



理想树

6·7
高考

自主复习

主 编 / 杨文彬

主题引领 逐题归类 分理题海

1 题解 N 题

高阶题典

GAOJIETIDIAN GAOZHONGSHUXUE

以 题 代 讲 学习导师

高中数学

主干题

能力题

高考题

必考题

发散题

基础题

新模题

高频题

外语教学与研究出版社



理想树

6·7
高考

自主复习

高阶 题典

主 编 / 杨文彬

高中数学

本册主编：孙国明	李朝曙	张玉法	桑永利	代红伟
丛书编委：卞小峰	崔腾云	代红伟	董 岩	冯庆敏
(按音序排列)	郭双燕	郭月萍	胡丽影	胡松涛
付彩平	江和龙	姜新华	李朝曙	李艳奎
李彩红	刘光寨	刘慧峰	刘久华	罗世文
刘保华	桑永利	史绍振	孙国明	田文通
孟凡盛	王洪江	王志明	夏仓友	邢洪芳
王东升	杨 坤	杨献文	杨小青	袁传海
徐栋栋	张玉法	赵兰运	朱英扬	
张小会				

外语教学与研究出版社
北京

图书在版编目 (CIP) 数据

高阶题典. 高中数学 / 孙国明等主编; 卞小峰等编. — 北京: 外语教学与研究出版社, 2015.4

(理想树 6·7 高考自主复习 / 杨文彬主编)

ISBN 978-7-5135-5911-9

I. ①高… II. ①孙… ②卞… III. ①中学数学课—高中—习题集—升学参考资料 IV. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 079463 号

出版人 蔡剑峰
策 划 孙雪莲 张金英
责任编辑 于雯雯
执行编辑 刘丽英
封面设计 木头羊工作室
出版发行 外语教学与研究出版社
社 址 北京市西三环北路 19 号 (100089)
网 址 <http://www.fltrp.com>
印 刷 保定市中国画美凯印刷有限公司
开 本 787×1092 1/16
印 张 36.5
版 次 2015 年 4 月第 1 版 2015 年 4 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5135-5911-9
定 价 62.80 元

外研社教辅出版分社:

咨询电话: 010-88819781

新浪/腾讯官方微博: @外研社教辅(更多信息, 更多交流)

电子信箱: jiaofu@fltrp.com

购书电话: 010-88819928 / 9929 / 9930 (邮购部)

购书咨询: (010) 88819929 电子邮箱: club@fltrp.com

外研书店: <http://www.fltrpstore.com>

凡印刷、装订质量问题, 请联系我社印制部

联系电话: (010) 61207896 电子邮箱: zhijian@fltrp.com

凡侵权、盗版书籍线索, 请联系我社法律事务部

举报电话: (010) 88817519 电子邮箱: banquan@fltrp.com

法律顾问: 立方律师事务所 刘旭东律师

中咨律师事务所 殷 斌律师

物料号: 259110001

第1章 集 合

第1节	集合的含义与表示	1
第2节	集合间的基本关系	5
第3节	集合的基本运算	9
第4节	与集合有关的创新题	15

第2章 函 数

第1节	函数的概念及其表示	18
第2节	函数的基本性质	30

第3章 基本初等函数

第1节	指数函数	42
第2节	对数函数	49
第3节	二次函数与幂函数	56
第4节	函数的图象	64
第5节	函数与方程	70
第6节	函数模型及其应用	75

第4章 立体几何初步

第1节	空间几何体的结构及其三视图和直观图	80
第2节	空间几何体的表面积和体积	90
第3节	空间点、直线、平面之间的位置关系	98
第4节	直线、平面平行的判定及其性质	105
第5节	直线、平面垂直的判定及其性质	112

第5章 平面解析几何初步

第1节	直线方程及两条直线的位置关系	125
第2节	圆的方程及直线与圆、圆与圆的位置关系	136

第6章 算法初步

第7章 三角函数与解三角形

第1节	任意角的三角函数	160
第2节	三角函数的图象和性质	170
第3节	三角恒等变换	181
第4节	解三角形	197

第8章 平面向量

第1节	平面向量的概念及其线性运算	207
第2节	平面向量的基本定理及坐标运算	214
第3节	平面向量的数量积	221

第9章 数 列

第1节	数列的概念及表示	233
第2节	等差数列	243
第3节	等比数列	253
第4节	数列通项公式及数列求和	263
第5节	数列模型的应用	272

第 10 章 不等式

第 1 节	不等式的性质	277
第 2 节	一元二次不等式	282
第 3 节	二元一次不等式(组)及简单的线性规划	290
第 4 节	基本不等式	303

第 11 章 常用逻辑用语

第 1 节	命题及其关系	310
第 2 节	简单的逻辑联结词	315
第 3 节	全称量词与存在量词	318

第 12 章 圆锥曲线

第 1 节	椭 圆	323
第 2 节	双曲线	346
第 3 节	抛物线	364
第 4 节	曲线与方程	382

第 13 章 空间向量与立体几何

第 1 节	空间向量及其运算	390
第 2 节	立体几何中的向量方法	399

第 14 章 导数及其应用

第 1 节	导数的概念及其几何意义	413
第 2 节	导数的应用	418
第 3 节	定积分及其简单应用	436

第 15 章 推理与证明

第 1 节	合情推理与演绎推理	441
第 2 节	直接证明与间接证明	448
第 3 节	数学归纳法	453

第 16 章 数系的扩充与复数的引入

第 1 节	数系的扩充和复数的概念	458
第 2 节	复数代数形式的四则运算	462

第 17 章 计数原理

第 1 节	分类计数原理、分步计数原理	466
第 2 节	排列与组合	473
第 3 节	二项式定理	483

第 18 章 概率与统计

第 1 节	古典概型与几何概型	490
第 2 节	随机变量及其分布列、均值与方差	499
第 3 节	统计与统计案例	515

第 19 章 选修 4 系列

选修 4-1	几何证明选讲	532
选修 4-4	坐标系与参数方程	549
选修 4-5	不等式选讲	563



第1章 集合

A必考 主题 1	集合的含义与判定	1
主题 2	集合与元素的关系	1
主题 3	集合的表示方法	2
B选考 主题 4	集合元素的特性及应用	3
主题 5	元素与集合关系的判断	3
C能力 主题 6	数集与点集的分	4
A必考 主题 7	集合的子集、真子集的概念	5
主题 8	集合间关系的判断	5
主题 9	集合相等关系的应用	6
主题 10	由集合间的基本关系确定参数的取值范围	6
B选考 主题 11	集合间关系的应用	7
C能力 主题 12	数形结合解集合问题	7
主题 13	利用分类讨论研究集合间的关系	8
A必考 主题 14	并集及其运算	9
主题 15	交集及其运算	10
主题 16	补集及其运算	10
主题 17	集合交、并、补的混合运算	11
主题 18	利用集合的交、并、补求参数范围	11
B选考 主题 19	集合间的基本运算	12
主题 20	集合的运算性质与应用	13
C能力 主题 21	数轴与韦恩(Venn)图在解题中的应用	13
主题 22	与集合有关的探索性问题	14
A必考 主题 23	创新集合新定义	15
主题 24	创新集合新运算	15
主题 25	创新集合新性质	16
B选考 主题 26	与集合有关的创新题	17

第2章 函数

A必考 主题 27	函数的概念	18
主题 28	函数相等	19
主题 29	求函数定义域	19
主题 30	求函数值域	20
主题 31	函数的表示方法	21
主题 32	分段函数及应用	22
主题 33	函数图象及应用	23
主题 34	映射	25
B选考 主题 35	函数解析式的应用	25
主题 36	函数的定义域与值域	26
主题 37	分段函数	26
C能力 主题 38	确定函数解析式	27
主题 39	图象(图形)信息问题	28
主题 40	函数定义域、值域中的逆向问题	29
A必考 主题 41	函数单调性的判断或证明	30
主题 42	函数的最大(小)值	31
主题 43	函数单调性的应用	32

主题 44	函数奇偶性的判断与证明	34
主题 45	函数奇偶性的应用	35
主题 46	函数的周期性及其应用	36
B选考 主题 47	函数的单调性及最值	37
主题 48	函数的奇偶性与周期性	38
C能力 主题 49	抽象函数问题	39
主题 50	函数性质的综合应用	40
主题 51	不等式恒成立、能成立与恰成立问题	41

第3章 基本初等函数

A必考 主题 52	指数幂的运算	42
主题 53	指数型复合函数的定义域、值域	43
主题 54	指数函数的图象及其应用	44
主题 55	指数函数的性质及应用	45
B选考 主题 56	指数函数的函数值的有关计算	46
主题 57	指数函数的性质应用(奇偶性与单调性)	46
主题 58	指数型函数图象的性质	47
C能力 主题 59	指数幂的规律	48
主题 60	指数型函数的新定义题	48
A必考 主题 61	对数的化简与求值	49
主题 62	对数函数的概念	50
主题 63	对数函数的图象及其应用	51
主题 64	对数函数的性质及其应用	52
主题 65	函数值的大小比较	53
B选考 主题 66	对数的化简与求值	53
主题 67	对数的大小比较	53
主题 68	对数型函数的定义域	54
主题 69	对数函数图象及其应用	54
主题 70	对数函数性质及应用	55
C能力 主题 71	数形结合思想的应用	55
A必考 主题 72	求二次函数的解析式	56
主题 73	二次函数的图象	57
主题 74	二次函数的最值	57
主题 75	二次方程根的分布	58
主题 76	幂函数值的大小比较	59
主题 77	幂函数的图象及性质	60
B选考 主题 78	幂函数性质的应用	61
主题 79	幂函数图象	61
主题 80	二次函数图象与性质的应用	62
主题 81	二次函数与不等式的应用	62
C能力 主题 82	幂函数图象特征(凸性)	63
A必考 主题 83	作函数的图象	64
主题 84	知式选图与知图选式	65
主题 85	函数图象的应用	66
B选考 主题 86	判断函数图象	67
主题 87	函数图象的应用	68
C能力 主题 88	函数图象的对称问题	68



(A必考) 主题 89	判断函数零点所在的区间	70
主题 90	零点个数的判断	71
主题 91	二分法及其应用	71
(B选考) 主题 92	函数零点的判断	72
主题 93	函数零点的应用	72
(C能力) 主题 94	与零点有关的综合应用	73
(A必考) 主题 95	幂函数模型	75
主题 96	指数型函数模型	75
主题 97	对数型函数模型	76
主题 98	分段函数模型	77
(B选考) 主题 99	函数模型的应用	78
(C能力) 主题 100	创建新函数	79
第4章 立体几何初步		
(A必考) 主题 101	棱柱的结构特征	80
主题 102	棱锥的结构特征	81
主题 103	棱台的结构特征	81
主题 104	圆柱、圆锥、圆台的结构特征	82
主题 105	球的结构特征	82
主题 106	简单组合体的结构特征	83
主题 107	中心投影与平行投影	84
主题 108	三视图的识别	84
主题 109	三视图的有关计算	85
主题 110	几何体的直观图	86
(B选考) 主题 111	柱、锥、台的结构特征的应用	87
主题 112	三视图的识别	88
主题 113	三视图的有关计算	88
(C能力) 主题 114	三视图的综合问题	89
(A必考) 主题 115	空间几何体的表面积问题	90
主题 116	空间旋转体的面积问题	91
主题 117	空间多面体的体积问题	91
主题 118	空间旋转体的体积问题	92
(B选考) 主题 119	简单几何体的表面积	93
主题 120	组合体的表面积	94
主题 121	与球有关的表面积	95
主题 122	简单几何体的体积	95
主题 123	组合体的体积	96
(C能力) 主题 124	几何体与函数的综合应用	96
主题 125	几何体的表面积与体积的最值问题	97
(A必考) 主题 126	确定平面个数	98
主题 127	点、线、面的位置关系和性质	98
主题 128	点共线、线共点问题	99
主题 129	共面问题	99
主题 130	平行公理与等角定理的应用	100
主题 131	异面直线所成的角	101
(B选考) 主题 132	点、线、面的位置关系	102
主题 133	异面直线问题	103
(C能力) 主题 134	立体图形中的截面问题	104

(A必考) 主题 135	线线平行	105
主题 136	线面平行	106
主题 137	面面平行	108
(B选考) 主题 138	空间平行关系的判定与性质	109
(C能力) 主题 139	直线、平面平行的有关计算	111
(A必考) 主题 140	线线垂直	112
主题 141	线面垂直	113
主题 142	面面垂直	115
主题 143	直线与平面所成的角	116
主题 144	距离问题	117
主题 145	二面角	118
(B选考) 主题 146	空间线面关系的判断	119
主题 147	空间中的平行与垂直的判定与性质	120
主题 148	空间角与距离	121
(C能力) 主题 149	空间位置关系中的存在性问题	123

第5章 平面解析几何初步

(A必考) 主题 150	直线的倾斜角和斜率	125
主题 151	斜率的应用	126
主题 152	直线的方程	126
主题 153	两条直线的位置关系	127
主题 154	对称问题	129
主题 155	距离问题	130
主题 156	直线系及其应用	131
主题 157	直线方程的综合应用	132
(B选考) 主题 158	直线的倾斜角与斜率	132
主题 159	两直线的平行关系	133
主题 160	两直线的垂直关系	133
主题 161	两直线的相交问题	134
主题 162	直线方程的综合应用	134
(C能力) 主题 163	直线的新型题	135
(A必考) 主题 164	求圆的方程	136
主题 165	求三角形的内切圆或外接圆的方程	137
主题 166	直线与圆的位置关系的判定	137
主题 167	求圆的切线方程	138
主题 168	圆的弦长问题	139
主题 169	圆与圆的位置关系	140
主题 170	两圆的公共弦及圆系方程	141
主题 171	与圆有关的综合问题	141
(B选考) 主题 172	求圆的方程	142
主题 173	弦长问题	143
主题 174	直线与圆的位置关系	143
主题 175	圆与圆的位置关系	144
主题 176	圆的综合应用	144
(C能力) 主题 177	数形结合思想的应用	146
主题 178	分类讨论思想的应用	146
主题 179	与圆有关的轨迹问题	147
主题 180	与距离有关的最值问题	148



第6章 算法初步

(A必考) 主题 181	设计算法并绘制程序框图	149
主题 182	求解选择结构的运行结果	150
主题 183	求解循环结构的运行结果	150
主题 184	根据程序框图确定算法功能	151
主题 185	根据运行结果填充程序框图	152
主题 186	算法语句的应用	153
主题 187	算法案例:辗转相除法和更相减损术	154
主题 188	算法案例:秦九韶法	154
主题 189	算法案例:数制的转换	155
(B选考) 主题 190	求解程序运行结果	155
主题 191	补充程序框图	156
主题 192	算法语句	157
(C能力) 主题 193	由输出结果求参数值	158
主题 194	程序框图的实际应用	159

第7章 三角函数与解三角形

(A必考) 主题 195	角度与弧度互化的应用	160
主题 196	终边相同的角的表示	161
主题 197	判断角的终边所在的象限	161
主题 198	弧长公式及扇形面积公式的应用	162
主题 199	任意角的三角函数的定义	163
主题 200	三角函数值符号的判断	164
主题 201	同角三角函数的基本关系式的应用	165
主题 202	三角函数的诱导公式的应用	166
(B选考) 主题 203	三角函数的定义	167
主题 204	同角三角函数的基本关系式	168
主题 205	三角函数的诱导公式	168
(C能力) 主题 206	利用 $\sin \alpha \pm \cos \alpha$ 与 $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ 的关系 解题	168
(A必考) 主题 207	三角函数的图象	170
主题 208	正弦函数的性质	171
主题 209	余弦函数的性质	172
主题 210	正切函数的性质	173
主题 211	函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象及应用	174
主题 212	三角函数模型的简单应用	175
(B选考) 主题 213	三角函数的图象和性质	176
主题 214	三角函数的图象及其变换	177
(C能力) 主题 215	三角函数单调区间的确定	179
主题 216	函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi) + b$ 中 φ 的确定	180
(A必考) 主题 217	两角和与差的余弦	181
主题 218	两角和与差的正弦	182
主题 219	两角和与差的正切	183
主题 220	二倍角的正弦、余弦、正切公式的应用	184

主题 221	半角的正弦、余弦和正切公式的应用	185
主题 222	和差化积与积化和差	186
主题 223	三角恒等变换的综合应用	187
(B选考) 主题 224	两角和与差的三角函数公式的应用	188
主题 225	二倍角公式的应用	189
主题 226	三角恒等变换的综合应用	190
(C能力) 主题 227	含 $a \sin x + b \cos x$ 式子的相关问题	192
主题 228	三角函数的求角问题	193
主题 229	三角函数的求最值问题	194
主题 230	三角公式在实际问题中的应用	196
(A必考) 主题 231	正弦定理的应用	197
主题 232	余弦定理的应用	198
主题 233	三角形形状的判定	199
主题 234	正弦定理、余弦定理的综合运用	200
主题 235	解三角形的应用举例	201
(B选考) 主题 236	正弦定理	203
主题 237	余弦定理	204
主题 238	正弦定理、余弦定理的综合应用	204
(C能力) 主题 239	正弦定理、余弦定理的实际应用	206

第8章 平面向量

(A必考) 主题 240	平面向量的有关概念	207
主题 241	平面向量的加法运算及其应用	208
主题 242	平面向量的减法运算及其应用	209
主题 243	平面向量的数乘运算及其应用	209
(B选考) 主题 244	向量的线性运算	210
主题 245	向量线性运算的几何意义的应用	211
(C能力) 主题 246	向量共线的判定及应用	212
主题 247	利用向量的线性运算求模	213
(A必考) 主题 248	基底的理解与判定	214
主题 249	用基底表示向量及应用	214
主题 250	利用平面向量基本定理解决几何问题	215
主题 251	平面向量的坐标运算	216
主题 252	平面向量共线的坐标及其应用	216
(B选考) 主题 253	平面向量基本定理	218
主题 254	平面向量的坐标运算	218
主题 255	由向量平行求参数值	219
(C能力) 主题 256	利用向量坐标解决平面几何问题	219
主题 257	向量坐标运算与解析几何的综合	220
(A必考) 主题 258	平面向量数量积的定义及运算	221
主题 259	利用向量数量积定义求模	222
主题 260	利用向量解决垂直问题	222
主题 261	利用向量数量积的定义求角(或其余弦值)	223
主题 262	向量数量积的坐标运算	224
主题 263	利用向量数量积的坐标运算求模	225



主题 264	利用向量数量积的坐标运算解决垂直问题	225
主题 265	利用向量数量积的坐标运算求角(或其余弦值)	226
主题 266	平面向量数量积在几何中的应用	226
主题 267	向量与其他知识的综合应用	227
(B) 主题 268	数量积的定义	228
主题 269	平面向量的长度问题	229
主题 270	平面向量的夹角	229
主题 271	向量垂直的应用	230
(C) 主题 272	新定义型问题	231
主题 273	平面向量与三角形的四心	231
主题 274	平面向量与直线、圆的综合	232

第9章 数列

(A) 主题 275	观察法求数列的通项公式	233
主题 276	由前 n 项和公式求通项公式	234
主题 277	由递推公式求通项公式	235
主题 278	数列的性质	237
主题 279	数列的周期性	238
(B) 主题 280	求数列的通项公式	239
主题 281	数列的周期性	240
主题 282	数列的最值问题	240
主题 283	数列的概念、通项公式与不等式	241
(C) 主题 284	信息题新定义	242
(A) 主题 285	等差数列的判定与证明	243
主题 286	等差数列基本运算	244
主题 287	等差数列通项的性质	245
主题 288	等差数列前 n 项和的性质	246
主题 289	等差数列的最值问题	248
(B) 主题 290	等差数列的定义与通项公式	249
主题 291	等差数列的性质	250
主题 292	等差数列的前 n 项和	250
主题 293	等差数列的综合应用	251
(C) 主题 294	等差数列的开放与探索问题	252
(A) 主题 295	等比数列的判定及证明	253
主题 296	等比数列的单调性	254
主题 297	等比数列基本运算	255
主题 298	等比数列通项公式的性质	256
主题 299	等比数列前 n 项和的性质	256
主题 300	等差数列与等比数列的综合问题	257
(B) 主题 301	等比数列的定义及通项公式	258
主题 302	等比数列的性质	258
主题 303	等比数列前 n 项和的计算	259
主题 304	等比数列的综合应用	260
(C) 主题 305	以数阵为背景的数列问题	261
(A) 主题 306	构造等差数列、等比数列求通项公式	263

主题 307	公式法求和	264
主题 308	分组转化法求和	265
主题 309	裂项相消法求和	265
主题 310	错位相减法求和	266
主题 311	倒序相加法求和	268
(B) 主题 312	数列的求和	268
主题 313	数列与不等关系的应用	269
(C) 主题 314	定义型、类比型数列新题	270
主题 315	与数列有关的开放性问题	271
(A) 主题 316	等差数列模型的应用	272
主题 317	等比数列模型的应用	272
主题 318	等差数列与等比数列模型的综合应用	274
(B) 主题 319	数列模型解决实际问题	274
(C) 主题 320	数列的新定义或新模型	276

第10章 不等式

(A) 主题 321	应用不等式表示不等关系	277
主题 322	利用不等式的性质判断命题的真假	277
主题 323	利用不等式的性质求取值范围	278
主题 324	利用不等式的性质比较大小	279
(B) 主题 325	不等式性质的应用	280
(C) 主题 326	不等式与函数的综合问题	280
主题 327	不等式与数列的综合问题	281
(A) 主题 328	一元一次不等式的解法	282
主题 329	一元二次不等式的解法	282
主题 330	二次不等式、二次函数及二次方程的关系	283
主题 331	含有参数的一元二次不等式	284
主题 332	分式不等式的解法	285
主题 333	一元二次不等式的应用	285
(B) 主题 334	解不等式	286
主题 335	一元二次不等式与方程、函数的综合应用	287
主题 336	一元二次不等式的应用	287
(C) 主题 337	与一元二次不等式有关的恒成立问题	287
主题 338	一元二次方程根的分布问题	288
主题 339	一元高次不等式的解法	289
(A) 主题 340	二元一次不等式(组)表示的平面区域	290
主题 341	简单的线性规划	291
主题 342	含参数的线性规划问题	292
主题 343	线性规划与整点问题	293
主题 344	线性规则在实际问题中的应用	295
(B) 主题 345	利用线性规划求线性目标函数的最优解	297
主题 346	含参数的线性规划问题	298



主题 347	线性规划的其他问题	299	主题 387	与椭圆有关的综合问题	336
主题 348	线性规划在实际问题中的应用	300	主题 388	与椭圆有关的存在性问题	341
能力 主题 349	利用线性规划求非线性目标函数的最优解	300	主题 389	与椭圆有关的定点问题	342
主题 350	可转化为线性规划问题的函数问题	302	主题 390	与椭圆有关的定值问题	344
必考 主题 351	利用基本不等式求最值	303	必考 主题 391	双曲线的定义	346
主题 352	利用基本不等式求有关参数范围	304	主题 392	双曲线的标准方程	347
主题 353	利用基本不等式证明不等式	305	主题 393	双曲线的几何性质	349
主题 354	利用基本不等式解决实际问题	306	主题 394	双曲线的焦点三角形	349
选考 主题 355	利用基本不等式求最值	307	主题 395	双曲线的离心率	350
主题 356	利用基本不等式求参数的值或范围	308	主题 396	直线与双曲线的位置关系、弦长问题	351
主题 357	利用基本不等式解决实际问题或证明问题	309	主题 397	与双曲线有关的范围、最值问题	353
能力 主题 358	基本不等式应用中的易错点	309	必考 主题 398	双曲线的标准方程	354
第 11 章 常用逻辑用语					
必考 主题 359	命题及命题真假的判断	310	主题 399	双曲线的离心率问题	355
主题 360	四种命题的关系及真假判断	311	主题 400	双曲线的渐近线问题	356
主题 361	充分条件和必要条件	312	主题 401	直线与双曲线相交、弦长问题	357
选考 主题 362	命题真假的判断	313	主题 402	双曲线的综合应用	358
主题 363	充分条件与必要条件	313	能力 主题 403	双曲线定义的应用	360
能力 主题 364	命题在实际生活中的应用	314	主题 404	与双曲线有关的定点、定值问题	361
必考 主题 365	含逻辑联结词命题的真假判断	315	主题 405	与双曲线有关的探索性问题	363
主题 366	利用含逻辑联结词的命题的真假求参数的取值(范围)	316	必考 主题 406	抛物线的定义	364
选考 主题 367	简单逻辑联结词	316	主题 407	抛物线的标准方程	365
能力 主题 368	命题“ $p \wedge q$ ”与“ $p \vee q$ ”的否定	317	主题 408	抛物线的几何性质	366
必考 主题 369	全称量词与全称命题	318	主题 409	直线与抛物线的位置关系、弦长问题	367
主题 370	存在量词与特称命题	318	主题 410	与抛物线有关的定点、定值问题	369
主题 371	全(特)称命题的否定	319	主题 411	与抛物线有关的最值、范围问题	371
选考 主题 372	全称命题和特称命题的否定形式	320	选考 主题 412	抛物线的标准方程	373
主题 373	全称命题和特称命题的真假判断	320	主题 413	抛物线的性质	374
能力 主题 374	利用全称命题、特称命题求参数取值范围	321	主题 414	直线与抛物线的位置关系的简单应用	374
第 12 章 圆锥曲线					
必考 主题 375	椭圆的定义	323	主题 415	与抛物线有关的综合问题	376
主题 376	椭圆的标准方程	323	能力 主题 416	焦点弦问题	379
主题 377	椭圆的长轴、短轴、焦点和顶点的综合应用	325	主题 417	与抛物线有关的存在性问题	380
主题 378	椭圆的离心率	325	必考 主题 418	曲线与方程的定义	382
主题 379	椭圆的焦点三角形	327	主题 419	求曲线的方程	383
主题 380	直线与椭圆的位置关系	328	主题 420	曲线的交点问题	386
主题 381	求与椭圆相交的直线的方程	329	选考 主题 421	曲线方程的综合应用	387
主题 382	与椭圆有关的最值、范围问题	331	能力 主题 422	轨迹方程中的限制条件	389
主题 383	与椭圆有关的对称问题	333	第 13 章 空间向量与立体几何		
选考 主题 384	椭圆的定义和标准方程	334	必考 主题 423	空间向量的线性运算	390
主题 385	椭圆的离心率	335	主题 424	空间向量基本定理	391
主题 386	与椭圆有关的直线方程问题与弦长问题	336	主题 425	空间向量的数量积及其应用	392
			主题 426	空间向量的坐标运算	394
			主题 427	空间向量的综合应用	395
			选考 主题 428	空间向量及其应用	397



C能力 主题 429	空间向量与三角函数的综合应用	398
主题 430	空间向量与方程的综合应用	398
主题 431	空间向量与不等式的综合应用	398
A必考 主题 432	平面的法向量	399
主题 433	用向量的方法证明空间中的平行关系	400
主题 434	用向量的方法证明空间中的垂直关系	401
主题 435	用向量的方法求空间的角和距离	403
B选考 主题 436	空间向量在立体几何中的应用	406
C能力 主题 437	用向量法解决立体几何中的探索性问题	409

第 14 章 导数及其应用

A必考 主题 438	利用导数的定义求函数的导数	413
主题 439	利用导数的几何意义求曲线的切线方程	414
主题 440	求导运算	415
B选考 主题 441	导数的几何意义问题	417
C能力 主题 442	导数与数列的应用	417
A必考 主题 443	导数法判断函数图象	418
主题 444	导数法研究函数的单调性	419
主题 445	导数法研究函数的极值问题	420
主题 446	导数法研究函数的最值问题	421
主题 447	实际应用问题	422
主题 448	导数的综合应用	423
主题 449	方程根的讨论	425
B选考 主题 450	函数的极值与最值问题	427
主题 451	函数单调性的判断	428
主题 452	导数的综合应用	430
主题 453	导数的实际应用	433
C能力 主题 454	函数与方程思想在导数中的应用	433
主题 455	分类讨论思想在导数中的应用	433
主题 456	数形结合思想在导数中的应用	434
主题 457	构造函数法在导数中的应用	435
A必考 主题 458	定积分的计算	436
主题 459	利用定积分求平面图形的面积	437
主题 460	定积分的实际应用	438
B选考 主题 461	定积分的计算问题	439
主题 462	定积分的应用	439
C能力 主题 463	定积分的综合应用	440

第 15 章 推理与证明

A必考 主题 464	归纳推理	441
主题 465	类比推理	442
主题 466	演绎推理	444
B选考 主题 467	归纳推理	445
主题 468	演绎推理	446

C能力 主题 469	三段论推理	447
主题 470	传递性关系推理	447
主题 471	完全归纳推理	447
A必考 主题 472	直接证明	448
主题 473	间接证明	449
B选考 主题 474	直接证明与间接证明的应用	450
C能力 主题 475	反证法解决“至多、至少”问题	452
A必考 主题 476	用数学归纳法证明等式	453
主题 477	用数学归纳法证明不等式	453
主题 478	用数学归纳法证明整除问题	454
B选考 主题 479	数学归纳法的应用	455
C能力 主题 480	归纳—猜想—证明	457

第 16 章 数系的扩充与复数的引入

A必考 主题 481	复数的有关概念	458
主题 482	复数的几何意义	459
主题 483	复数相等的应用	459
B选考 主题 484	复数相等	460
主题 485	复数的几何意义	460
C能力 主题 486	复数的几何意义的应用	461
A必考 主题 487	复数的代数运算	462
主题 488	复数的模	463
主题 489	共轭复数	463
B选考 主题 490	复数的代数运算	464
主题 491	复数的模	464
主题 492	共轭复数	465
C能力 主题 493	复数的轨迹问题	465

第 17 章 计数原理

A必考 主题 494	分类加法计数原理	466
主题 495	分步乘法计数原理	467
主题 496	两个计数原理的综合运用	468
B选考 主题 497	两个计数原理的应用	469
主题 498	两个计数原理在古典概型中的应用	470
C能力 主题 499	涂色问题	471
A必考 主题 500	排列与排列数	473
主题 501	排列应用题	473
主题 502	组合与组合数	474
主题 503	组合应用题	475
主题 504	排列组合的综合问题	476
B选考 主题 505	排列问题	477
主题 506	组合问题	477
主题 507	排列与组合的综合	478
主题 508	排列组合与概率的综合运用	478
C能力 主题 509	含排列数的方程及不等式问题	479
主题 510	排列的综合问题	479
主题 511	组合与几何的综合运用	480
主题 512	分组与分配问题	481



(A)必考	主题 513	二项式定理的展开式及其通项	483
	主题 514	二项式系数与项的系数	483
	主题 515	二项展开式的各项的系数和	484
	主题 516	项的系数最值问题	485
(B)选考	主题 517	求特定项(系数)或由特定项(系数)求参数	486
	主题 518	二项式定理的应用	487
(C)能力	主题 519	二项展开式中指定项的系数求法	487
	主题 520	含组合数的求和与证明问题	488
	主题 521	二项式定理的应用	489
第 18 章 概率与统计			
(A)必考	主题 522	随机事件的概率	490
	主题 523	互斥事件、对立事件的概率	491
	主题 524	古典概型的求法	492
	主题 525	几何概型的求法	493
(B)选考	主题 526	频率与概率	495
	主题 527	古典概型	496
	主题 528	几何概型	497
(C)能力	主题 529	概率与其他知识的综合	498
(A)必考	主题 530	离散型随机变量及其分布列	499
	主题 531	条件概率与相互独立事件的概率	500
	主题 532	独立重复试验与二项分布	501
	主题 533	离散型随机变量的均值	502
	主题 534	离散型随机变量的方差	504
	主题 535	正态分布	505
(B)选考	主题 536	条件概率与相互独立事件的概率	506
	主题 537	独立重复试验与二项分布的应用	507
	主题 538	离散型随机变量的分布列与均值的应用	508
	主题 539	离散型随机变量的方差的应用	510
	主题 540	正态分布的应用	511
(C)能力	主题 541	条件概率与独立事件的综合应用	512
	主题 542	离散型随机变量的均值与分布列的综合应用	513
	主题 543	正态分布的实际应用	514
(A)必考	主题 544	随机抽样三种抽样方法的判断	515
	主题 545	频率分布直方图	516
	主题 546	茎叶图	518
	主题 547	样本的数字特征	519
	主题 548	变量的相关性	520
	主题 549	回归分析	521
	主题 550	独立性检验	522
(B)选考	主题 551	随机抽样	523
	主题 552	用样本估计总体	524
	主题 553	变量的相关性及回归分析	527
	主题 554	独立性检验	528
(C)能力	主题 555	利用回归直线对总体进行估计及综合	

应用	530
主题 556 根据独立性检验结论求参数值	531

第 19 章 选修 4 系列

(A)必考	主题 557	平行截面定理	532
	主题 558	相似三角形的判定	533
	主题 559	相似三角形的性质	534
	主题 560	直角三角形的射影定理	535
	主题 561	圆周角定理	536
	主题 562	圆内接四边形的性质与判定	537
	主题 563	圆的切线的性质与判定	538
	主题 564	弦切角的性质	540
	主题 565	与圆有关的比例线段	541
	主题 566	平行投影	542
	主题 567	平面与圆柱面的截线	543
	主题 568	平面与圆锥面的截线	543
(B)选考	主题 569	平行截面定理与相似三角形	545
	主题 570	圆的初步	546
(C)能力	主题 571	三角形中的探索性问题	547
(A)必考	主题 572	平面直角坐标系中的伸缩变换	549
	主题 573	极坐标(方程)与直角坐标(方程)的互化	550
	主题 574	直线、圆的极坐标方程	551
	主题 575	参数方程与普通方程的互化	552
	主题 576	圆的参数方程及其应用	554
	主题 577	圆锥曲线的参数方程及其应用	554
	主题 578	直线的参数方程及其应用	555
	主题 579	参数方程和极坐标方程的综合应用	556
	主题 580	利用参数方程求轨迹	558
(B)选考	主题 581	极坐标方程的求解	559
	主题 582	极坐标方程与参数方程的互化	559
	主题 583	极坐标方程的应用	559
	主题 584	参数方程的应用	560
	主题 585	极坐标方程和参数方程的综合应用	561
(C)能力	主题 586	摆线问题	562
(A)必考	主题 587	具体绝对值不等式的解法	563
	主题 588	含字母参数的绝对值不等式	564
	主题 589	绝对值三角不等式定理	565
	主题 590	不等式证明	566
(B)选考	主题 591	绝对值不等式的解法	568
	主题 592	含参数的绝对值不等式	569
	主题 593	不等式的证明	570
	主题 594	利用不等式的性质求(证明)最值	570
(C)能力	主题 595	利用柯西不等式证明不等式	571
	主题 596	利用柯西不等式求最值	571
	主题 597	排序不等式的应用	572

第1章 集合 第1节 集合的含义与表示

【主题预览】

A必考 主题1 集合的含义与判定.....	1	B高考 主题4 集合元素的特性及应用.....	3
主题2 集合与元素的关系.....	1	主题5 元素与集合关系的判断.....	3
主题3 集合的表示方法.....	2	C能力 主题6 数集与点集的区别.....	4

A 必考必刷题组

主题1 集合的含义与判定 **

1 现有下列各组对象：①著名的数学家；②不超过30的所有非负整数；③ $x^2 - 4 = 0$ 在实数范围内的解；④直角坐标平面中，第一象限内的一些点；⑤1, 2, 3, 1. 其中能构成集合的是 ()

- A. ①③ B. ②③ C. ③④ D. ②⑤

【解析】①著名的数学家无明确的标准，对某个数学家是否著名无法客观判断，因此①不能构成一个集合；②任给一个整数，可以明确地判断它是不是“不超过30的非负整数”，因此②能构成一个集合；类似地，③也能构成一个集合；对于④，“一些点”无明确的标准，不能构成一个集合；虽然⑤中的对象具备确定性，但有两个元素“1”相同，不符合元素的互异性，因此⑤不能构成一个集合。

【答案】B

【题型解法】(1)集合中的元素，必须具备确定性、互异性、无序性。反过来，一组对象若不具备这三个特性，则这组对象也就不能构成集合。故集合中元素的这三个特性是判断一些对象是否能构成集合的依据。

(2)解决与集合有关的问题时，要充分利用集合元素的“三性”。一方面，我们要利用集合元素的“三性”找到解题的“突破口”；另一方面，解决问题的同时，应注意检验元素是否满足它的“三性”。

类题1-1 下列说法正确的是 ()

- A. $\{2, 3, 4, 2\}$ 是由四个元素组成的集合
B. 集合 $\{0\}$ 表示仅由一个数“0”组成的集合
C. 集合 $\{1, 2, 3\}$ 与 $\{3, 2, 1\}$ 是两个不同的集合
D. 集合 $\{ \text{小于} 1 \text{的正有理数} \}$ 是一个有限集

【解析】A中有两个2，不满足集合元素的互异性，A错误；B中只有一个元素“0”，B正确；由于集合中的元素是无序的，故 $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$ ，C错误；D中小于1的正有理数有无限个，故D错误。

【答案】B

【点评】本题考查集合元素的“三性”：确定性、互异性、无序性；集合的分类：有限集，无限集。

类题1-2 判断下列元素的全体能否组成集合，如果能，请说出各个集合中的元素个数。

- (1)大于-2小于5的自然数；
(2)大于-2小于5的整数。

【分析】大于-2小于5的自然数有0, 1, 2, 3, 4, 共5个，大于-2小于5的整数有-1, 0, 1, 2, 3, 4, 共6个。

【解】它们都能构成集合。(1)中集合的元素个数为5；(2)中集合的元素个数为6。

类题1-3 已知集合 $A = \{a - 2, 2a^2 + 5a, 12\}$ ，且 $-3 \in A$ ，求a的值。

【分析】由于 $-3 \in A$ ，故-3是集合A中的元素，因此 $-3 = a - 2$ 或 $-3 = 2a^2 + 5a$ ，分别解这两个方程再检验即可。

【解】 $\because A = \{a - 2, 2a^2 + 5a, 12\}, -3 \in A,$
 $\therefore -3 = a - 2$ 或 $-3 = 2a^2 + 5a,$

解得 $a = -1$ 或 $a = -\frac{3}{2}.$

当 $a = -1$ 时， $A = \{-3, -3, 12\},$

不符合集合中元素的互异性，舍去。

当 $a = -\frac{3}{2}$ 时， $A = \{-\frac{7}{2}, -3, 12\},$ 满足题意。

故 $a = -\frac{3}{2}.$

【点评】对于集合中元素含有参数的问题，一定要考虑全面，并注意把解得的参数的值代回集合中进行检验，判断是否满足集合中元素的互异性。

主题2 集合与元素的关系 **

已知集合 $A = \{x | x = a + \sqrt{2}b, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$ ，判断0，

$\frac{1}{\sqrt{2}-1}, \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ 与集合A之间的关系。

【解】由于 $x = a + \sqrt{2}b, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z},$

主题3 集合的表示方法

(1) 当 $a=b=0$ 时, $x=0$, 所以 $0 \in A$.

(2) $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1 = 1 + \sqrt{2}$,

当 $a=b=1$ 时, $a+\sqrt{2}b=1+\sqrt{2}$, 所以 $\frac{1}{\sqrt{2}-1} \in A$.

(3) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, 当 $a=\sqrt{3}, b=1$ 时, $a+\sqrt{2}b = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, 但 $\sqrt{3} \notin \mathbf{Z}$, 所以 $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \notin A$.

综上所述, $0 \in A, \frac{1}{\sqrt{2}-1} \in A, \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \notin A$.

【题型解法】(1) $a \in A$ 与 $a \notin A$ 取决于 a 是不是集合 A 中的元素. 根据集合中元素的确定性, 可知对任何 a 与 A , 在 $a \in A$ 与 $a \notin A$ 这两种情况中必有一种且只有一种成立.

(2) 符号“ $\in$ ”和“ $\notin$ ”是表示元素与集合之间的关系, 不能用来表示集合与集合之间的关系, 这一点千万要记住.

类题 2-1 [江西赣县中学 2015 届 10 月月考] 设集合 $A = \{x | x > 1\}$, 则 ()

A. $\emptyset \in A$

B. $0 \notin A$

C. $0 \in A$

D. $A \subseteq \{0\}$

【解析】符号“ $\in$ ”和“ $\notin$ ”是表示元素与集合之间的关系的, 不能用来表示集合与集合之间的关系, 故 A 错误; 0 明显不属于 A , 即 $0 \notin A$.

【答案】B

类题 2-2 设集合 A 中不含有元素 $-1, 0, 1$, 且满足条件: 若 $a \in A$, 则有 $\frac{1+a}{1-a} \in A$, 请考虑以下问题:

(1) 已知 $2 \in A$, 求出 A 中其他所有元素;

(2) 自己设计一个实数属于 A , 再求出 A 中其他所有元素;

(3) 根据已知条件和前面(1)(2)你能悟出什么道理, 并证明你的猜想.

【解】(1) $\because 2 \in A$, 由题中条件: 集合 A 中不含有元素 $-1, 0, 1$, 且满足条件: 若 $a \in A$, 则有 $\frac{1+a}{1-a} \in A$, 得 $\frac{1+2}{1-2} = -3 \in A$; $\because -3 \in A$, $\therefore \frac{1-3}{1+3} = -\frac{1}{2} \in A$; $\because -\frac{1}{2} \in A$, $\therefore \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \in A$; $\because \frac{1}{3} \in A$, $\therefore \frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 2 \in A$, $\therefore$ 集合 $A = \{2, -3, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$.

(2) 任取一常数, 如 $3 \in A$, 则同(1)可得, 集合 $A = \{3, -2, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$.

(3) 由(1)(2)猜想: 任意的常数 $a \in A (a \neq \pm 1, a \neq$

$0)$, 则集合 $A = \{a, \frac{1+a}{1-a}, -\frac{1}{a}, \frac{a-1}{a+1}\}$.

证明: $\because a \in A$, $\therefore \frac{1+a}{1-a} \in A$, $\therefore \frac{1+\frac{1+a}{1-a}}{1-\frac{1+a}{1-a}} = -\frac{1}{a} \in A$,

$\therefore \frac{1-\frac{1}{a}}{1+\frac{1}{a}} = \frac{a-1}{a+1} \in A$, $\therefore \frac{1+\frac{a-1}{a+1}}{1-\frac{a-1}{a+1}} = a \in A$.

如果其中任两元素相等, 那么 $a = \pm 1$ 或 $a = 0$, 故这四个元素不相等.

【点评】本题考查元素与集合的关系, 审题要注意: 集合 A 中不含有元素 $-1, 0, 1$, 且满足条件: 若 $a \in A$, 则有 $\frac{1+a}{1-a} \in A$, 得集合 $A = \{a, \frac{1+a}{1-a}, -\frac{1}{a}, \frac{a-1}{a+1}\}$.

类题 2-3 已知集合 A 是非零实数集的子集, 并且有如下性质: 对任意 $x \in A$, 必有 $3 - \frac{2}{x} \in A$. 问:

(1) 集合 A 可否有且仅有一个元素? 若可以, 求出所有满足要求的集合 A ; 若不可以, 说明理由;

(2) 集合 A 可否有且仅有两个元素? 若可以, 求出所有满足要求的集合 A ; 若不可以, 说明理由.

【解】(1) 若集合 A 中有且仅有一个元素 x , 则 $3 - \frac{2}{x} = x$, 即 $x^2 - 3x + 2 = 0$, 解得 $x = 1$ 或 $x = 2$, 所以集合 $\{1\}$ 和 $\{2\}$ 是两个满足要求的单元集.

(2) 由(1)可知, 集合 $\{1, 2\}$ 是满足要求的二元集. 若集合 $A = \{a, b\}$ 是满足要求的二元集, 并且 $\begin{cases} 3 - \frac{2}{a} = b, \\ 3 - \frac{2}{b} = a, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 3a - 2 = ab, \\ 3b - 2 = ab, \end{cases}$ 则 $a = b$, 矛盾, 所以满足要求的二元集只能是 $\{1, 2\}$.

主题 3 集合的表示方法 ***

3 用适当的方法表示下列集合:

(1) 比 5 大 3 的数;

(2) 方程 $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$ 的解集;

(3) 不等式 $x - 3 > 2$ 的解的集合;

(4) 二次函数 $y = x^2 - 10$ 图象上所有点组成的集合.

【解】(1) 比 5 大 3 的数是 8, 故用列举法可表示为 $\{8\}$.

(2) 方程 $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$ 可化为 $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 0$, 解得 $\begin{cases} x=2, \\ y=-3, \end{cases}$ 故用列举法可表示为 $\{(2, -3)\}$.

(3) 由 $x - 3 > 2$ 解得 $x > 5$, 故用描述法表示为 $\{x | x > 5\}$.

(4) “二次函数 $y = x^2 - 10$ 图象上的点”用描述法表示为 $\{(x, y) | y = x^2 - 10\}$.

【题型解法】用列举法与描述法表示集合时,一要明确集合中的元素;二要明确元素满足的条件;三要根据集合中元素的个数来选择适当的方法表示集合.

【类题3-1】已知集合 $A = \left\{ x \in \mathbf{N} \mid \frac{12}{6-x} \in \mathbf{N} \right\}$, 用列举法表示集合 $A =$ _____.

【解析】由 x 取自然数列出 $x = 0, 1, 2, 3, \dots$, 判断 $\frac{12}{6-x}$ 也为自然数可得满足集合 A 的元素. 令 $x = 0$, 得 $\frac{12}{6-x} = 2$, 所以 $0 \in A$; 令 $x = 1$, 得 $\frac{12}{6-x} = \frac{12}{5}$, 所以 $1 \notin A$;

令 $x = 2$, 得 $\frac{12}{6-x} = 3$, 所以 $2 \in A$; 令 $x = 3$, 得 $\frac{12}{6-x} = 4$, 所以 $3 \in A$; 令 $x = 4$, 得 $\frac{12}{6-x} = 6$, 所以 $4 \in A$; 令 $x = 5$, 得 $\frac{12}{6-x} = 12$, 所以 $5 \in A$; 当 $x = 6$ 时, $\frac{12}{6-x}$ 无意义; 当 $x > 6$ 时, $\frac{12}{6-x}$ 为负值, $\frac{12}{6-x} \notin \mathbf{N}$. 所以集合 $A = \{0, 2, 3, 4, 5\}$.

【答案】 $\{0, 2, 3, 4, 5\}$

【点评】考查用列举法表示集合, 会利用列举法讨论 x 的取值得到所有满足集合的元素. 做此类题时, 应注意把所有满足集合的元素写全且不能相等.

B 高考高频题组

主题 集合元素的特性及应用 ★★

【类题4】已知集合 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid ax^2 + ax + 1 = 0\}$ 其中只有一个元素, 则 $a =$ ()
A. 4 B. 2 C. 0 D. 0 或 4

【解析】集合 A 只有一个元素, 根据集合的互异性, 方程有且只有一个解, 当 $a = 0$ 时, 方程为 $1 = 0$ 不成立, 不满足条件; 当 $a \neq 0$ 时, 方程为一元二次方程, 有 $\Delta = a^2 - 4a = 0$, 解得 $a = 4$.

【答案】A

【题型解法】当一个集合中的元素含有字母, 求字母的取值时, 一般可利用集合中元素的确定性解出集合中字母的所有可能的值, 再根据集合中元素的互异性进行检验. 对于集合 $\{x \mid f(x) = 0\}$ 只有一个元素, 可考虑 $f(x) = 0$ 是一元一次方程, 或是有几个相等实根的一元几次方程.

【类题4-1】下列元素中属于集合 $A = \left\{ (x, y) \mid x = \frac{k}{4}, y = \frac{k}{3}, k \in \mathbf{Z} \right\}$ 的是 ()

- A. $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{12}\right)$ B. $(3, 4)$
C. $(4, 3)$ D. $\left(\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right)$

【解析】当 $\frac{k}{4} = \frac{1}{4}$ 时, $k = 1$, 此时 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right) \in A$; 当

$\frac{k}{4} = 3$ 时, $k = 12$, 此时 $(3, 4) \in A$, 故选 B.

【答案】B

【类题4-2】设集合 $A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_i \in \{-1, 0, 1\}, i = 1, 2, 3, 4, 5\}$, 那么集合 A 中满足条件“ $1 \leq |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| + |x_5| \leq 3$ ”的元素个数为 ()

- A. 60 B. 90 C. 120 D. 130

【解析】在 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 这五个数中, 因为 $x_i \in \{-1, 0, 1\}, i = 1, 2, 3, 4, 5$, 所以满足条件 $1 \leq |x_1| +$

$|x_2| + |x_3| + |x_4| + |x_5| \leq 3$ 的可能情况有: ①一个 1 (或 -1), 四个 0, 有 $|1, 0, 0, 0, 0|, |0, 1, 0, 0, 0|, |0, 0, 1, 0, 0|, |0, 0, 0, 1, 0|, |0, 0, 0, 0, 1|, |-1, 0, 0, 0, 0|, |0, -1, 0, 0, 0|, |0, 0, -1, 0, 0|, |0, 0, 0, -1, 0|, |0, 0, 0, 0, -1|$ 共 10 种; 同理可知 ②两个 1 (或 -1), 三个 0, 有 20 种; ③一个 -1, 一个 1, 三个 0, 有 20 种; ④两个 1 (或 -1), 一个 -1 (或 1), 两个 0, 有 60 种; ⑤三个 1 (或 -1), 两个 0, 有 20 种. 故共有 130 种.

【答案】D

主题 元素与集合关系的判断 ★★

【类题5】已知集合 $A = \{0, 1, 2\}$, 则集合 $B = \{x - y \mid x \in A, y \in A\}$ 中元素的个数是 ()

- A. 1 B. 3 C. 5 D. 9

【解析】根据集合 B 中的元素特性, 对 x, y 进行赋值得出 B 中所有元素, 即可得出 B 中所含有的元素个数. 当 $x = 0, y$ 分别取 0, 1, 2 时, $x - y$ 的值分别为 0, -1, -2; 当 $x = 1, y$ 分别取 0, 1, 2 时, $x - y$ 的值分别为 1, 0, -1; 当 $x = 2, y$ 分别取 0, 1, 2 时, $x - y$ 的值分别为 2, 1, 0. 故 $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

【答案】C

【题型解法】此类题考查元素与集合的关系的判断, 解题的关键是理解题意, 领会新定义的集合中元素的属性, 用分类列举的方法得出集合 B 中的元素的个数.

【类题5-1】河南洛阳 2015 届第一次统一考试 集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{1, 2, 3\}, C = \{z \mid z = xy, x \in A \text{ 且 } y \in B\}$, 则集合 C 中的元素个数为 ()

- A. 3 B. 4 C. 11 D. 12

【解析】当 $x = 1, y = 1$ 时, $z = 1$; 当 $x = 1, y = 2$ 时, $z = 2$; 当 $x = 1, y = 3$ 时, $z = 3$; 当 $x = 2, y = 1$ 时, $z = 2$; 当 $x = 2, y = 2$ 时, $z = 4$; 当 $x = 2, y = 3$ 时, $z = 6$; 当 $x = 3, y = 1$ 时, $z = 3$; 当 $x = 3, y = 2$ 时, $z = 6$; 当 $x = 3, y = 3$ 时, $z = 9$; 当 $x = 4, y = 1$ 时, $z = 4$; 当 $x = 4, y = 2$ 时, $z = 8$; 当 $x = 4, y = 3$ 时, $z = 12$; 当 $x = 5, y = 1$ 时, $z = 5$; 当 $x = 5, y = 2$ 时, $z = 10$; 当 $x = 5, y = 3$ 时, $z = 15$. 由此可知, $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15\}$, C 中元素的个

数为11.

【答案】C

【类题5-2】 [2014 河南漯河训练] 设实数范围内 S 是满足下面两个条件的集合:

① $1 \notin S$; ② 若 $a \in S$, 则 $\frac{1}{1-a} \in S$.

(1) 求证: 若 $a \in S$, 则 $1 - \frac{1}{a} \in S$;

(2) 若 $2 \in S$, 则在 S 中必含有其他的两个数, 试求出这两个数;

(3) 求证: 集合 S 中至少有三个不同的元素.

(1) 【证明】 由 $a \in S$, 则 $\frac{1}{1-a} \in S$, 可得 $\frac{1}{1-\frac{1}{1-a}} \in S$,

$$\text{即 } \frac{1}{1-\frac{1}{1-a}} = \frac{1-a}{1-a-1} = 1 - \frac{1}{a} \in S.$$

故若 $a \in S$, 则 $1 - \frac{1}{a} \in S$.

(2) 【解】 若 $2 \in S$, 则 $\frac{1}{1-2} = -1 \in S$; 若 $-1 \in S$, 则

$$\frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2} \in S. \text{ 而当 } \frac{1}{2} \in S \text{ 时, } \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \in S, \text{ 又回}$$

到了开始.

因此当 $2 \in S$ 时, 只有另两个元素 $-1, \frac{1}{2} \in S$.

(3) 【证明】 由题意知 $a \in S$ 时, $\frac{1}{1-a} \in S, 1 - \frac{1}{a} \in S$.

下证 $a, \frac{1}{1-a}, 1 - \frac{1}{a}$ 三者两两互不相等.

① 若 $a = \frac{1}{1-a}$, 即 $a^2 - a + 1 = 0$, 无解, $\therefore a \neq \frac{1}{1-a}$;

② 若 $a = 1 - \frac{1}{a}$, 即 $a^2 - a + 1 = 0$, 无解, $\therefore a \neq 1 - \frac{1}{a}$;

③ 若 $\frac{1}{1-a} = 1 - \frac{1}{a}$, 即 $a^2 - a + 1 = 0$, 无解,

$$\therefore \frac{1}{1-a} \neq 1 - \frac{1}{a}.$$

综上所述, 集合 S 中至少有三个不同的元素.

C 能力提升题组

主题 数集与点集的区别 **

6 下列表示同一集合的是 ()

A. $M = \{(2, 1), (3, 2)\}, N = \{(1, 2), (2, 3)\}$

B. $M = \{1, 2\}, N = \{2, 1\}$

C. $M = \{y | y = x^2 + 1, x \in \mathbf{R}\}, N = \{y | y = x^2 + 1, x \in \mathbf{N}\}$

D. $M = \{(x, y) | y = x^2 - 1, x \in \mathbf{R}\}, N = \{y | y = x^2 - 1, x \in \mathbf{R}\}$

【解析】A 中 M, N 都是两个点构成的集合, 但 M, N 中点的坐标不同 (点的坐标与顺序有关), 因此 A 错; B 中 M, N 都是两个数构成的集合, 集合元素具有无序性, 因此 B 对; C 中 M, N 都是数集, 代表元素也都是 y , 但 x 的取值范围不同, 因此 C 错; D 中 M 的代表元素是点集, N 的代表元素是 y 的值, 因此 D 错.

【答案】B

【题型解法】研究一个集合, 首先要看集合中的代表元素, 然后再看元素的限制条件, 当集合用描述法表示时, 注意弄清其元素表示的意义是什么.

集合	$\{x f(x) = 0\}$	$\{x f(x) > 0\}$	$\{x y = f(x)\}$	$\{y y = f(x)\}$	$\{(x, y) y = f(x)\}$
集合的意义	方程 $f(x) = 0$ 的解集	不等式 $f(x) > 0$ 的解集	函数 $y = f(x)$ 的定义域	函数 $y = f(x)$ 的值域	函数 $y = f(x)$ 图象上的点集

【类题6-1】 用列举法将集合 $\{(x, y) | x \in \{1, 2\}, y \in \{1, 2\}\}$ 可以表示为 ()

A. $\{\{1, 1\}, \{1, 2\}, \{2, 1\}, \{2, 2\}\}$

B. $\{1, 2\}$

C. $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

D. $\{(1, 2)\}$

【解析】根据描述法表示的集合, 集合中有 $(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$ 四个元素.

【答案】C

【点评】本题考查集合的表示法: 列举法、描述法.

【类题6-2】 下列五种表示法:

① $\{x = 2, y = 1\}$; ② $\{(x, y) | \begin{cases} x = 2, \\ y = 1 \end{cases}\}$; ③ $\{(2, 1)\}$;
④ $\{2, 1\}$; ⑤ $\{(x, y) | x = 2 \text{ 或 } y = 1\}$.

能正确表示方程组 $\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = 1 \end{cases}$ 的解集的是 ()

A. ①②③④⑤

B. ②③④

C. ②③

D. ②③⑤

【解析】由于方程组 $\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = 1 \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x = 2, \\ y = 1 \end{cases}$, 故方程组 $\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = 1 \end{cases}$ 的解集的描述法表示为 $\{(x, y) | \begin{cases} x = 2, \\ y = 1 \end{cases}\}$;

方程组 $\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = 1 \end{cases}$ 的解集的列举法表示为 $\{(2, 1)\}$.

【答案】C

【点评】本题主要考查集合的含义和表示, 利用集合元素的特点来判断.

第2节 集合间的基本关系

【主题预览】

主题7 集合的子集、真子集的概念	5
主题8 集合间关系的判断	5
主题9 集合相等关系的应用	6
主题10 由集合间的基本关系确定参数的取值范围	6

主题11 集合间关系的应用	7
主题12 数形结合解集合问题	7
主题13 利用分类讨论研究集合间的关系	8

A 必考必刷题组

主题7 集合的子集、真子集的概念 **

7 写出集合 $\{0, 1, 2\}$ 的所有子集, 并指出其中哪些是它的真子集.

【解】按子集元素个数的多少分别写出所有子集, 才能避免不重不漏. $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}$, 共8个. 真子集为 $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}$, 共7个.

【题型解法】(1) 写出一个有限集合的所有子集, 首先要注意两个特殊子集: $\emptyset$ 和自身; 其次按含一个元素的子集、两个元素的子集、三个元素的子集……依次写出.

(2) 集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 的子集的个数为 2^n ; 真子集的个数为 $2^n - 1$; 非空子集的个数为 $2^n - 1$; 非空真子集的个数为 $2^n - 2$.

类题7-1 已知 $\{1, 2\} \subseteq M \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 则这样的集合 M 有 个.

【解析】①当 M 中含有两个元素时, M 为 $\{1, 2\}$;

②当 M 中含有三个元素时, M 可能为 $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}$;

③当 M 中含有四个元素时, M 可能为 $\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}$;

④当 M 中含有五个元素时, M 为 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
所有满足条件的 M 为 $\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 共8个.

【答案】8

【点评】首先根据子集及真子集的概念判断出集合 M 中含有元素的可能情况, 然后根据集合 M 中含有元素的个数进行分类讨论, 以防止遗漏.

类题7-2 给出下列说法:

①空集没有子集; ②任何集合至少有两个子集;
③空集是任何集合的真子集; ④若 $\emptyset \subsetneq A$, 则 $A \neq \emptyset$.

其中正确的有 ()

A. 0个 B. 1个 C. 2个 D. 3个

【解析】①空集是其自身的子集; ②当集合为空集

时说法错误; ③空集不是空集的真子集; ④空集是任何非空集合的真子集. 因此, ①②③错误, ④正确.

【答案】B

主题8 集合间关系的判断 **

8 判断下列两个集合之间的关系:

(1) $A = \{2, 3, 6\}, B = \{x | x \text{ 是 } 12 \text{ 的约数}\}$;

(2) $A = \{0, 1\}, B = \{x | x^2 + y^2 = 1, y \in \mathbf{N}\}$;

(3) $A = \{x | -1 < x < 2\}, B = \{x | -2 < x < 2\}$;

(4) $A = \{(x, y) | xy < 0\}, B = \{(x, y) | x > 0, y < 0\}$.

【解】(1) 集合 A 中的元素 2, 3, 6 都是 12 的约数, 故它们都属于集合 B , 所以 $A \subseteq B$; 更进一步, 1 也是 12 的约数, 即 $1 \in B$, 但是 $1 \notin A$, 故 A 是 B 的真子集.

(2) 因为 $B = \{x | x^2 + y^2 = 1, y \in \mathbf{N}\} = \{-1, 0, 1\}$, 所以 A 是 B 的真子集.

(3) 在数轴上表示两个集合可知 $A \subsetneq B$, 故 A 是 B 的真子集.

(4) 方法一: 由 $xy < 0$, 可得 $x > 0, y < 0$ 或 $x < 0, y > 0$, 而由 $x > 0, y < 0$ 得 $xy < 0$, 故 B 是 A 的真子集.

方法二: 集合 A 表示的是平面直角坐标系中第二、四象限内的点的集合, 而集合 B 只表示第四象限内的点的集合, 故 B 是 A 的真子集.

【题型解法】(1) 判定集合间的关系, 其基本方法是归结为判定元素与集合的关系.

(2) 认识两集合的关系, 要认清本质, 而不能仅停留在观察表面上, 需掌握集合中元素所具有的本质属性, 外形相异而本质相同. 比如 $\{x | x = 2n + 1, n \in \mathbf{Z}\} = \{x | x = 2n - 1, n \in \mathbf{Z}\} = \{x | x = 4n \pm 1, n \in \mathbf{Z}\} = \{\text{奇数}\}, \{x | x = 2n, n \in \mathbf{Z}\} = \{x | x = 2(n - 1), n \in \mathbf{Z}\} = \{\text{偶数}\}$ 等.

类题8-1 设集合 $A = \left\{x \mid x = \frac{n}{2}, n \in \mathbf{Z}\right\}, B = \left\{x \mid x = n + \frac{1}{2}, n \in \mathbf{Z}\right\}$, 则下列图形能表示 A 与 B 之间的关系的是 ()