电气信息类
精品系列

通信数学

◎主 编 冯 敏 景克俭

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

通信数学

主　编　冯　敏　景克俭
参　编　王贵双　张　凌　于金青
　　　　贾慧美　李　锦

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书的教学内容，分为积分变换部分和线性代数部分．在教学内容的组织上加强了应用性实例．既注重通信数学严密的教学体系，同时注重加强与后续专业课程的衔接，强化课程的应用性．在原有的积分变换和线性代数内容基础上，优化教学内容的组织和安排，面向专业需求调整了例题和习题的配置，力求做到将基础教学与通信专业紧密结合．增加了积分变换和线性代数两部分的复习题．书末附有习题及复习题解答．本书在引入基本概念和基本理论时，注重知识的应用背景的介绍，定理的叙述和证明秉持“易读性”和“探索性”双重原则，由浅入深，更适合学生接受知识的自然过程．课程内容保留了体现积分变换、线性代数内容本质思想的核心内容，剔除困难、繁杂的证明，在介绍一些较为实用的计算方法和结果的同时，也分析它们在通信专业课实用问题中的应用．注重知识的应用背景的介绍和实际应用性练习，加强学生在应用方面的培养，为后续课程的学习做好铺垫．

可供高等院校通信及其相关专业的学生使用．

图书在版编目（CIP）数据

通信数学/冯敏，景克俭主编．—北京：北京理工大学出版社，2015.4
ISBN 978－7－5682－0502－3

Ⅰ.①通…　Ⅱ.①冯…②景…　Ⅲ.①电信数学－高等学校－教材
Ⅳ.①TN911.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 075904 号

出版发行／北京理工大学出版社
社　　址／北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编／100081
电　　话／(010)68914775(总编室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址／http：//www.bitpress.com.cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／三河市天利华印刷装订有限公司
开　　本／787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张／13
字　　数／301 千字
版　　次／2015 年 4 月第 1 版　2015 年 4 月第 1 次印刷　　责任校对／周瑞红
定　　价／43.00 元　　责任印制／王美丽

前　　言

本书是为高等院校的通信及工科相关专业的学生量身编写的．现今高等院校的学科设置越来越细化，通信及工科相关专业发展势头迅猛，而目前还没有针对通信及相关专业及不同的学生层次学习编写的数学教材．按照高等教育课程改革的要求，按照高等院校应用数学方法课程建设与改革应当遵循的“内容选取要广而薄，不追求系统性与完整性；要以方法为主，注意方法的实用性与先进性”原则，根据通信及工科相关专业课程体系建设要求，在教材的建设也要与时俱进的情况下，针对专业课程体系特点我们编写了本书．

本书教学内容由线性代数、积分变换两部分组成．根据专业课教师的意见，面向专业需求，调整了例题和习题的配置，增加充实了一些新题，力求做到将基础数学与通信专业紧密结合．在原有的积分变换和线性代数内容的系统和结构不变的基础上，优化教学内容的组织和安排，积分变换部分增加了傅里叶级数内容，以傅里叶变换和拉氏变换为重点，注重锻炼学生傅里叶和拉氏变换的计算能力及应用能力．线性代数部分对部分内容进行了整合调整．以线性方程组为主线，以矩阵为工具，注重解题方法的归纳，增加了积分变换和线性代数两部分的复习题．书末附有习题及复习题答案．本书的编写注重知识的应用背景的介绍和实际应用性练习．在引入基本概念和基本理论时注重定理的叙述和证明秉持“易读性”和“探索性”双重原则，由浅入深，更符合学生接受知识的自然过程．课程内容保留了体现积分变换、线性代数本质思想的核心内容，剔除困难、繁杂的证明，在介绍一些较为实用的计算方法和结果的同时，也分析它们在电信专业课实用问题中的应用．在教学内容的组织上，注重加强与后续专业课程的衔接，强化课程的应用性．

全书内容可根据不同学生层次设置不同课时数选择内容讲授．其中带“*”内容可不作为教学要求，根据专业和学生情况选讲．

本书在编写过程中，北京理工大学出版社的编辑为本教材的编写出版付出了大量时间和精力，在此一并致谢．

由于编者水平有限，书中难免有不足之处，诚恳地希望读者批评指正．

编者

目录

Contents <<< <<<

第一篇　积分变换

第二篇 线性代数

第一篇

积分变换

第一章 Chapter 1　傅里叶级数

本章将工程上常用的周期和非周期信号分解为以正弦函数（余弦函数亦统称为正弦函数）为基本信号的叠加．由欧拉公式，故也可把虚指数作为基本信号，将任意周期信号和非周期信号分解为一系列虚指数函数的和．

§1.1　三角级数

［法］傅里叶（1768—1830）

把非正弦周期信号分解为傅里叶级数是法国科学家傅里叶所做的重大贡献．他的关于把信号分解为正弦分量的思想证明了将周期信号展开为正弦级数的理论，为信号的分析和处理打下了基础，同时对后来的自然科学等领域也产生了巨大影响．

周期函数反映了客观世界中的周期运动．正弦函数是一种常见而简单的周期函数．例如描述简谐振动的函数

$$y = A\sin(\omega t + \varphi) \tag{1.1.1}$$

就是一个以 $2\pi/\omega$ 为周期的正弦函数，其中 y 表示动点的位置，t 表示时间，A 为振幅，ω 为角频率，φ 为初相．

在实际问题中，除了正弦外还会遇到非正弦的周期函数，它们反映了较复杂的周期运动．如电子技术中常用的周期为 T 的矩形波（见图 1－1），就是一个非正弦周期函数的例子．

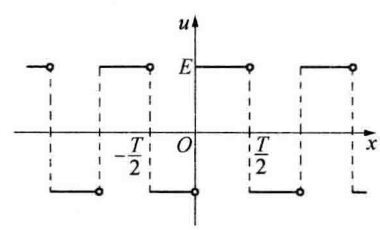

图 1－1　矩形波

如何深入研究非正弦函数呢？联系到用函数的幂级数展开式表示与讨论函数，我们也想将周期函数展开成由简单的周期函数，如三角函数组成的级数．具体地说，将周期为 $T\left(T=\frac{2\pi}{\omega}\right)$ 的周期函数用一系列以 T 为周期的正弦函数 $A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)$ 组成的级数来表示，记为

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n), \tag{1.1.2}$$

其中 A_0，A_n，φ_n（$n=1$，2，3，…）都是常数．

事实上，任何周期函数都可以用收敛的正弦级数表示．把周期函数按上述方式展开，它的物理意义是很明确的，即把一个比较复杂的周期运动看成是许多不同频率的简谐振动的叠加．在电工学上，这种展开称为**谐波分析**．其中常数项 A_0 称为 $f(t)$的直流分量；$A_1\sin(\omega t+\varphi_1)$称为一次谐波（也叫做一次基波）；

而 $A_2\sin(2\omega t+\varphi_2)$，$A_3\sin(3\omega t+\varphi_3)$，…，

依次称为二次谐波，三次谐波，等等．

为了以后讨论方便，我们将正弦函数 $A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)$ 按三角公式变形，得

$$A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)=A_n\sin\varphi_n\cos n\omega t+A_n\cos\varphi_n\sin n\omega t,$$

并且令 $\frac{a_0}{2}=A_0$，$a_n=A_n\sin\varphi_n$，$b_n=A_n\cos\varphi_n$，$\omega t=x$. 则（1.1.2）式右端的级数可改写为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{1.1.3}$$

一般地，形如（1.1.3）的级数叫作**三角级数**，其中 a_0，a_n，b_n（$n=1$，2，3，…）都是常数．

初步了解了为什么要将函数展开为三角级数后，下面着重研究展开方法和展开条件的问题．

§1.2 周期为 2π 的函数展开成傅里叶级数

一、展开方法

下面先介绍三角函数系．所谓三角函数系

$$1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots \tag{1.2.1}$$

在区间 $[-\pi,\pi]$ 上正交，就是指三角函数系（1.2.1）中任何不同的两个函数的乘积在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的积分等于零，即

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x=0\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x=0\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nx\,\mathrm{d}x=0\quad(k,n=1,2,3,\cdots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,\mathrm{d}x=0\quad(k,n=1,2,3,\cdots,k\neq n),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin nx\,\mathrm{d}x=0\quad(k,n=1,2,3,\cdots,k\neq n),$$

以上等式，都可以通过计算定积分来验证，现将上面第四个式子验证如下．

利用三角学中积化和差的公式

$$\cos kx\cos nx=\frac{1}{2}[\cos(k+n)x+\cos(k-n)x],$$

当 $k\neq n$ 时，有

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(k+n)x+\cos(k-n)x]\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(k+n)x}{k+n}+\frac{\sin(k-n)x}{k-n}\right]_{-\pi}^{\pi}\\&=0\quad(k,n=1,2,3,\cdots,k\neq n),\end{aligned}$$

其余等式请读者自行验证．

在三角函数系（1.2.1）中，两个相同的函数的乘积在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的积分不等于零，即

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 \mathrm{d}x = 2\pi, \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \,\mathrm{d}x = \pi, \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \,\mathrm{d}x = \pi \quad (n = 1,2,3,\cdots).$$

设 $f(x)$是周期为 2π 的周期函数，且能展开成三角级数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{1.2.2}$$

我们自然要问：系数 a_0，a_1，b_1，…与函数 $f(x)$ 之间存在着怎样的关系？换句话说，如何利用 $f(x)$把 a_0，a_1，b_1，…表达出来？为此，我们进一步假设级数（1.2.2）可以逐项积分.

先求 a_0，对（1.2.2）式从 $-\pi$ 到 π 逐项积分得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \,\mathrm{d}x + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \,\mathrm{d}x \right].$$

根据三角函数系（1.2.1）的正交性，等式右端除第一项外，其余各项均为零，所以

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{d}x = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi,$$

于是得

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{d}x.$$

其次求 a_n，用 $\cos nx$ 乘（1.2.2）式两端，再从 $-\pi$ 到 π 逐项积分，得到

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \,\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx \,\mathrm{d}x + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx \,\mathrm{d}x].$$

根据三角函数系（1.2.1）的正交性，等式右端除 $k=n$ 的一项外，其余各项均为零，所以

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \,\mathrm{d}x = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \,\mathrm{d}x = a_n \pi,$$

于是得

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \,\mathrm{d}x \quad (n = 1,2,3,\cdots).$$

类似地，用 $\sin nx$ 乘（1.2.2）式两端，再从 $-\pi$ 到 π 逐项积分，可得

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \,\mathrm{d}x \quad (n = 1,2,3,\cdots).$$

由于当 $n=0$ 时，a_n 的表达式正好可以给出 a_0，因此，已得结果可以合并写成

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \,\mathrm{d}x & (n = 0,1,2,3,\cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \,\mathrm{d}x & (n = 1,2,3,\cdots) \end{cases}. \tag{1.2.3}$$

如果公式（1.2.3）中的积分都存在，这时它们定出的系数 a_0，a_1，b_1，…叫做**函数 $f(x)$的傅里叶（Fourier）系数**. 将这些系数代入（1.2.2）式右端，所得的三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1.2.4}$$

叫做**函数 $f(x)$的傅里叶级数**.

二、展开条件

一个定义在（$-\infty$，$+\infty$）上、周期为 2π 的函数 $f(x)$，如果它在一个周期上可积，则

一定可以作出 $f(x)$的傅里叶级数．然而，函数 $f(x)$的傅里叶级数是否一定收敛？如果它收敛，是否一定收敛于函数 $f(x)$？一般来说，这两个问题的答案都不是肯定的．那么，$f(x)$在怎样的条件下，它的傅里叶级数不仅收敛，而且收敛于 $f(x)$？也就是说，$f(x)$满足什么条件可以展开成傅里叶级数？这是我们面临的一个基本问题．

下面叙述一下收敛定理（不加证明），它给出了关于上述问题的一个重要结论．

定理（1.2.1）（收敛定理，狄利克雷（Dirichlet）充分条件） 设 $f(x)$是周期为 2π 的周期函数，如果它满足：

（1）在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点，

（2）在一个周期内至多只有有限个极值点，

则 $f(x)$的傅里叶级数收敛，并且

当 x 是 $f(x)$的连续点时，级数收敛于 $f(x)$；

当 x 是 $f(x)$的间断点时，级数收敛于

$$\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)].$$

收敛定理告诉我们：只要函数在 $[-\pi,\pi]$ 上至多有有限个第一类间断点，并且不作无限次振动，函数的傅里叶级数在连续点处就收敛于该点的函数值，在间断点处收敛于该点左极限与右极限的算术平均值．可见，函数展开成傅里叶级数的条件比展开成幂级数的条件低得多．

例 1 设 $f(x)$是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\leqslant x<0\\ 1, & 0\leqslant x<\pi\end{cases},$$

将 $f(x)$展开成傅里叶级数．

解 所给函数满足收敛定理的条件，它在点 $x=k\pi$（$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$）处不连续，在其他点处连续，从而由收敛定理知 $f(x)$的傅里叶级数收敛，并且当 $x=k\pi$ 时级数收敛于 $\frac{-1+1}{2}=0$. 当 $x\neq k\pi$ 时级数收敛于 $f(x)$. 和函数的图形如图 1－2 所示．

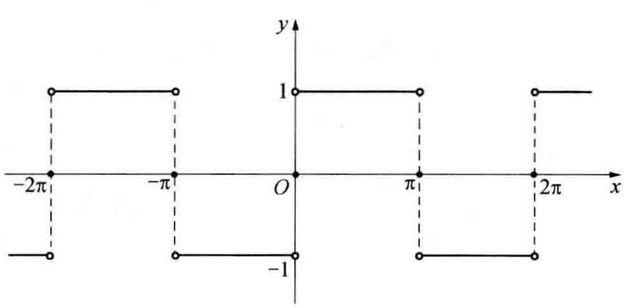

图 1－2

计算傅里叶系数如下：

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\cdot\cos nx\,dx$$
$$=0\quad(n=0,1,2,3,\cdots);$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\cdot\sin nx\,dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{0}^{\pi}$$
$$=\frac{1}{n\pi}[1-\cos n\pi-\cos n\pi+1]$$
$$=\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]$$
$$=\begin{cases}\frac{4}{n\pi},n=1,3,5,\cdots,\\0,n=2,4,6,\cdots.\end{cases}$$

将求得的系数带入（1.2.4）式，就得到 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left[\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots+\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x+\cdots\right]$$
$$(-\infty<x<+\infty;x\neq 0,\pm\pi,\pm 2\pi,\cdots)$$

如果把例 1 中的函数理解为矩形波的波形图（周期 $T=2\pi$，幅值 $E=1$，自变量 x 表示时间)，那么上面所得到的展开式表明：矩形波是由一系列不同频率的正弦波叠加而成的，频率依次为基波频率的奇数倍．

例 2 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}x, & -\pi\leqslant x<0,\\0, & 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数．

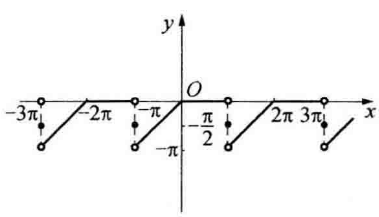

图 1－3

解 所给函数满足收敛定理的条件，它在点

$$x=(2k+1)\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

处不连续．因此，$f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=(2k+1)\pi$ 处收敛于

$$\frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}=\frac{0-\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}.$$

在连续点 $x(x\neq(2k+1)\pi)$ 处收敛于 $f(x)$. 和函数如图 1－3 所示．

计算傅里叶系数如下：

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0}$$
$$=\frac{1}{n^2\pi}(1-\cos n\pi)=\begin{cases}\frac{2}{n^2\pi}, & n=1,3,5,\cdots,\\0, & n=2,4,6,\cdots;\end{cases}$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0}=-\frac{\pi}{2};$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0}$$

$$=-\frac{\cos n\pi}{n}=\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

将求得的系数代入（1.2.4）式，得到 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=-\frac{\pi}{4}+\left(\frac{2}{\pi}\cos x+\sin x\right)-\frac{1}{2}\sin 2x+\left(\frac{2}{3^2\pi}\cos 3x+\frac{1}{3}\sin 3x\right)$$
$$-\frac{1}{4}\sin 4x+\left(\frac{2}{5^2\pi}\cos 5x+\frac{1}{5}\sin 5x\right)-\cdots$$
$$(-\infty<x<+\infty;x\neq\pm\pi,\pm 3\pi,\cdots).$$

应该注意，如果函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\ \pi]$ 上有定义，并且满足收敛定理的条件，那么 $f(x)$ 也可以展开成傅里叶级数．事实上，我们可以在 $[-\pi,\ \pi)$ 或 $(-\pi,\ \pi]$ 外补充函数 $f(x)$ 的定义，使它拓广成周期为 2π 的周期函数 $F(x)$．按这种方式拓广函数的定义域的过程称为**周期延拓**．再将 $F(x)$ 展开成傅里叶级数．最后限制 x 在 $(-\pi,\ \pi)$ 内，此时 $F(x)\equiv f(x)$，这样便得到 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式．根据收敛定理，这个级数在区间端点 $x=\pm\pi$ 处收敛于 $\dfrac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}$.

例 3 将函数

$$f(x)=\begin{cases}-x,-\pi\leqslant x<0\\ x,0\leqslant x\leqslant\pi\end{cases},$$

展开成傅里叶级数．

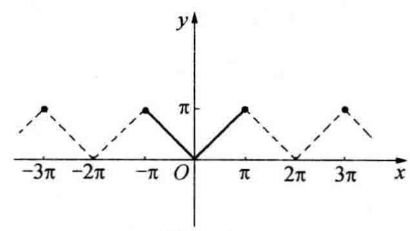

图 1-4

解 所给函数在区间 $[-\pi,\ \pi]$ 上满足收敛定理条件，并且拓广为周期函数时它在每一点 x 处都连续（见图 1-4），因此拓广的周期函数的傅里叶级数在 $[-\pi,\ \pi]$ 上收敛于 $f(x)$.

计算傅里叶系数如下：

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos nx\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{0}^{\pi}$$
$$=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)$$
$$=\begin{cases}-\dfrac{4}{n^2\pi}, & n=1,3,5,\cdots\\ 0, & n=2,4,6,\cdots\end{cases},$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{\pi}=\pi,$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\sin nx\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_{0}^{\pi} \\ &= 0 \quad (n = 1,2,3,\cdots). \end{aligned}$$

将求得的系数代入（1.2.4）式，得到 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right) \quad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi).$$

习题 1－2

1. 下列周期函数 $f(x)$ 的周期为 2π，试将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数，如果 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为：

(1) $f(x)=3x^2+1 \quad (-\pi\leqslant x<\pi)$；

(2) $f(x)=\mathrm{e}^{2x} \quad (-\pi\leqslant x<\pi)$；

(3) $f(x)=\begin{cases} bx, & -\pi\leqslant x<0, \\ ax, & 0\leqslant x<\pi. \end{cases}$ （a，b 为常数，且 $a>b>0$）．

2. 将下列函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数：

(1) $f(x)=2\sin\dfrac{x}{3} \quad (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$；

(2) $f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^x, & -\pi\leqslant x<0, \\ 1, & 0\leqslant x\leqslant\pi. \end{cases}$

§1.3　正弦级数和余弦级数

一、奇函数和偶函数的傅里叶级数

一般说来，一个函数的傅里叶级数既含有正弦项，又含有余弦项（见第二节例 2）．但是，也有一些函数的傅里叶级数只含有正弦项（见第二节例 1）或者只含有常数项和余弦项（见第二节例 3），这是什么原因呢？实际上，这些情况是与 $f(x)$ 的奇偶性有密切关系的．下面介绍一个定理．

定理 1.3.1　设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，在一个周期上可积，则

(1) 当 $f(x)$ 为奇函数时，它的傅里叶系数为

$$a_n = 0 \quad (n = 0,1,2,\cdots),$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \quad (n = 1,2,3,\cdots). \tag{1.3.1}$$

(2) 当 $f(x)$ 为偶函数时，它的傅里叶系数为

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad (n = 0,1,2,\cdots),$$

$$b_n = 0 \quad (n = 1,2,3,\cdots). \tag{1.3.2}$$

这个定理的正确性在几何上是很明显的，现在对第一部分加以证明.

证 设 $f(x)$为奇函数，即 $f(-x)=-f(x)$. 按傅里叶系数公式有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

利用定积分换元法，在左边的第一个积分式中以 $-x$ 代替 x，然后对调积分的上下限，同时更换它的符号，得

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(-x)\cos(-nx)(-\mathrm{d}x) + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \\ &= 0 \quad (n = 0,1,2,\cdots). \end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(-x)\sin(-nx)(-\mathrm{d}x) + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \quad (n = 1,2,3,\cdots). \end{aligned}$$

这个定理说明：如果 $f(x)$为奇函数，那么它的傅里叶级数是只含有正弦的**正弦级数**

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \tag{1.3.3}$$

如果 $f(x)$为偶函数，那么它的傅里叶级数是只含有常数项和余弦的**余弦级数**

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \tag{1.3.4}$$

例 1 设 $f(x)$是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为 $f(x)=x$. 将 $f(x)$展开成傅里叶级数.

解 首先，所给函数满足收敛定理的条件，它在点

$$x = (2k+1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2,\cdots)$$

处不连续，因此 $f(x)$的傅里叶级数在点 $x=(2k+1)\pi$ 处收敛于

$$\frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2} = \frac{\pi+(-\pi)}{2} = 0,$$

在连续点 $x(x\neq(2k+1)\pi)$处收敛于 $f(x)$. 和函数如图 1-5所示.

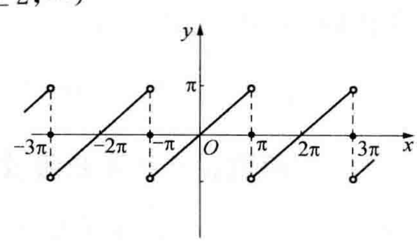

图 1-5

其次，若不计 $x=(2k+1)\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，则

$f(x)$是周期为 2π 的奇函数．显然，此时（1.3.1）式仍成立．按公式（1.3.1）有 $a_n=0$（$n=0$，1，2，…），而

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx$$
$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}$$
$$=-\frac{2}{n}\cos n\pi=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

将求得的 b_n 代入正弦级数（1.3.3），得 $f(x)$的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=2\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx+\cdots\right)$$
$$(-\infty<x<+\infty;x\neq\pm\pi,\pm 3\pi,\cdots).$$

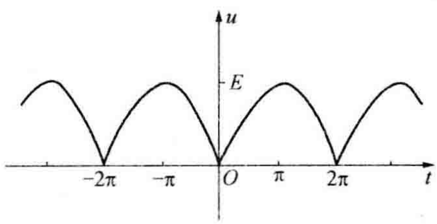

图 1-6

例 2　将周期函数

$$u(t)=E\left|\sin\frac{t}{2}\right|$$

展开成傅里叶级数，其中 E 是正的常数．

解　所给函数满足收敛定理的条件，它在整个数轴上连续（见图 1-6），因此 $u(t)$的傅里叶级数处处收敛于 $u(t)$．

因为 $u(t)$是周期为 2π 的偶函数，所以按公式（1.3.2）有 $b_n=0$，而

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u(t)\cos nt\,dt$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}E\sin\frac{t}{2}\cos nt\,dt$$
$$=\frac{E}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t-\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)t\right]dt$$
$$=\frac{E}{\pi}\left[-\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{n+\frac{1}{2}}+\frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)t}{n-\frac{1}{2}}\right]_0^{\pi}$$
$$=\frac{E}{\pi}\left[\frac{1}{n+\frac{1}{2}}-\frac{1}{n-\frac{1}{2}}\right]$$
$$=-\frac{4E}{(4n^2-1)\pi}\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

将求得的 a_n 代入余弦级数（1.3.4），得 $u(t)$的傅里叶级数展开式为

$$u(t)=\frac{4E}{\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cos t-\frac{1}{15}\cos 2t-\frac{1}{35}\cos 3t-\cdots-\frac{1}{4n^2-1}\cos nt-\cdots\right)\quad(-\infty<t<+\infty).$$

二、函数展开成正弦级数或余弦级数

在实际应用（如研究某种波动问题，热的传导、扩散问题）中，有时还需要把定义在区间 $[0,\pi]$ 上的函数 $f(x)$展开成正弦级数或余弦级数．