YOUXIANQUN GOUZAO DE RUOGAN WENTI YANJIU

有限群构造的若干问题研究

刘玉凤 ◎ 著

西南财经大学出版社
SOUTHWESTERN UNIVERSITY OF FINANCE & ECONOMICS PRESS

YOUXIANQUN GOUZAO DE RUOGAN WENTI YANJIU

有限群构造的若干问题研究

刘玉凤◎著

西南财经大学出版社
SOUTHWESTERN UNIVERSITY OF FINANCE & ECONOMICS PRESS

图书在版编目(CIP)数据

有限群构造的若干问题研究/刘玉凤著.—成都:西南财经大学出版社,
2015.12
ISBN 978-7-5504-2125-7

Ⅰ.①有…　Ⅱ.①刘…　Ⅲ.①有限群—研究　Ⅳ.①O152.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 185304 号

有限群构造的若干问题研究
YOUXIANQUN GOUZAO DE RUOGAN WENTI YANJIU
刘玉凤　著

责任编辑:王　利
助理编辑:魏玉兰
封面设计:大　涛　张姗姗
责任印制:封俊川

出版发行	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街 55 号)
网　　址	http://www.bookcj.com
电子邮件	bookcj@foxmail.com
邮政编码	610074
电　　话	028-87353785　87352368
照　　排	四川胜翔数码印务设计有限公司
印　　刷	四川五洲彩印有限责任公司
成品尺寸	170mm×240mm
印　　张	7.75
字　　数	130 千字
版　　次	2015 年 12 月第 1 版
印　　次	2015 年 12 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5504-2125-7
定　　价	48.00 元

内容简介

当代群论方面的研究非常活跃和广泛,要想概括全部研究主题几乎不可能.本书是作者结合自己的研究课题写成.全书共分五章:第一章给出了全书所需要的主要的基本符号和概念;第二章探讨了 $\mathfrak{F}_h$ - 正规子群,$\mathfrak{F}_s$ - 拟正规子群,S - 嵌入子群等几种特殊子群对有限群结构的影响;第三章研究了三类 Sylow 对象:有循环余因子的准素子群、Hall 子群、Hartley 类和局部 Fitting 类的 $\mathfrak{F}$ - 内射子;第四章给出了本原子群,几种特殊子群的弱 CAP 性与群的结构的关系;第五章讨论了 Sylow 子群的正规化子有某种外部性质的有限群的结构,获得了一系列相关结果.

本书可以供希望进一步研究这些相关课题的读者参考.

前 言

群论是代数学的一个重要分支,它的丰富理论不仅在很多数学分支中起重要作用,而且在结晶学、理论物理、量子化学、代数编码学、计算机、自动化控制等方面都有重要应用,为相关理论学科和应用学科提供了有力的技术支撑.

群类理论主要是20世纪60年代由Gaschutz,W等数学家开始建立起来的,随后得到了快速的发展,并由此快速促进了整个群论的发展.

群论研究的一个主要任务就是研究各种群的性质和结构,每解决一种群的性质和结构无论对于群理论本身,还是对于相关学科的发展都具有十分重要的意义.

群的结构与其子群间的关系一直被群论工作者广泛地研究.在素数幂阶的群的某些确定子群的假设下,获得了许多重要的结果.譬如,Ito在文献[91]中证明了:如果G为一个奇数阶群且其所有极小子群在G的中心中,则G是幂零群.Buckley在文献[16]中证明了:如果奇数阶群G的所有极小子群在G中正规,则G是超可解群. Srinivasan,S在文献[129]中证明了如果群G的每个Sylow-子群的极大子群在G中正规,则G是超可解群.

近几十年来,群论工作者定义了某些特殊的补子群.譬如,王燕鸣教授

在文献[136]中引入了 c - 正规子群的概念:称群 G 的子群 H 在群 G 中是 c - 正规的,如果存在群 G 的一个正规子群 K,使得 $G = HK$ 且 $H \cap K \leqslant H_G$,这里 $H_G = Core_G(H)$ 是含于 H 的群 G 的最大正规子群. 并利用极大子群的 c - 正规性决定了一些群的结构. 杨南迎与郭文彬在文献[141]中给出了 $\mathfrak{F}_n$ - 补子群的概念:称群 G 的子群 H 在群 G 中是 $\mathfrak{F}_n$ - 可补的,如果存在群 G 的一个正规子群 K,使得 $G = HK$ 且 $(H \cap K)H_G/H_G$ 包含在 G/H_G 的 $\mathfrak{F}$ - 超中心 $Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G/H_G)$ 中. 冯秀仙与郭文彬在文献[38]中引进了 $\mathfrak{F}_h$ - 正规子群的概念:称群 G 的子群 H 在群 G 中是 $\mathfrak{F}_h$ - 正规的,如果存在群 G 的一个正规子群 K,使 HK 为群 G 的一个正规 Hall 子群且 $(H \cap K)H_G/H_G \leqslant Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G/H_G)$. 黄健红在文献[86]中给出了 $\mathfrak{F}_s$ - 拟正规子群的概念:设 $\mathfrak{F}$ 是一个非空群类, H 为群 G 的子群. H 称为在 G 中 $\mathfrak{F}_s$ - 拟正规,如果存在群 G 的一个正规子群 T,使得 HT 在 G 中 s - 置换且 $(H \cap T)H_G/H_G \leqslant Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G/H_G)$. 通过考虑这些特殊的补子群,人们获得了一系列新的重要的结果.

在上述研究的基础上,第二章探讨了 $\mathfrak{F}_h$ - 正规子群、$\mathfrak{F}_s$ - 拟正规子群、S - 嵌入子群等特殊子群对有限群结构的影响,获得了一些相关结果.

在有限群的结构研究方面,Sylow 对象扮演着十分重要的角色. 近几十年来,经过许多数学家的努力,这方面取得了很多重要的成果.

第三章首先研究了准素子群有循环余因子的有限群的结构. Berkovich, Y. 在文献[13]中研究了极大子群的余因子或者是幂零群或者是 Schmidt 群的非可解群的结构. 从这里我们知道,极大子群具有幂零余因子的群是可解群. Dixon, J. D., Poland, J., Rhemtulla, A. H. 在文献[30]中证明了:对一个奇素数 p,极大子群有 p - 幂零余因子的群是 p - 可解群. Poland, J. 在文献[118]中讨论了子群的余因子是单群的群:这样的群是可解群且商群 $G/Z_\infty(G)$ 的 Sylow 子群是交换群. Ogarkov, E. T. 在文献[116]中研究了所有双准素子群有准素余因子的群,描述了所有真子群有准素余因子或者双准素余因子的非可解群的结构. Cutolo, G., Khukhro, E. I., Lennox, J. C., Wiegold, J., Rinauro, S., Smith, H. 在文献[27]中研究了对群 G 的每个子群 H, $|H/H_G| \in \{1, p\}$ 的 p - 群 G 的结构,证明了这样的群是亚交换的. 在上述研究的基础上,得到了下列结果:

设 G 为一个群, q 为群 G 的阶 $|G|$ 的最大素因子且 $\pi = \pi(G) \setminus \{q\}$. 如果对群 G 的每个 p - 子群 X 及每个 $p \in \pi$,商群 X/X_G 是循环的. 则:

(1) G 为可解群且群 G 的 Hall$\{2,3\}'$ - 子群在群 G 中正规且为一个 Ore

离散群;

(2) 群 G 的所有 Hall$\{2,3\}$ - 子群是亚幂零的;

(3) 对每个 $p \in \{2,3\}$,群 G 的每个 Hall p' - 子群为一个 Ore 离散群;

(4) 对所有的 $r \in \pi(G)$,$l_r(G) \leqslant 1$.

著名的 Schur - Zassenhaus 定理断言:如果群 G 有一个正规 Hall π - 子群 A,那么 G 有一个 Hall π' - 子群. 而且,如果或者 A 或者 G/A 是可解群,那么群 G 的任意两个 Hall π' - 子群共轭.

1928 年,Hall,P 在文献[78]中证明了:有限可解群 G 有 Hall π - 子群且任意两个 Hall π - 子群在 G 中共轭.

1949 年,Cunihin ,S. A. 在文献[28]中证明了:如果 G 是可分群(即如果群 G 有一个主列使得它的每个主因子的指数是 π' - 数或 π - 数),那么 G 有 Hall π - 子群. 而且,如果 G 是 π - 可解群,那么 G 的任意两个 Hall π - 子群共轭.

这些定理是群论的基础结果,推广它们具有重要的意义.

郭文彬教授和 A. N. Skiba 教授在文献[50],[60],[61]中对上述三个定理给出了某些重要的推广. 第三章的第二部分就是在上述研究的基础上,进一步研究了有限群 Hall 子群存在的条件,获得了一些新的结果.

Fitting 类在群类理论中扮演着重要角色. Fitting 类的重要性由 Fischer, B. ,Gaschutz,W. ,及 Hartley,B. 在文献[39]中所证明的以下定理可以看到:如果 $\mathfrak{F}$ 是一个 Fitting 类,那么群 G 至少有一个 $\mathfrak{F}$ - 内射子,且任意两个 $\mathfrak{F}$ - 内射子是共轭的.

关于 $\mathfrak{F}$ - 内射子的性质,Hartley,B. 在文献[82]中证明了:对任意可解的 Fitting 类 $\mathfrak{F}$,可解群 G 的每个 $\mathfrak{F}$ - 内射子 V 或者覆盖或者避免群 G 的每个主因子 H/K,即或者 $(V \cap H)K = H$ 或者 $(V \cap H)K = K$.

郭文彬教授在文献[54]中证明了:如果 $\mathfrak{F}$ 是一个 Fitting 类且 $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{S}^{\pi(\mathfrak{F})}$(即 $G/G_{\mathfrak{F}}$ 是 π - 可解群),那么 G 有唯一的 $\mathfrak{F}$ - 内射子共轭类.

第三章的第三部分研究了 Hartley 类 $\mathfrak{F}$ - 内射子的覆盖避免性质. 对于非可解群的群类,给出了群 G 的主因子上 $\mathfrak{F}$ - 内射子的覆盖避免性质,获得了一些相关结果.

1971 年,Johnson,D. L. 在文献[92]中介绍了本原子群. 事实上,本原子群可以看作是极大子群的推广. 有趣的是每个群 G 都有一个本原子群且 G 的每个真子群是 G 的某些本原子群的交. 因为所有本原子群的交是单位子群,

所以易见本原子群类比极大子群类广泛得多. 郭文彬教授、岑嘉平教授和Skiba教授在文献[71]中研究了本原子群有素数幂指数的有限群的结构. 他们证明了有限群 G 的每个本原子群有素数幂指数当且仅当 $G=[D]M$ 是一个超可解群,这里 D 和 M 是群 G 的幂零Hall子群,D 是群 G 的递减中心列的最小项,且 $G=DN_G(D\cap X)$,X 为群 G 的任意一个本原子群.

在上述研究的基础上,第四章首先研究了本原子群对有限群结构的影响. 获得了下列主要结果:

假设群 G 的所有非平凡子群为本原的. 则:

(1) 如果对于素数 p,G 为一个 p - 群,则 G 为一个循环群或 G 为一个 p^2 阶的初等交换群;

(2) 如果 G 为一个非准素幂零群,则 $|G|=pq$,其中 p,q 是不同的素数;

(3) 如果 G 为一个非幂零群,则 $G=[P]Q$,其中 P 为 G 的 p 阶或 p^2 阶极小正规子群,Q 为 G 的 q 阶子群.

20世纪90年代以来,许多学者对群的主因子的覆盖与回避性进行了研究. 他们研究了一些子群的覆盖与回避性对群结构的影响,由此产生了CAP - 子群、部分CAP - 子群、半覆盖 - 避免子群等许多相关的概念,并得到了许多重要成果. 譬如,郭秀云教授与Shum,K. P. 教授的文献[74],刘建军、郭秀云、李世荣教授的文献[105]等. 所有的这些研究都是局限在对群的主因子的覆盖与回避性上. 在2011年,郭文彬教授和Skiba教授在文献[63]中对群的非主因子的覆盖与回避性进行了研究,从而建立了群的非主因子的覆盖与回避性理论. 这对于丰富群的理论和促进群论的发展无疑具有重要的意义. 在上述研究的基础上,第四章第三节主要利用一些子群覆盖或避免群的合成因子的极大对研究了群的性质及其结构,给出了极大子群、极小子群、Sylow子群、2 - 极大子群、次正规子群的弱 *CAP* 性与群的结构之间的关系.

在有限群的结构研究方面,准素子群的正规化子扮演着十分重要的角色. 几十年来,经过许多数学家的努力,这方面取得了很多重要的成果.

在准素子群的正规化子有某种内部性质的有限群的研究方面,早年Frobenius证明了:如果一个有限群 G 的每个 p - 子群被它的正规化子中的每个 p' 元中心化,则 G 是 p - 幂零群. Burnside也证明了:如果对于有限群 G 的一个Sylow子群 P,满足 P 的正规化子等于 P 的中心化子,则 G 是 p - 幂零群. 几十年来,这方面又有了一系列新的重要成果. 1986年,Bianchi,M. ,Mauri,

A. G. B. ,和 Hauck,P. 在文献[14] 中证明了:如果一个有限群 G 的所有 Sylow 子群的正规化子幂零,则 G 本身是幂零的. 1988 年,Fedri,V . ,Serens , L. 在文献[35] 中指出,对于超可解群系,不具有这种性质,也就是说:存在这样的非超可解的有限群 G,它的所有 Sylow 子群的正规化子都超可解. 1992 - 1994 年,郭文彬教授在文献[47 - 49] 中以及郭文彬教授与 Shemetkov,L. A . 教授在文献[66] 中研究了准素子群的正规化子有各种群系性质的有限群,得到了一系列群的结构.

在 Sylow 子群的正规化子有某种外部性质的有限群的研究方面,Kondrat'ev,A. S. 在文献[94] 中证明了:如果一个群 G 的所有 Sylow 子群正规化子有奇数指数,则 G 是 2 - 幂零群. 1995 年,张继平教授在文献[145] 中证明了:如果一个群 G 的 Sylow 子群正规化子有素数幂指数,则 G 是可解群. 1996 年,郭文彬教授在文献[50] 中证明了:一个群 G 的 Sylow 子群正规化子在 G 中有素数幂指数或奇数指数当且仅当 G 是可解群且 $G = KH$,其中 K 和 H 都是 G 的 Hall 子群,K 是在 G 的一个 $2'$ - Hall 子群中正规的幂零子群且 H 是 2 - 幂零的. 1999 年郭文彬教授在文献[51] 中以及 2002 年陈肖黎教授、郭文彬教授和岑嘉评教授在文献[24] 中进一步研究了准素子群正规化子有给定性质的有限群的幂零长. 从上面这些文献中我们看到:对于大量的群系 $\mathfrak{F}$,当一个群 G 的 Sylow 子群正规化子属于 $\mathfrak{F}$ 时,或当 G 的部分 Sylow 子群正规化子具有给定指数时,G 本身的结构并不清楚. 于是,作为以上文献研究的继续,本书的最后致力于研究部分 Sylow 子群的正规化子属于 $\mathfrak{F}$ 且具有给定指数的有限群,给出了相关群的结构分类定理.

目 录

第一章
基本概念和符号

为了叙述方便,本章给出全书最常用的一些符号和基本概念.

我们用 p,q 表示素数,π 表示某一非空的素数集合,π' 表示 π 在所有素数集合$\mathbb{P}$中的补集. 用符号 $\pi(n)$ 表示自然数 n 的所有素因子的集合. 用 $|G|$ 表示群 G 的阶;$H \leqslant G$ 表示 H 是群 G 的子群; $|G:H|$ 表示子群 H 在群 G 中的指数. $\pi(G)$ 表示群 G 的阶的素因数. 如果 $\pi(n) \subseteq \pi(\pi \cap \pi(n) \neq \varnothing)$,则自然数 n 称为 π - 数(相应 πd - 数). 如果一个群的阶是 π - 数,则该群称为 π - 群. 群 G 的 π - 子群 H 称为 Hall π - 子群,如果满足 $|G:H|$ 为 π' - 数. 对某个素数集合 π,子群 H 为 Hall π - 子群时,都称为 Hall 子群.

用 G_p 表示群 G 的 Sylow p - 子群; $G_{p'}$ 表示 G 的 Hall p' - 子群. $N_G(H)$ 表示子群 H 在群 G 中的正规化子;$C_G(H)$ 表示子群 H 在群 G 中的中心化子. 中心化子 $C_G(G)$ 称为群 G 的中心,记为 $Z(G)$. $Aut(G)$ 表示群 G 的自同构群. $H\ char\ G$ 表示 H 是 G 的特征子群. $N \trianglelefteq G$ 表示 N 是群 G 的正规子群. $G = [A]B$ 表示群 A 和群 B 的半直积,即 $G = AB, A \trianglelefteq G$,且 $A \cap B = 1$. $O_p(G)$ 表示群 G 的最大正规 p - 子群; $O_\pi(G)$ 表示群 G 的最大正规 π - 子群;$F_p(G)$ 表示群 G 的最大正规 p - 幂零子群;$F_\pi(G)$ 表示群 G 的最大正规 π - 幂零子群. $F(G)$ 表示群 G 的 Fitting 子群,即群 G 的所有正规幂零子群的积. $\Phi(G)$ 表示群 G 的 Frattini 子群,即群 G 的所有极大子群的交. $H_G = Core_G(H)$ 表示子群 H 在群 G 中的核,是包含在 H 中的群 G 的最大正规子群. 显然 $H_G = \cap_{x \in G} H^x$. $GL(n,F)$ 表示域 F 上的 n 级线性群.

定义 1.1.1　群 G 称为准素群,如果 G 的阶 $|G|$ 为某个素数 p 的方幂.

定义 1.1.2　群的集合 $\mathfrak{F}$ 称为群类,如果当这个集合 $\mathfrak{F}$ 包含群 G 时,则 $\mathfrak{F}$ 也包含所有与 G 同构的群. 当群 G 属于群类 $\mathfrak{F}$ 时,就称 G 是一个 $\mathfrak{F}$ - 群. 当一个群的子群属于 $\mathfrak{F}$ 时,就称这个子群是一个 $\mathfrak{F}$ - 子群. 对于一个群类 $\mathfrak{F}$,令 $\pi(\mathfrak{F}) = \bigcup\limits_{G \in \mathfrak{F}} \pi(G)$.

对于一个非空群类 $\mathfrak{F}$,每个群 G 都有两个与 $\mathfrak{F}$ 有关的正规子群. 一个是所有使商群属于 $\mathfrak{F}$ 的正规子群的交,记为 $G^{\mathfrak{F}}$,即 $G^{\mathfrak{F}} = \cap \{N \lhd G \mid G/N \in \mathfrak{F}\}$,并称之为群 G 的 $\mathfrak{F}$ - 上根. 另一个是 G 的所有正规 $\mathfrak{F}$ - 子群的积,记为 $G_{\mathfrak{F}}$,称之为群 G 的 $\mathfrak{F}$ - 根.

群类 $\mathfrak{F}$ 被称为群系,如果 $\mathfrak{F}$ 满足:

(1) 若 $G \in \mathfrak{F}, N \trianglelefteq G$,则 $G/N \in \mathfrak{F}$;

(2) 如果 $N_1 \trianglelefteq G, N_2 \trianglelefteq G$,且 $G/N_1 \in \mathfrak{F}, G/N_2 \in \mathfrak{F}$,则 $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$.

所有交换群的群类 $\mathfrak{A}$,所有幂零群的群类 $\mathfrak{N}$,所有可解群的群类 $\mathfrak{S}$,所有

超可解群的群类 $\mathfrak{U}$ 都为群系.

设 $\mathfrak{F}$,$\mathfrak{H}$ 是两个非空群系,令 $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \{G \mid G$ 是群且 $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}\}$.

则群类 $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ 称为群系 $\mathfrak{F}$ 和 $\mathfrak{H}$ 的积. 两个群系的积仍是一个群系.

定义 1.1.3　一个群系 $\mathfrak{F}$ 称为饱和的,如果当 $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ 时,总有 $G \in \mathfrak{F}$.

定义 1.1.4　群的子群列: $1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \cdots \subseteq G_{t-1} \subseteq G_t = G$　(1) 称为正规(次正规)群列,如果对于任意 $i = 1,\cdots,t$,总有 $G_{i-1} \trianglelefteq G$(相应的 $G_{i-1} \trianglelefteq G_i$). 正规群列的因子称为正规因子. 次正规群列的因子 $G_i/G_{i-1}(i = 1,\cdots,t)$ 称为这个列的次正规因子. 群 G 的次正规群列中的任一项称为群 G 的次正规子群.

次正规群列(1) 被称为群 G 的合成群列,如果对于所有 $i = 1,\cdots,t$,满足下列两个等价条件之一:$(a)G_i/G_{i-1}$ 为单群;$(b)G_i \neq G_{i-1}$,且如果 $G_{i-1} \subseteq T \subseteq G_i$,$T \trianglelefteq G_i$,则 $T \in \{G_{i-1},G_i\}$.

合成群列的因子称为合成因子.

正规群列(1) 被称为群 G 的主群列,如果对于任意 $i = 1,\cdots,t$,满足下列条件: $G_{i-1} \neq G_i$,且如果 $G_{i-1} \subseteq T \subseteq G_i$,及 $T \triangleleft G_i$,那么 $T \in \{G_{i-1},G_i\}$.

主群列的因子称为主因子. 群 G 的主因子也称为 G - 主因子.

定义 1.1.5　群 G 称为 p - 可解群,如果群 G 的每个非交换主因子是 p' - 群; 群 G 称为 π - 可解群,如果对于所有素数 $p \in \pi$,群 G 是 p - 可解的; 群 G 称为可解群,如果对于所有的素数 p,群 G 是 p - 可解的.

定义 1.1.6　群 G 称为 p - 超可解群,如果群 G 的每个非 p - 阶主因子是 p' - 群. 群 G 称为 π - 超可解群,如果对于所有素数 $p \in \pi$,群 G 是 p - 超可解群. 群 G 称为超可解群,如果对于所有的素数 p,群 G 是 p - 超可解的.

定义 1.1.7　群 G 称为 p - 幂零群,如果对于群 G 的每个主因子 H/K,或者 H/K 为 p' - 群,或者 $H/K \leqslant Z(G/K)$. 群 G 称为 π - 幂零群,如果对于所有素数 $p \in \pi$,群 G 是 p - 幂零的. 群 G 称为幂零群,如果对于所有素数 p,群 G 是 p - 幂零的.

定义 1.1.8　群 G 称为 π - 闭群,如果群 G 有正规 Hall π - 子群. 特别地,群 G 称为 p - 闭群,如果群 G 有正规 Sylow p - 子群.

定义 1.1.9　群 G 称为亚幂零群,如果群 G 含有一个幂零正规子群使得对应的商群幂零.

定义 1.1.10　一个有限群 G 称为 *Schmidt* 群,如果 G 本身非幂零,但 G 的

所有真子群都幂零.

定义 1.1.11　群 G 称为 A_4 - 自由的,如果群 G 的任意子群的商群都不同构于四次交代群 A_4.

定义 1.1.12　设 G 是一个 p - 可解群. 定义 G 的上升 p - 列如下:

$$1 = P_0(G) \lhd M_0(G) \lhd P_1(G) \lhd M_1(G) \lhd \cdots \lhd P_l(G) \lhd M_l(G) = G$$

其中 $M_i(G)/P_i(G)$ 为 $G/P_i(G)$ 中阶与 p 互素的极大正规子群, 而 $P_i(G)/M_{i-1}(G)$ 为 $G/M_{i-1}(G)$ 中具有 p - 幂阶的极大正规子群. 数 l 称为 G 的 p - 长,并记为 $l = l_p(G)$. 当 p 不整除 $|G|$时,令 $l_p(G) = 0$.

类似地,可以定义 π - 可解群的 π - 长,并记为 $l_\pi(G)$.

定义 1.1.13　设 G 是一个可解群,归纳定义 G 的特征子群 $F_i(G)$ 如下: $F_0(G) = 1, F_i(G)/F_{i-1}(G) = F(G/F_{i-1}(G))$ 是 $G/F_{i-1}(G)$ 的 Fitting 子群. 若 $F_{n-1}(G) < F_n(G) = G$,则 n 称为 G 的幂零长,记为 $n = n(G)$.

第二章

具有给定性质的子群与有限群结构

§2.1 $\mathfrak{F}_h$ - 正规子群

2.1.1 $\mathfrak{U}_h$ - 正规的 Sylow 子群的极大子群与 p - 幂零群

对一个群类 $\mathfrak{F}$, 群 G 的一个主因子 H/K 称为 $\mathfrak{F}$ - 中心的, 如果 $[H/K](G/C_G(H/K)) \in \mathfrak{F}$.

符号 $Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G)$ 表示群 G 的 $\mathfrak{F}$ - 超中心,即群 G 的其 G - 主因子是 $\mathfrak{F}$ - 中心的所有正规子群的积.

群 G 的子群 H 称为 $\mathfrak{F}$ - 超中心的,如果 $H \leqslant Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G)$.

定义 2.1.1　设 $\mathfrak{F}$ 是一个群类. 群 G 的子群 H 称为在群 G 中是 $\mathfrak{F}_h$ - 正规的,如果存在群 G 的一个正规子群 K,使 HK 为群 G 的一个正规 Hall 子群且 $(H \cap K)H_G/H_G \leqslant Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G/H_G)$.

符号 $\mathfrak{N}$、$\mathfrak{U}$ 分别表示所有幂零群和所有超可解群的群系.

定义 2.1.2　如果一个群系 $\mathfrak{F}$ 包含它的群的所有子群(所有正规子群),则称群系 $\mathfrak{F}$ 为子群闭的或 S - 闭的(正规子群闭的或 S_n - 闭的).

引理 2.1.1(**冯秀仙,郭文彬**)　设 G 为群,$H \leqslant K \leqslant G$. 则

(1) 子群 H 在群 G 中 $\mathfrak{F}_h$ - 正规当且仅当群 G 有一个正规子群 T,使得 HT 为群 G 的一个正规 Hall 子群,$H_G \leqslant T$ 且 $H/H_G \cap T/H_G \leqslant Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G/H_G)$;

(2) 设子群 H 在群 G 中正规. 如果 K 在群 G 中 $\mathfrak{F}_h$ - 正规,则 K/H 在 G/H 中 $\mathfrak{F}_h$ - 正规;

(3) 设子群 H 在群 G 中正规. 那么对群 G 的每个 $\mathfrak{F}_h$ - 正规子群 E,如果 $(|H|,|E|) = 1$,则 HE/H 在 G/H 中 $\mathfrak{F}_h$ - 正规;

(4) 如果子群 H 在群 G 中 $\mathfrak{F}_h$ - 正规且 $\mathfrak{F}$ 为子群闭的, 则 H 在 K 中 $\mathfrak{F}_h$ - 正规;

(5) 如果子群 H 在群 G 中 $\mathfrak{F}_h$ - 正规且 $\mathfrak{F}$ 为正规子群闭的,则 H 在 K 中 $\mathfrak{F}_h$ - 正规;

(6) 如果 $G \in \mathfrak{F}$,则群 G 的每个子群在群 G 中 $\mathfrak{F}_h$ - 正规.

引理 2.1.2(**冯秀仙,郭文彬**)　群 G 超可解当且仅当存在群 G 的正规子群 E,使得 G/E 超可解且 E 的每个非循环 Sylow 子群的极大子群在群 G 中 $\mathfrak{U}_h$ - 正规.