应用数学学习指导与分层练习

YINGYONG SHUXUE XUEXI ZHIDAO YU FENCENG LIANXI

刘余猛◎主编

东北师范大学出版社
NORTHEAST NORMAL UNIVERSITY PRESS

应用数学学习指导与分层练习

主　编　刘余猛
参　编　张华娟　朱　锋

东北师范大学出版社
长　春

图书在版编目（CIP）数据

应用数学学习指导与分层练习 / 刘余猛主编. —长春：东北师范大学出版社，2015.8
ISBN 978-7-5681-1027-3

Ⅰ. ①应… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①应用数学—高等职业教育—教学参考资料 Ⅳ. ①O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 162421 号

□责任编辑：黄小凤　□封面设计：吴晋书艺坊
□责任校对：韩　烁　□责任印制：刘兆辉

东北师范大学出版社出版发行
长春净月经济开发区金宝街 118 号（邮政编码：130117）
电话：0431—85687213　010—82893125
传真：0431—85691969　010—82896571
网址：http://www.nenup.com
东北师范大学出版社激光照排中心制版
北京瑞富峪印务有限公司印装
北京市海淀区苏家坨镇前沙涧村（邮政编码：100194）
2015 年 8 月第 1 版　2015 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
幅面尺寸：185 mm×260 mm　印张：10.25　字数：240 千

定价：28.00 元

前　言

本书适用于高职院校工科专业、经济管理类文科专业的学生，是高职院校教材《应用数学基础》（王海舟、刘余猛主编）的配套学习指导用书。主要用于学生课后的复习与提高。它能帮助学生巩固基本内容、基本概念，提高对基本方法的理解和掌握，有助于培养学生的基本运算能力和数学应用能力。

本书按教材《应用数学基础》的章节顺序编排内容，以 54 课时（约 27 次课）为标准对教学内容进行划分，每次课安排了备用例题、课内练习及 A、B、C 三个层次的作业题。

备用例题配有解答和注意点，每章结束配有知识点题型、解题方法的小结，便于学生课后自学。

为了贯彻高职院校“培养以应用为目的，以必需够用为度”的理念，同时适应高职院校当前的生源特点，本书在选题中，重视知识的衔接性、基础性、应用性、层次性。本书在广度和深度上能满足不同专业、不同层次学生对高等数学学习的需要。

本书的编写是教研室全体成员响应学院领导“以质量谋发展”号召，通力协作的结果。具体编写分工如下：刘余猛编写第一章，第二章；张华娟编写第三章、第四章；朱锋编写第五章、第六章、第七章。全书的结构安排、统稿由刘余猛承担。

本书编写过程中，得到了江南大学谢文龙老师的亲切指导和热心帮助，得到了无锡南洋职业技术学院领导的大力支持，在此一并表示衷心的感谢。

由于时间仓促，及限于我们的水平和经验，书中可能会有疏漏之处，我们希望读者给予批评指正。

编　者

目　录

第一章　函数、极限与连续 …… 1

1.1　函数(1) …… 1

1.1　函数(2) …… 3

1.1　函数(3) …… 5

1.2　建立函数关系 …… 5

1.3　极限的概念(1) …… 8

1.3　极限的概念(2) …… 9

1.3　极限的概念(3) …… 10

1.4　极限的运算(1) …… 11

1.4　极限的运算(2) …… 14

1.4　极限的运算(3) …… 15

1.5　函数的连续性 …… 17

1.6　小结与自测 …… 19

第二章　导数与微分 …… 24

2.1　导数的概念 …… 24

2.2　求导法则(1) …… 27

2.2　求导法则(2) …… 28

2.2　求导法则(3) …… 30

2.3　高阶导数 …… 32

2.4　略 …… 33

2.5　函数的微分 …… 33

2.6　小结与自测 …… 35

第三章　导数的应用 …… 41

3.1　洛必达法则 …… 41

3.2　函数的单调性与极值 …… 43

3.3 最大值与最小值问题…… 45
3.4 小结与自测…… 47

第四章 不定积分 …… 52

4.1 直接积分法…… 52
4.2 第一换元积分法…… 54
4.3 略…… 56
4.4 查简易积分表法求不定积分…… 56
4.5 小结与自测…… 60

第五章 定积分 …… 66

5.1 定积分的概念与性质…… 66
5.2 微积分基本定理…… 68
5.3 定积分的换元积分法…… 70
5.4 广义积分…… 71
5.5 定积分的几何应用…… 73
5.6 小结与自测…… 74

第六章 常微分方程 …… 79

6.1 常微分方程基本概念…… 79
6.2 一阶微分方程…… 80

第七章 矩阵与线性方程组 …… 82

7.1 7.2 略 …… 82
7.3 矩阵的概念与性质…… 82
7.4 矩阵的秩…… 85
7.5 略…… 86
7.6 线性方程组…… 86
7.7 小结与自测…… 90

作业题…… 95

第一章

函数、极限与连续

1.1 函数(1)

【学习要点】

1. 函数的三要素:(1) 定义域;(2) 对应法则;(3) 值域.

2. 函数的特征:(1) 奇偶性;(2) 单调性;(3) 周期性;(4) 有界性.

3. 分段函数.

【例题分析】

例 1 求函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{2x+4}}+\ln(3-x)$ 的定义域.

解:由题意得 $\begin{cases}2x+4>0\\3-x>0\end{cases}$,解之可得 $-2<x<3$,故函数的定义域为 $(-2,3)$.

注 (1) $\dfrac{1}{g(x)}$ 有意义 $\Leftrightarrow g(x)\neq 0$;

(2) $\sqrt{g(x)}$ 有意义 $\Leftrightarrow g(x)\geqslant 0$;

(3) $\log_a g(x)$ 有意义 $\Leftrightarrow g(x)>0$.

例 2 画出符号函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ 的图像,求 $f(2)$、$f(-3)$、$f(0)$ 的值.

解:符号函数的图形如图 1-1 所示可知:

$f(2)=1$,

$f(-3)=-1$,

$f(0)=0$.

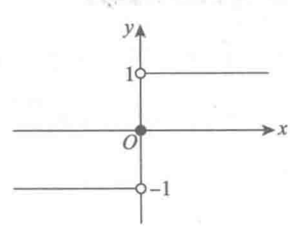


图 1-1

例 3 说出下列各组函数是否相同.

(1) $f(x)=\sqrt{x^2}$, $g(x)=|x|$, $h(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$.

(2) $f(x)=\dfrac{x(x-1)}{x}$, $g(x)=x-1$, $h(x)=\sqrt[3]{(x-1)^3}$.

解:(1) $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 三个函数的对应法则相同,且定义域也相同,故三个函数相同.

(2)$f(x)$ 与 $g(x)$ 定义域不同，故它们不是同一函数；$h(x)$ 与 $g(x)$ 对应法则相同，且定义域也相同，故它们是同一函数.

例 4 说出下列函数的奇偶性.

(1)$f(x)=x^3\sin x$； (2)$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

解：(1)$f(x)$ 的定义域为一切实数，且有

$$f(-x)-f(x)=(-x)^3\sin(-x)-x^3\sin x=x^3\sin x-x^3\sin x=0.$$

即 $f(-x)=f(x)$，故 $f(x)$ 为偶函数.

注 一般的两个奇函数的和(差)仍为奇函数；两个奇函数的积(商)，为偶函数.

(2)$f(x)$ 的定义域为一切实数，且有

$$\begin{aligned}f(-x)+f(x)&=\ln\left[-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right]+\ln(x+\sqrt{x^2+1})\\&=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)+\ln(\sqrt{x^2+1}+x)\\&=\ln\left[(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)\right]\\&=\ln 1\\&=0.\end{aligned}$$

即 $f(-x)=-f(x)$，故 $f(x)$ 为奇函数.

例 5 已知四个函数：

(1)$f(x)=\sin x+2$； (2)$f(x)=3\cos\dfrac{1}{x}$； (3)$f(x)=\dfrac{1}{\sin x+1}$； (4)$y=\dfrac{1}{x^2+2}$.

其中有界函数为________.

解：(1) 因为 $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$，所以 $1\leqslant\sin x+2\leqslant 3$，故 $f(x)=\sin x+2$ 为有界函数.

(2) 因为 $-1\leqslant\cos\dfrac{1}{x}\leqslant 1$，所以 $-3\leqslant 3\cos\dfrac{1}{x}\leqslant 3$，故 $f(x)=3\cos\dfrac{1}{x}$ 为有界函数.

(3) 因为 $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$，同时分母 $\sin x+1$ 不能为零，即有 $0<\sin x+1\leqslant 2$，所以 $\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{1}{\sin x+1}<+\infty$，故 $f(x)=\dfrac{1}{\sin x+1}$ 为无界函数.

(4) 因为 $x^2+2\geqslant 2$，所以 $0<\dfrac{1}{x^2+2}\leqslant\dfrac{1}{2}$，故 $y=\dfrac{1}{x^2+2}$ 为有界函数.

综上所述，有界函数为(1)(2)(4).

【课内练习】

1. 说出下列函数的定义域.

(1)$f(x)=\sqrt{x-1}$； (2)$f(x)=\dfrac{1}{x+2}$； (3)$f(x)=\ln(x-1)$.

2. 说出下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=(x^2+1)\sin x$；　　(2) $f(x)=\sin^2 x$.

3. 下列五个函数：

(1) $f(x)=3\sin x+2$；　　(2) $f(x)=\cos x-3$；

(3) $f(x)=\dfrac{1}{\sin x+3}$；　　(4) $y=\dfrac{1}{x^2+4}$；　　(5) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

其中，有界函数为________.

1.1　函数(2)

【学习要点】

1. 基本初等函数的概念、图像及性质.
2. 描点法画图.

【例题分析】

例 1　在同一坐标系内画出下列函数的图像并结合图像说出其在$(0,+\infty)$内的单调性、有界性.

(1) $y=x$；　　(2) $y=x^3$；　　(3) $\dfrac{1}{x}$.

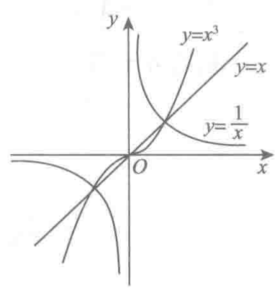


图 1－2

解：幂函数 $y=x^\mu$ ($\mu\neq 0$，μ 是常数). 当 $\mu>0$ 时，函数在$(0,+\infty)$内单调增加；当 $\mu<0$ 时，函数在$(0,\infty)$内单调减少，如图1－2. 无论何种情况，图形总经过点(1,1)，这几个函数均为无界函数.

例 2　在同一坐标系内画出下列函数的图像并结合图像说出其单调性、有界性.

(1) $y=2^x$；　　(2) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

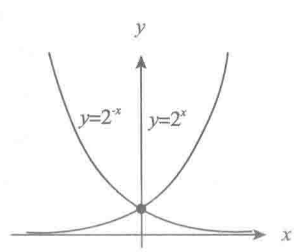


图 1－3

解：指数函数 $y=a^x$，当 $a>1$ 时，函数单调增加；

当 $0<a<1$ 时，函数单调减少.

无论何种情况，图形总经过点(0,1). 这两个函数均为无界函数，始终在 x 轴上方，在正(负)无穷远处与 x 轴无限逼近，如图 1－3.

例 3　在同一坐标系内画出下列函数的图像并结合图像说出其单调性、有界性.

(1)$y=\ln x$；　　(2)$y=\log_{\frac{1}{2}} x$.

解：对数函数 $y=\log_a x$，当 $a>1$ 时，函数单调增加；当 $0<a<1$ 时，函数单调减少.

无论何种情况，图形总经过点(1,0) 且始终在 y 轴右方. 均为无界函数，与 y 轴无限逼近. 如图 1-4.

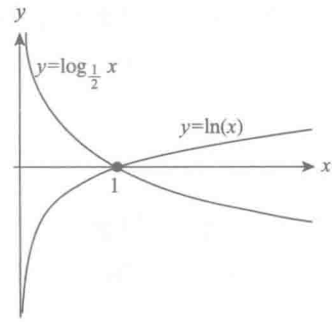


图 1-4

例 4　分别画出下列函数的图像并结合图像说出其奇偶性、周期性、有界性.

(1)$y=\sin x$；　　(2)$y=\cos x$；　　(3)$y=\tan x$.

解：(1) 函数 $y=\sin x$ 是以 2π 为周期的奇函数；

此函数为有界函数，$|\sin x|\leqslant 1$. 如图 1-5.

(2) 函数 $y=\cos x$ 是以 2π 为周期的偶函数；

此函数为有界函数，$|\cos x|\leqslant 1$. 如图 1-6.

(3) 函数 $y=\tan x$ 是以 2π 为周期的奇函数；

此函数为无界函数. 如图 1-7.

例 5　画出反正弦函数 $y=\arcsin x$ 的图像并结合图像说出其性质.

解：$y=\arcsin x$ 是正弦函数 $y=\sin x$ 在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的反函数 $y=\arcsin x$ 有如下性质：

奇函数，图形关于原点对称；

在 **R** 上单调递增；

不是周期函数；

是有界函数，$|\arcsin x|\leqslant\frac{\pi}{2}$. 如图 1-8.

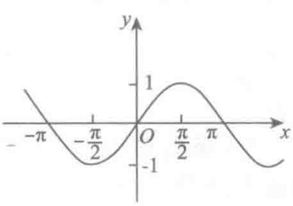


图 1-5

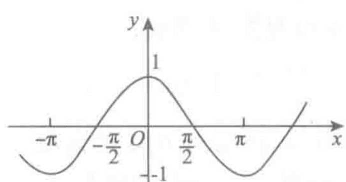


图 1-6

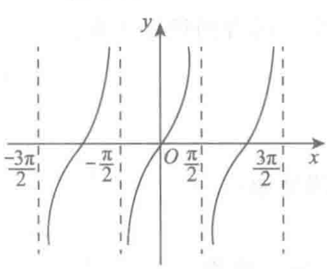


图 1-7

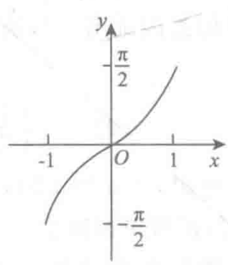
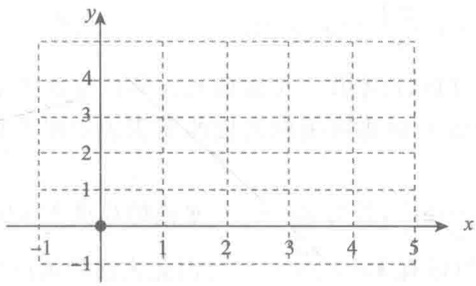


图 1-8

【课内练习】

1. 画下列函数的图像并结合图像说出其性质.

(1) $y=x^2$；　(2) $y=\dfrac{1}{x}$；　(3) $y=2^x$；　(4) $y=\log_2 x$.



1.1　函数(3)
1.2　建立函数关系

【学习要点】

1. 复合函数和初等函数.
2. 建立函数模型的方法.
3. 常用经济函数：(1) 需求函数与供给函数；(2) 成本函数、收益函数与利润函数.

【例题分析】

例 1　已知 $f(x)=\sin x-1$，$g(x)=\mathrm{e}^x+1$，求复合函数 $f(g(x))$，$g(f(x))$.

解：$f(g(x))=\sin(g(x))-1=\sin(\mathrm{e}^x+1)-1$.

$g(f(x))=\mathrm{e}^{f(x)}+1=\mathrm{e}^{\sin x-1}+1$.

注　在函数 $f(g(x))$ 中，x 为自变量，$g(x)$ 为中间变量.

例 2　分解下列复合函数.

(1) $f(x)=(\sin x-1)^3$；　(2) $g(x)=\cos\sqrt{\mathrm{e}^x+2}$.

解：(1) $y=(\sin x-1)^3$ 是由 $y=u^3$ 与 $u=\sin x-1$ 复合而成.

注　法一：由外而内分解. 看总体，即看最后一步运算，求立方，故想到幂函数 $y=u^3$，而 $u=\sin x-1$ 是一个简单函数，就此分解结束.

法二：由内而外分解. 由内而外分解，就是按计算函数在某一点处函数值的计算次序进行分解. 如分解 $f(x)=(\sin x-1)^3$，第一步，计算 $\sin x-1=u$ 把结果记为 u；第二步，计算 $(u)^3=y$. 所以分解结果为 $u=\sin x-1$，$y=u^3$.

(2) $y=\cos\sqrt{\mathrm{e}^x+2}$ 是由 $y=\cos u$，$u=\sqrt{v}$ 与 $v=\mathrm{e}^x+2$ 复合而成的.

例 3 如图 1－9，欲用围墙围成面积为 216 m^2 的一块矩形土地，并在正中央用一堵墙将其隔成“日”字形两块，试将围墙总长度表示成所围矩形土地宽的函数.

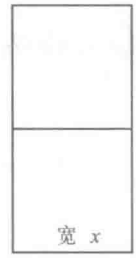


图 1－9

解：设矩形地块的宽为 x 米，围墙及隔墙总长为 y 米，则矩形的长为 $\frac{216}{x}$ 米，所以有 $y = 3x + 2 \cdot \frac{216}{x} = 3x + \frac{432}{x} \quad (x > 0)$.

例 4 如图 1－10，要用白铁皮制作一个底面长方形长与宽之比为 2∶1 的长方体无盖水槽，容积为 36(dm^3)，试将所用白铁皮的面积表示成水槽底面矩形宽的函数.

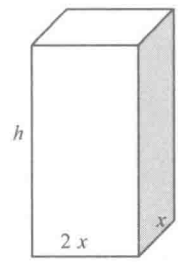


图 1－10

解：设水槽的底面宽为 x(dm)，长为 $2x$(dm)，水槽的高度为 h(dm)，

则有 $x \cdot 2x \cdot h = 36$. 所以有 $h = \frac{36}{2x^2} = \frac{18}{x^2}$. 因此表面积可以写成

$$y = 2(2x + x)h + 2x \cdot x;$$

$$y = 2(2x + x)\frac{18}{x^2} + 2x^2;$$

$$y = 2x^2 + \frac{108}{x}(x > 0).$$

例 5 已知当鸡蛋的收购价为 9 元 / 千克时，某收购站每月能收购 5 吨，若收购价提高 0.2 元/ 千克，则每月收购量增加 800 千克，求鸡蛋的线性供求函数.

解：设鸡蛋的收购价格为 p 元 / 千克时，每月收购量为 Q 千克，由题意得可设 $Q = ap + b$，则

$$\begin{cases} 5000 = 9a + b \\ 5800 = 9.2a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4000 \\ b = -31000 \end{cases}$$

故鸡蛋的线性供求函数为 $Q = 4000p - 31000$.

例 6 某工厂生产某产品，其固定成本为 3 万元，每生产一百件该产品，成本增加 2 万元，其收入 R(单位：万元) 是产量 q(单位：百件) 的函数 $R = 5q - \frac{1}{2}q^2$，求利润函数和平均利润函数.

解：由题意知成本函数为 $C(q) = 3 + 2q$，利润函数为

$$L(q) = R(q) - C(q) = (5q - \frac{1}{2}q^2) - (3 + 2q) = -\frac{1}{2}q^2 + 3q - 3,$$

平均利润函数 $\overline{L(q)} = \frac{L(q)}{q} = -\frac{1}{2}q + 3 - \frac{3}{q}$.

【课内练习】

1. 求下列各组函数的复合函数 $f(g(x))$，$g(f(x))$.

(1) $f(x) = \frac{1}{x}$，$g(x) = \sin x$；　　(2) $f(x) = x^3$，$f(x) = \cos x$；

(3) $f(x) = e^x$，$g(x) = \tan x$；　　(4) $f(x) = \sqrt{x}$，$f(x) = \ln x + 1$.

2. 分解下列复合函数.

(1) $y = e^{\sin x}$；　　　　(2) $y = e^{x^2}$；

(3) $y = \ln(x^2 + 1)$；　　　　(4) $y = (3x - 1)^6$.

3. 填空.

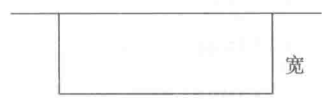
(1) 矩形的周长为 24 cm，长为 x(cm)，则宽为________，面积为________.

(2) 矩形的面积为 20 cm^2，其宽为 x(cm)，则其长为________.

(3) 长方体的体积为 60 cm^3，底面是边长为 x 的正方形，则高为________.

(4) 体积为 $54\pi(\text{cm}^3)$ 的圆柱，其底面半径为 x(cm)，则高为________，侧面积为________.

4. 某工厂要利用原有的一面墙壁建一面积为 128 m^2 的矩形堆料场(需再建三面墙)，试将所建围墙总长度表示成所围矩形土地宽的函数.



5. 制作一个底面为正方形，容积为 32 m^3 的无盖长方体容器，试将所用材料的面积表示成水槽底面正方形边长的函数.

6. 设某种商品的需求函数为 $Q = 54 - \frac{1}{3}p$，供给函数为 $S = -60 + 6p$($Q(S)$ 单位：件，p 单位：元)，则市场平衡价格 $p_0 =$ ________元.

7. (1) 已知某产品的成本函数为 $C(q) = 2000 + \frac{1}{2}q^2$($q$ 单位：件，C 单位：元)，则生产该产品的固定成本为________，生产 100 件该产品的成本为________，平均成本为________.

(2) 已知某产品的成本函数为 $C(q) = 2000 + \frac{1}{2}q^2$，($q$ 单位：件，C 单位：元)，每件售价为 60 元，则其收入函数为________，利润函数为________.

8. 某种品牌的电视机，每台售价为 500 元时，每月可销售 2000 台，每台售价为 450 元时，每月可多销售 400 台，试求该电视机的线性需求函数.

1.3 极限的概念(1)

【学习要点】

数列极限的概念、表示及常见数列的极限(收敛与发散).

【例题分析】

例 1 求下列数列的极限.

(1) $a_n=\dfrac{1}{n}$; (2) $a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$; (3) $2,2,2,\cdots$; (4) $a_n=(-1)^n$;

(5) $3,9,27,\cdots$; (6) $a_n=\sin n$;

解:(1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}2=2$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 不存在.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}3^n=+\infty$.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 不存在.

注 一般地,有(1) $\lim\limits_{n\to\infty}c=c$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0(|q|<1)$; (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^p}=0(p>0)$.

例 2 观察下列数列的极限$\lim\limits_{n\to\infty}a^n$.

(1)$a_n=2+\dfrac{1}{n}$; (2)$a_n=(-1)^n\dfrac{1}{n+4}$; (3)$a_n=n^2+2n-5$.

解:(1) $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=2$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=\infty$.

【课内练习】

1. 观察下列数列的变化趋势,若极限存在,写出该极限.

(1)$a_n=\dfrac{1}{n^2}$; (2)$a_n=(-1)^n\dfrac{1}{n+2}$; (3)$x_n=\sin\dfrac{n\pi}{2}$;

(4) $y_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$;　　(5) $a_n=2^n$;　　(6) $a_n=(-1)^n$.

2. 填空.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=$ ________, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{100}{n^5}=$ ________.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}3^n=$ ____________.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}6=$ ________, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\pi}=$ ________.

1.3　极限的概念(2)

【学习要点】

1. 函数极限的概念、表示.
2. 常见函数的极限.

【例题分析】

例 1　设 $f(x)=\frac{1}{x^2}$,求 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x)$, $\lim\limits_{n\to-\infty}f(x)$, $\lim\limits_{n\to\infty}f(x)$.

解: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$,

所以有 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$. 如图 1 - 11.

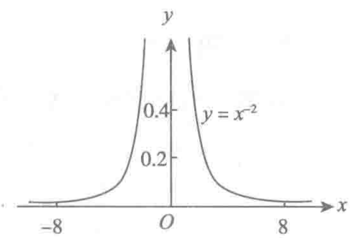


图 1 - 11

例 2　设 $f(x)=2^x$,求 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x)$, $\lim\limits_{n\to-\infty}f(x)$, $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x)$.

解: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$,

故可知函数 $f(x)=2^x$ 极限不存在. 如图 1 - 12.

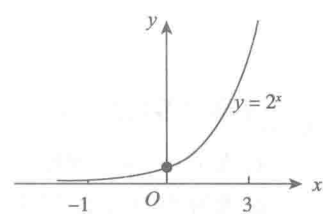


图 1 - 12

例 3　设 $f(x)=\begin{cases}2, & x\geqslant 1\\ 3x-2, & x<1\end{cases}$,求 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to1}f(x)$.

解: $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}2=2$,

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(3x-2)=1$,

因为 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$,所以 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 不存在. 如图 1 - 13.

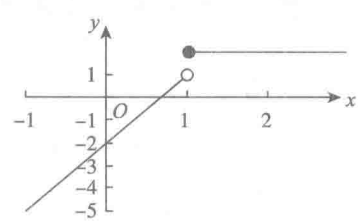


图 1 - 13

注　在探究分段函数在分段点处极限时，一般都要分别考查函数在分段点处的左、右极限，当且仅当左、右极限存在且相等时，函数在此分段点处存在极限。

例 4 设 $f(x)=\dfrac{3x-6}{x^2-4}$,求 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

解:$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3(x-2)}{(x+2)(x-2)}$

$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3}{(x+2)}=\dfrac{3}{4}$. 如图 1-14.

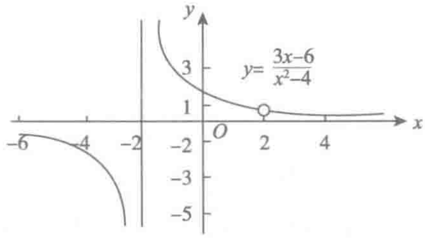


图 1-14

注 当分子的极限和分母的极限同时为零时,不能直接运用极限的运算法则,必须先将函数式变形,再看能否用法则.

【课内练习】

1. 填空.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^3}=$______; (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}5^x=$______; $\lim\limits_{x\to-\infty}5^x=$______; $\lim\limits_{x\to\infty}5^x=$______;

(3) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{5}=$______; (4) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{5}=$______; (5) $\lim\limits_{x\to 2}x=$______.

2. 填空.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{2}\pi}{e}=$______; (2) $\lim\limits_{x\to 1}\ln x=$______; (3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=$______.

3. 求下列函数在 $x=0$ 处的左右极限,并指出当 $x\to 0$ 时,函数的极限是否存在.

(1)$y=\begin{cases}x-1, & x<0\\ x+1, & x\geqslant 0\end{cases}$; $y=\begin{cases}1, & x<0\\ 3^x, & x\geqslant 0\end{cases}$.

1.3 极限的概念(3)

【学习要点】

1. 无穷小(大)的概念、性质.
2. 无穷小与无穷大的关系.

【例题分析】

例 1 对于给定的极限过程,下列函数中哪些是无穷小量?哪些是无穷大量?

(1)$5+2x,x\to-\infty$; (2)$e^x,x\to-\infty$; (3)$\ln x,x\to 0^+$;

答: 无穷大 . 答: 无穷小 . 答: 无穷大 .

(4) $\dfrac{3x}{5+2x^2},x\to\infty$; (5)$(\dfrac{2}{3})^x-1,x\to 0$; (6) $\dfrac{x}{x-1},x\to 1$.

答: 无穷小 . 答: 无穷小 . 答: 无穷大 .

例 2 填空.

(1) 若 $f(x)=\dfrac{x-3}{x-2}$,则当 $x\to$ 3 时,$f(x)$ 为无穷小,当 $x\to$ 2 时,$f(x)$ 为无穷大.

(2) 若 $f(x)=\dfrac{x+3}{x(x-2)}$，则当 $x\to$ __-3__ 时，$f(x)$ 为无穷小，当 $x\to$ __0 或 2__ 时，$f(x)$ 为无穷大.

例 3　求极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)^2\cos\dfrac{2}{x-3}=$ ________；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+\sin x}{x^3}=$ ________.

解：(1) 因为 $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)^2=0$，又 $\left|\cos\dfrac{2}{x-3}\right|\leqslant 1$，

所以 $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)^2\cos\dfrac{2}{x-3}=0$. 如图 1－15.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^3}=0$，又 $|3+\sin x|\leqslant 4$，

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^3}(3+\sin x)=0$，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+\sin x}{x^3}=0$.

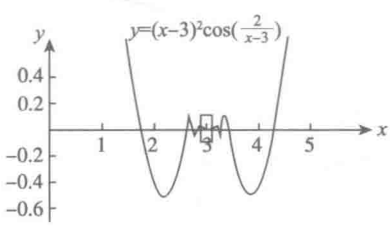


图 1－15

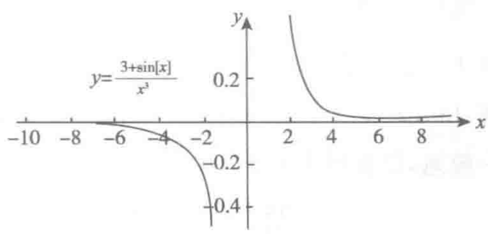


图 1－16

【课内练习】

1. 在所给 x 的变化过程中，下列各式哪些是无穷小？哪些是无穷大？

(1) $\dfrac{1}{x^4}(x\to\infty)$ 答：_____　(2) $\dfrac{1}{x^p}(x\to 0,p>0)$ 答：_____　(3) $x^3(x\to+\infty)$ 答：_____；

(4) $x^2(x\to 0)$ 答：_____　(5) $2^x(x\to+\infty)$ 答：_____　(6) $2^x(x\to-\infty)$ 答：_____；

(7) $\ln x(x\to 0^+)$ 答：_____　(8) $\ln x(x\to 1)$ 答：_____　(9) $\ln x(x\to+\infty)$ 答：_____.

2. 填空.

(1) 设 $f(x)=\dfrac{x-1}{x-3}$，则当 $x\to$ ____ 时，$f(x)$ 为无穷小；当 $x\to$ ____ 时，$f(x)$ 为无穷大.

(2) 设 $g(x)=\dfrac{x-2}{x}$，则当 $x\to$ ____ 时，$g(x)$ 为无穷小；当 $x=\to$ ____ 时，$g(x)$ 为无穷大.

1.4　极限的运算(1)

【学习要点】

1. **定理**　假设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在同一极限过程下的极限同时存在，且 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则