5. 课本归纳得到的当自变量趋向无穷大时，求有理分式极限的法则，可以直接应用.

6. 有限个无穷小的和、差、积仍是无穷小，这就是教材 11.5 中所讲的无穷小的性质. 两个无穷小之商究竟是什么？