"十二五"国家重点图书出版规划项目

30

数学文化小丛书

李大潜 主编

分形
——颠覆传统的几何学

邱维元

高等教育出版社

"十二五"国家重点图书出版规划项目

数学文化小丛书

李大潜　主编

分　形

Fenxing

——颠覆传统的几何学

邱维元

高等教育出版社·北京

图书在版编目(CIP)数据

分形:颠覆传统的几何学/邱维元编. --北京:
高等教育出版社,2016.3
(数学文化小丛书/李大潜主编.第3辑)
ISBN 978-7-04-044827-6

Ⅰ.①分… Ⅱ.①邱… Ⅲ.①分形学-普及读物
Ⅳ.①O415.5-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第025733号

项目策划 李艳馥 李 蕊

策划编辑 李 蕊　　责任编辑 李 茜　　封面设计 张 楠
版式设计 王艳红　　插图绘制 杜晓丹　　责任校对 刁丽丽
责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	高教社(天津)印务有限公司	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
			http://www.hepmall.com
开　　本	787mm×960mm 1/32		http://www.hepmall.cn
印　　张	3	版　　次	2016年3月第1版
字　　数	50千字	印　　次	2016年3月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	11.00元

物 料 号 44827-00

数学文化小丛书编委会

数学文化小丛书总序

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的。数学不仅是一种精确的语言和工具、一门博大精深并应用广泛的科学，而且更是一种先进的文化。它在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，是人类文明的一个重要支柱。

要学好数学，不等于拼命做习题、背公式，而是要着重领会数学的思想方法和精神实质，了解数学在人类文明发展中所起的关键作用，自觉地接受数学文化的熏陶。只有这样，才能从根本上体现素质教育的要求，并为全民族思想文化素质的提高夯实基础。

鉴于目前充分认识到这一点的人还不多，更远未引起各方面足够的重视，很有必要在较大的范围内大力进行宣传、引导工作。本丛书正是在这样的背景下，本着弘扬和普及数学文化的宗旨而编辑出版的。

为了使包括中学生在内的广大读者都能有所收益，本丛书将着力精选那些对人类文明的发展起过重要作用、在深化人类对世界的认识或推动人类对

世界的改造方面有某种里程碑意义的主题，由学有专长的学者执笔，抓住主要的线索和本质的内容，由浅入深并简明生动地向读者介绍数学文化的丰富内涵、数学文化史诗中一些重要的篇章以及古今中外一些著名数学家的优秀品质及历史功绩等内容。每个专题篇幅不长，并相对独立，以易于阅读、便于携带且尽可能降低书价为原则，有的专题单独成册，有些专题则联合成册。

希望广大读者能通过阅读这套丛书，走近数学、品味数学和理解数学，充分感受数学文化的魅力和作用，进一步打开视野、启迪心智，在今后的学习与工作中取得更出色的成绩。

李大潜

2005 年 12 月

目　录

传统的欧几里得几何的研究对象是直线段、三角形、圆、立方体、圆柱体等规则几何体，微积分的运用使得几何研究可扩充到光滑的曲线、曲面等对象．我们熟悉的人造物品大都使用这种规则或光滑的形状，比如建筑、家具、汽车、飞机等．但是在自然界和科学界中遇到的许多对象并非如此规则和光滑，如参差的灌木、起伏的山峦、变幻的云彩等，它们太过复杂和不规则，难以用传统的几何形状来描述．上世纪七八十年代，一种新的几何学展现在我们面前，这种几何非常适合描述和模拟大自然中这样的复杂和不规则对象，这种几何称为**分形几何**．它告诉我们描述这种不规则对象需要突破传统的观点，同时，这种看似复杂和不规则的对象常常可以通过对简单构件重复地进行简单的操作来实现．本书将带你走入分形几何的奇妙世界，领略其无穷的魅力．

一、从测量谈起

一般认为, 几何学诞生于古希腊, 欧几里得的《几何原本》集古希腊几何之大成, 构建了公理化几何体系, 一直被西方数学家奉为数学的圣经. 不过, 古希腊的几何却源自古埃及, 古希腊的一些数学先驱都曾赴古埃及学习几何, 而古埃及的几何则起源自土地测量. 相传古埃及的尼罗河年年泛滥, 洪水带来的淤泥使尼罗河两岸的土地异常肥沃, 但也冲毁了土地原来的布局, 需要对土地重新标界. 法老派“拉绳者”对土地进行测量, 以恢复土地原来的分划布局. 在长期的测量过程中, 古埃及人积累了丰富的几何知识, 这成为西方几何学的源泉. 事实上, 英文的几何“geometry”一词就来源于古希腊文, 其原意就是土地测量.

测量的基本要素是测量长度、面积、体积等, 而长度的测量又是其中最基本的. 古埃及“拉绳者”的主要工具是一根绳子, 要测量两个界桩之间的距离, 就在界桩间拉一根绳子. 不过单单拉一根绳子是不够的, 要知道绳子有多长, 还需要有一个“长度单位”, 然后将绳子和这个长度单位比较, 看

看绳子有多少个长度单位, 就可以知道绳子有多长. 在古代, 长度单位通常取自人们比较熟悉的东西的长度, 大多是自己身体的某个部位或者是和身体有关的常规活动的长度. 比如, 古埃及"拉绳者"用的长度单位叫"肘尺 (cubit)", 一肘大约是中指尖到手臂肘部的长度. 在我国, 传统上最常用的长度单位是"尺". 据考证, 在商周就已经有关于"尺"的记载, 也有考古实物发现,《大戴礼记 · 主言》和《孔子家语》就都有"布手知尺"说法, 就是说古代的一尺大约是食指和拇指张开两指尖间的长度. 篆体的"尺"字就形象地描绘出张开两指作度量的形状 (如图 1). 直到今天, 我们还可以看到以身体部位和动作为长度单位的痕迹. 比如成语"百步穿杨"就是以步长为单位,"丈夫"一词源于古时以成年男子身高为一丈, 而英、美等国所用的英尺仍然用英文 foot(脚) 来表示, 它源于一个脚掌的长度.

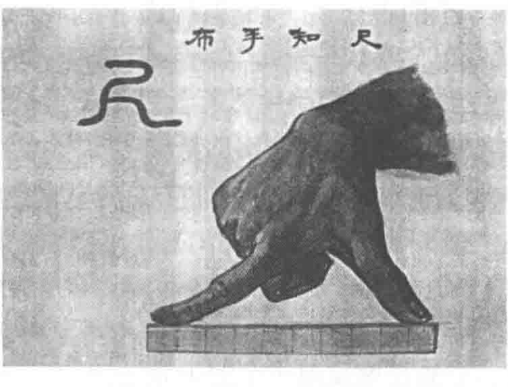

图 1　布手知尺[1]

有了一个长度单位，我们就可以进行基本的长度测量了. 以我国传统的基本长度单位“尺”为例，我们可以测量出两棵树之间距离有几尺，也可以测量一条线段有几尺. 不过这样的测量是相当粗略的，因为我们测量的对象往往并非正好是一尺的整数倍，此时测出的长度只是一个近似值. 比如我们可能测得一条线段比 5 尺长一点，但又不到 6 尺，就只能知道该线段长度在 5 尺和 6 尺之间，没法知道得更多. 为此，还需要有更短的长度单位. 比“尺”更短的长度单位有“寸”，古时一寸为一指宽，所谓“布指知寸”，现在规定一寸为一尺的十分之一. 有了长度单位“寸”，我们可以将长度测量到几尺几寸，比如上面的线段可能量出在 5 尺 3 寸和 5 尺 4 寸之间，这样我们对这条线段的长度有了一个更精细的认识. 自然，只有“尺、寸”仍然不够，为了更精确地测量，除尺、寸外，更有“分、厘、毫、丝、忽、微”等更短的长度单位，其中后一个单位的长度为前一个的十分之一，它们构成了我国传统度量衡的长度单位系统——市制. 有了这样一个单位系统，我们可以相当精确地进行长度测量了，且所用单位越小 (长度越短)，测出的精度就越高.

现在国际计量委员会确立了以“米”为基本长度单位的国际单位制. 国际单位制中常用的单位有“千米 (公里)、米、分米、厘米、毫米、微米、纳米”等，其中在“千米、米、毫米、微米、纳米”之间，后一个的长度是前一个的千分之一；在“米、分米、厘米、毫米”之间，后一个的长度是前一个的

十分之一. 国际单位制已经完全能够满足我们目前的社会活动 (包括科学研究) 所需要的精确测量的要求, 是现在全球通用的长度计量单位制. 当然, 世界上还有其他各种单位制, 如英、美等国常用的英制.

用不同的长度单位进行测量, 我们也可以理解为用不同长度的"直尺"去量被测对象 (这里"直尺"之"尺"是指测量工具, 要区别于作为长度单位的尺). 比如, 以米为单位测量一条线段, 就相当于用一米长的直尺首尾相接地一次一次去量这条线段, 量的次数乘上一米, 就得到线段的长度. 一般来说, 要进行长度测量, 就需要一把直尺, 用直尺去度量, 量的次数乘上直尺本身的长度, 就得到测量对象的长度. 并且, 所用的直尺越短, 测出的长度越精确. 我们把用于测量的直尺的长度 (可对应于各种长度单位) 称为"尺度".

除了测量距离和直线的长度, 我们还常常需要测量曲线 (如弯曲的河流等) 的长度. 如何测量河流长度? 测绘人员会沿河岸以合适的间隔立一些标杆, 然后测量出相邻两个标杆之间的距离, 将所有相邻标杆间的距离求和, 就算作河流的长度. 这样的测量将两个标杆间的直线距离作为河流在两个标杆间的长度, 所测出的河流长度自然是近似长度. 那么, 在数学上如何精确地测量曲线的长度呢?

最简单也是最常见的曲线无疑是圆周. 数学史上, 圆周长的计算一直处于十分重要的地位, 它涉及数学中最重要的常数之一——圆周率 π. 古希腊

阿基米德提供了一种计算圆周长的一般方法——割圆术[①]. 阿基米德从圆的内接正 6 边形的周长出发, 利用毕达哥拉斯定理 (即勾股定理), 逐步求得圆内接正 12 边形、 24 边形、 48 边形 …… 的周长, 从而用内接正多边形的周长作为圆周长的近似值. 这里, 在内接正多边形相邻两个顶点间用直线的长度 (内接正多边形的边长) 代替了圆周在这两点间的弧长, 因此, 内接正多边形的周长要比圆周长短一些. 但阿基米德指出, 随着内接正多边形边数的成倍增加, 所得周长越来越接近于圆周长. 注意到正多边形的周长等于其边长乘上边数, 我们可以换一种说法解释阿基米德割圆术: 计算圆内接正多边形的周长, 相当于用一把长度为圆内接正多边形边长的直尺去量圆周, 量的次数就是圆内接正多边形的边数, 因此, 圆内接正多边形的周长等于用这把直尺量圆周量出的长度. 即圆周长也可以用直尺去测量. 内接正多边形边数增加相当于直尺长度(即边长) 缩短, 这就是说, 所用直尺越短, 量出的圆周长越精确, 随着直尺长度的缩短, 量出的长度越来越接近圆周长. 如果我们让内接正多边形的边数增加以至趋于无穷, 也即直尺的长度缩短以至趋于 0, 那么, 量出的长度就会趋近于一个确定的数值, 这个值就是圆周长的精确值. 在这里, 我们看到了"边数增加趋于无穷" "直尺长度缩短趋于 0" 这样

① 虽然我国刘徽的割圆术在计算圆周率 π 方面要优于阿基米德割圆术, 但这里我们没有用刘徽割圆术, 因为刘徽计算的是面积而不是周长.

的一种“极限过程”, 这正是数学上求出圆周长的关键所在.

上述测量圆周长的方法实际上也是数学上测量很多曲线长度的一般方法. 假如一条曲线是光滑的, 我们就可以用直尺去量这条曲线, 量的次数乘上直尺的长度就是这条曲线的近似值. 所用的直尺越短, 我们量出的长度越精确, 如果让直尺的长度趋向于 0, 那么, 量出的长度就趋向于曲线的精确长度.

那么, 是不是用这样的方法可以测量出所有曲线的长度呢? 这正是我们下面要着重讨论的问题.

二、分形的诞生

路易斯 · F. 理查德森 (Lewis F. Richardson, 1881—1953) 是英国的一位物理科学家、气象科学家、社会心理学家, 更是一位应用数学家. 理查德森的特殊贡献是将数据分析和数学模型应用在他所研究的所有领域. 比如, 他设想利用历史数据和所建立的数学模型, 通过大量计算来预测未来天气, 这使他成为现代天气预报的先驱. 理查德森是一位和平主义者, 第一次世界大战后, 他一直在考虑战争的成因和预防. 为了考虑两国间产生冲突的各种因素, 需要计算两国边界的长度. 他查阅了当时公开的数据, 发现各国测量的数据各不相同, 且有很大区别. 例如: 西班牙和葡萄牙之间的边界长从 987 千米到 1 214 千米不等, 而荷兰与比利时的边界长为 380 千米到 449 千米不等, 这显然不是简单的测量误差造成的. 理查德森用阿基米德测量圆周长的方法测量了各国的国境线 (包括陆地国境线和海岸线), 发现对于像国境线这样曲折粗糙和不规则的曲线, 其长度与测量时所用的尺度有关, 测量得

到的国境线长度随着尺度的变小而变长, 而不像圆周一样会越来越接近一个确定的数值 (即圆周长). 经过对测量数据大量分析后, 理查德森绘制了一张各国陆地国境线和海岸线的长度的测量值和测量所用尺度之间的关系图 (图 2), 图中横坐标是尺度的对数、纵坐标是相应尺度下测得的国境线长度的对数. 可以看到, 每一个国家的国境线 (海岸线) 的测量数据都位于一条直线附近, 这条直线的斜率为负, 意味着测量值随着尺度变小而增大 (作为对比, 测量圆周所得到的数据 (黑点表示) 在一条曲线上, 且当尺度较小时, 测量值接近于水平). 理查德森由此发现了一个经验公式: 设所用尺度为 ℓ, 测得国境线 (海岸线) 长度为 $L(\ell)$, 则它们的对数有如下线性关系

$$\log L(\ell) \approx \alpha \log \ell + \log k, \tag{1}$$

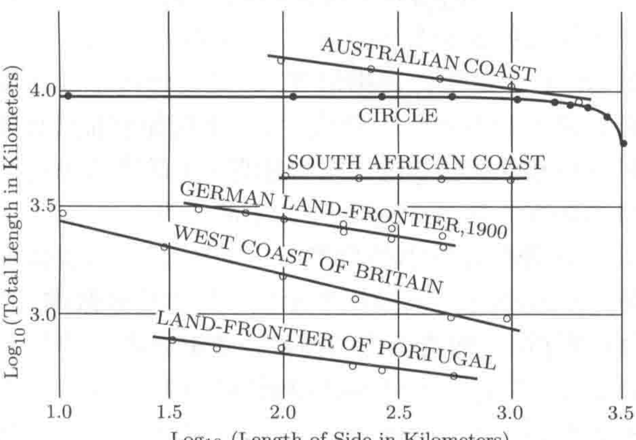

图 2　理查德森的测量数据[2]

或者

$$L(\ell) \approx k \cdot \ell^{\alpha}, \tag{2}$$

这里, log 表示自然对数, α 是直线的斜率, $k > 0$ 为一个常数. 不同国家的国境线 (海岸线) 所对应的常数 α 及 k 各不相同, 但均有 $\alpha < 0$. 显然, 随着 ℓ 越来越小, $L(\ell)$ 越来越大. 理查德森据此认为传统的 "海岸线的长度" 这样的说法存在问题, 并问 "不列颠的海岸线到底有多长?"

1967 年, 法裔美国数学家伯努瓦 · B. 芒德布罗 (Benoit B. Mandelbrot, 1924— 2010, 图 3) 在美国《科学》杂志上发表了一篇开创性的论文《不列颠的海岸线有多长——统计自相似性和分数维》. 在这篇论文中, 芒德布罗指出长度已经不是描述海岸线合适的度量, 在某种意义下海岸线是不可求长的, 或者说其长度为无穷大. 对于理查德森的问题, 与其问 "不列颠的海岸线有多长", 不如问 "不列颠的海岸线的曲折程度有多大". 并提出了两个重要概念: 其一是**统计自相似性**, 就是说像海岸线这样极其曲折和不规则的曲线, 有一个明显特征: 其任何一小部分和整体看上去很相像. 半岛上有小的半岛、海湾里有小的海湾; 小的半岛上有更小的半岛、小的海湾里有更小的海湾 …… 而这种自相似性是海岸线不可求长的根本原因. 其二是**分数维**, 芒德布罗指出, 理查德森的经验公式中斜率 α 有特殊的意义, 是描述海岸线自相似性的特征指数, 芒德布罗把 $D = 1 - \alpha$ 称为相应海岸线的 "分数维". 对于直线, $D = 1$; 而对于海岸线, 均有 $D > 1$. D 越