时滞型神经网络动力学分析及在电力系统中的应用

王晓红　付主木　著

科学出版社

时滞型神经网络动力学分析及在电力系统中的应用

王晓红　付主木　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书根据工程应用的实际需要，全面系统地介绍时滞型神经网络动力学分析的理论基础、各种动态特性研究方法、主要实现技术、计算机模拟验证技术以及在电力系统稳定性分析中的应用等内容。主要内容包括变时滞神经网络的有界性和全局指数稳定性；多时滞神经网络的有限时间有界性；混合时滞神经网络的稳定性与收敛率估计及正不变集和全局指数吸引集；混合时滞 Cohen-Grossberg 神经网络的鲁棒指数收敛性、非负平衡点稳定性与 Lagrange 稳定性；以及混合时滞区间神经网络的鲁棒指数耗散性和随机时滞神经网络及系统的渐近行为与控制。最后，将这些理论研究方法应用于电力系统的稳定性分析中。

本书可供控制科学与工程、工业自动化、电气自动化、机电一体化、机械工程等专业的研究人员、研究生和高年级本科生参考，也可供控制系统设计工程师等相关工程技术人员阅读和参考。

图书在版编目(CIP)数据

时滞型神经网络动力学分析及在电力系统中的应用/王晓红，付主木著.
—北京：科学出版社，2015.9
ISBN 978-7-03-045747-9

Ⅰ.①时… Ⅱ.①王… ②付… Ⅲ.①时滞系统-人工神经网络-动力学分析-应用-电力系统-研究 Ⅳ.①TP183②TM7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 225217 号

责任编辑：张海娜 纪四稳 / 责任校对：郭瑞芝
责任印制：张 倩 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
三河市骏杰印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2015 年 10 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2015 年 10 月第一次印刷 印张：19 1/4
字数：385 000

定价：98.00 元
（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

在自然界和工程实际中，许多对象在不同工况下的系统参数或结构会产生变化，呈现出“非线性”“时变性”“随机性”“不确定性”等多种复杂特性的组合，采用传统线性系统的建模与分析方法不能全面描述系统动态特性，非线性系统因此应运而生。而神经网络是从系统控制科学的角度来研究非线性系统的一类重要模型，是目前复杂动态系统理论研究的一个国际前沿方向。同时，时滞现象的普遍存在会使系统产生振荡、混沌以及不稳定等复杂动力学行为。研究兼具各类时滞神经网络系统的动力学特性无疑是一项极具挑战性的课题。近年来时滞型神经网络已受到国内外许多科学领域内众多科学工作者的高度重视，并在学术界掀起了有关时滞型神经网络系统理论及应用研究的高潮。每年在国际上发表的相关论文越来越多，所涉及的领域也越来越广泛。

作者近年来一直从事时滞型神经网络动力学的研究工作，深感有必要结合该领域的新成果、新进展和新趋势撰写一部学术著作，对神经网络系统相关理论与方法及其在电力系统稳定性研究中的应用进行系统的介绍，并希望本书的出版能够对该领域的研究和应用起到一定的推动作用。

本书全面系统地介绍时滞型神经网络动力学分析的理论基础、稳定性研究、各种动态特性设计方法、主要实现技术、计算机模拟验证技术以及在电力系统稳定性研究中的应用等问题。主要内容包括变时滞神经网络(NNs)的有界性和全局指数稳定性；混合时滞神经网络的稳定性与收敛率估计；多时滞 Cohen-Grossberg 神经网络(C-G NNs)的有限时间有界性与混合时滞 Cohen-Grossberg 神经网络的鲁棒指数收敛性；混合时滞 Cohen-Grossberg 神经网络非负平衡点稳定性与 Lagrange 稳定性；混合时滞神经网络的正不变集和全局指数吸引集；混合时滞区间神经网络的鲁棒指数耗散性和随机时滞神经网络及系统的渐近行为与控制。最后给出这些理论方法在时滞电力系统稳定性研究中的应用。

全书共 12 章。其中，第 1～6 章由付主木撰写，第 7～12 章由王晓红撰写，最后由王晓红和付主木统稿。

本书编写过程中主要参考作者在华中科技大学攻读博士期间的研究成果和博士论文，同时参考了华中科技大学江明辉博士、路丽芳硕士的学位论文，在此对他们表示诚挚的谢意！另外，还要感谢河南科技大学李东卫、赵晨东、周祥和马灵灵等研究生，感谢他们对本书校对工作提出的宝贵意见！

本书的出版得到了国家自然科学基金(61473115)、河南省科技创新人才杰出

青年计划(144100510004)、河南省高校科技创新人才支持计划(13HASTIT038)、河南科技大学厅级科技创新团队培育与发展计划(2015TTD001)、河南科技大学学术著作出版基金以及河南科技大学博士科研启动基金的资助。本书在撰写过程中参考了国内外许多同行的论著、应用成果和先进技术,作者在此深表谢意。

限于作者水平,书中难免会有不妥之处,恳请各位专家、学者和广大读者批评指正。

作 者

2015 年 7 月

目　　录

第 1 章 绪　论

1.1 引　言

近年来，神经网络的发展日新月异。在工程应用中，人们根据不同的实际需求提出了数百种神经网络模型，如 Cohen-Grossberg 神经网络[1-16]、细胞神经网络[17-21]、Hopfield 神经网络[22,23]、双向联想记忆神经网络[24]等。它们被成功地应用于信号处理、动态图像处理、模式识别、全局优化[25]以及保密通信等领域，并取得了可喜的成就。随着人们对神经网络的广泛关注并对其不断深入的探索，其研究已逐步演化成一门交叉型学科，涉及生物、计算机、数学、物理等众多学科，在这些学科之间相互结合、相互渗透的同时，也将神经网络的研究推向了高潮。

在自然界和社会现象中，客观事物的运动发展规律总是复杂多样的。许多系统的发展不仅需要考虑事物的当前状态，还或多或少地需要关注其与过去发展的状态联系，这种现象称为滞后。人们很早就注意到在生物系统中的时滞现象，后来发现在许多工程领域，如电力系统[26,27]、机械传动系统、流体传输系统、冶金工业过程[28]以及网络控制系统等，都存在着类似的时滞现象，而时滞常常是造成系统不稳定的一个重要原因。因此，将时滞的影响考虑到系统建模中显得尤为必要。同时还注意到，神经网络作为一类典型的非线性系统，在它的硬件实现过程中，时滞也是不可避免的。这是因为在神经网络信息传递过程中，从神经网络自身结构方面，神经元之间的相互通信会存在时间延迟；从网络的硬件实现方面，同样存在开关延迟和通信延迟。如前面所言，时滞的出现可能会破坏整个系统的稳定性。因此，考虑时滞有可能会导致整个神经网络系统产生振荡或出现混沌分岔等复杂动力学行为，使研究变得更加复杂。

在神经网络的应用中，构成神经网络的神经元具有许多并行通道，使得神经网络自身具有时间和空间特性，就需要引入分布时滞，它不仅反映系统历史信息对当前状态的影响，并且能更加客观地描述神经网络的结构特征。另外，由于有限运算放大器的开关切换速度、信号传输以及神经网络之间固有的延迟时间，在神经元之间不可避免地产生变时滞。自 2000 年以来，有关各种时滞类型的神经网络课题，已日渐成为国内外众多学者研究的焦点和热点。目前，已有很多学者针对兼具变时滞和分布时滞神经网络（简称混合时滞神经网络）的动态性能进行了研究，取得了丰硕的理论成果（具体可参阅文献[3]、[4]、[9]、[11]、[22]、[24]、[29]～[33]）。这些成果均在 Lyapunov 意义范围内进行，在 Lagrange 意义范围内的研究才刚起

步，并且把这些理论成果加以实际系统中的应用依然是瓶颈。

在此背景下，本书重点围绕时滞型神经网络的动力学行为进行理论研究，并力图给出这些理论方法在电力系统稳定性分析中的应用，以期丰富对神经网络系统的认识，为其发展和完善提供一定的理论基础和应用参考。

1.2 神经网络的研究现状

通常，时滞系统[34]用数学方法描述为泛函微分方程的形式，被广泛应用于经济、金融、通信、人口等领域。在经济领域中，时滞以一种自然的方式通过一些时间区间展现出来，如投资政策、商品市场演变等。由于时滞对线性或非线性系统的状态或输入的影响，以及它可能引起的复杂动力行为（如振荡[35,36]、不稳定、混沌[37]等），自 1980 年开始，人们便重新对动力系统稳定性的研究产生了浓厚的兴趣，并在时滞非线性系统领域得到了许多稳定性的结果，包括连续的[7]或不连续的系统[38]、确定的[39]或随机的系统[40]。与此同时，对时滞型神经网络的研究也吸引了大批的工作人员和学者，更为详尽的内容且看 1.2.2 节对时滞神经网络研究的概况综述。

1.2.1 时滞神经网络的稳定性分析

近年来，大批研究人员同时将轴突信号传输时滞与分布时滞引入传统的神经网络模型中，如 Hopfield 神经网络（HNNs）、细胞神经网络（CNNs）、双向联想记忆神经网络（BAMNNs）和 Cohen-Grossberg 神经网络（C-GNNs）等，得到了相应的混合时滞神经网络模型，并对这类网络的各种动力学特性进行了深入的研究。在现有探究混合时滞神经网络稳定特性的方法中，被广泛使用和推重的为 Lyapunov 方法。该方法将稳定性问题变为某些适当定义在系统轨迹上的泛函稳定性问题，通过这些泛函得到相应的稳定性判据。这些稳定性条件的表示方式通常无外乎四类：M 矩阵、参数的代数不等式、系统矩阵的范数不等式以及线性矩阵不等式（LMI）。其中，由于 LMI 方法表示的结果能够包含很多未知参数，与无参数可调不等式表示结果以及 M 矩阵表示结果相比较，具有较低的保守性，所以广受研究人员的青睐并在稳定性理论研究中得到了广泛的应用[7,13,41-43]。同时，根据所得稳定结果是否依赖于时滞的大小和范围，用 LMI 形式描述的稳定性条件又可分为两种类型，即与时滞无关的稳定性判据和与时滞相关的稳定性判据。与时滞无关的稳定性判据通常不需要知道系统时滞的精确信息，就能处理时滞未知的系统；而与时滞相关的稳定性判据则更适合用于系统中时滞较小的情况。

此外需要注意的是，在神经网络硬件实现过程中，还存在建模误差、外界干扰以及参数摄动等因素的影响，会使神经网络的权参数存在不确定性，而这些不确定

因素将会导致神经网络系统出现更为复杂的动力学特征。因此,针对有界参数不确定性情况考查网络系统的鲁棒特性具有重要的理论价值和研究意义[14,19,23,31-33,40,42-44]。文献[14]利用LMI技术研究了离散时滞与分布时滞脉冲区间神经网络的周期振荡特性(即周期解的存在、唯一及全局指数稳定性)。文献[19]通过使用Lyapunov泛函方法考察了静态区间神经网络的全局鲁棒指数稳定性问题。在文献[44]中,通过构造恰当的Lyapunov-Krasovskill泛函,并使用LMI方法,研究了随机中立型区间神经网络的全局鲁棒性问题。在文献[31]中,针对一类混合时滞中立型区间神经网络,基于Lyapunov-Krasovskill稳定性理论和LMI技巧,得到了能够保证此类中立型区间神经网络全局无源性的充分性判据。虽然在文献[31]中研究了带有区间时滞的不确定中立型随机神经网络的鲁棒稳定性问题,但因所得的判据需要激励函数是有界的,同时也要求变时滞还是可微的,所得结果保守性较大。

总之,针对各类时滞神经网络的研究,已经呈现出多种多样的动力学行为,除了围绕平衡点、周期解、概周期解、混沌特性来探讨,还在鲁棒性[42-44]、收敛性[45]、无源性[31,46]、耗散性[47-49]、同步性[30,50]等领域进行了新的探讨。在这些研究范围内,针对的时滞神经网络类型有脉冲型、随机型、反应扩散型、模糊型以及带有Markovian跳跃类型等。

1.2.2 Lagrange稳定性研究

1. Lagrange稳定性

我们知道,在Lyapunov意义下的稳定性必须要求非线性系统平衡点的存在性,尤其当讨论系统的全局稳定性时,更要求平衡点存在且唯一。然而,由于动力系统所固有的非线性特性、随机性以及信号传输的误差性等特征,系统本身不存在平衡点,或者同时存在多个平衡点,甚至这些平衡点的状态也可能不稳定。这时,就需要使用一种不同于Lyapunov稳定性且能够反映整个系统特性的稳定性理论。同时,这种稳定性还要求,在不限制平衡点足够小的邻域内,依然能使给定系统所有解的状态轨迹都保持有界,则这种稳定类型称为Lagrange稳定性,它更侧重于描述整个系统的运动状态。

从动态系统的观点出发,Lyapunov意义下全局稳定模型是单稳态系统,即系统存在唯一渐近吸引所有轨迹的平衡点。但在实际的生物学系统中,有时系统不再是全局稳定的,而是存在多个平衡态的多稳态系统。文献[51]研究了多稳态系统的三个基本性能,即有界性、吸引性和完全收敛性。文献[52]~[55]涉及针对多稳定系统更为适用的稳定性概念——Lagrange稳定性。1963年,在文献[52]中介绍了Lagrange意义下稳定性的概念和Lagrange意义下渐近稳定性的概念,并引入了求解系统状态空间集大小的方法。从那以后,Lagrange稳定性研究便经久不

衰,得到了人们长期的关注和探究,近些年来更是成为炙热的研究话题,相应地出现了许多丰富的结果。有针对时滞神经网络的 Lagrange 稳定性研究,也有关于 Chua's 电路的 Lagrange 稳定性分析,同时也出现了考查 Pendulum-like 系统的 Lagrange 稳定性的研究结果和基因调控网络在 Lagrange 意义下的全局指数稳定性问题。此外,也有针对各类非线性方程、微分系统、离散系统、不连续系统、混杂系统、拟周期系统、Lorenz 系统等对象来研究 Lagrange 稳定性的问题,后面将给出详述。

同样,在生物网络以及电力系统等实际非线性系统中,往往存在多个平衡点,这时探讨 Lagrange 稳定性会更符合实际需要。因为 Lagrange 稳定性隶属非线性系统稳定性概念的一种,其用来反映系统解的有界性。Lagrange 稳定理论是 Lyapunov 稳定理论的一个补充和外延,它更侧重于考察系统的总体特性,属于整体概念。所以,对非线性系统 Lagrange 稳定性的探讨和研究具有非常重要的理论价值和实际意义。目前,从查阅的相关文献中已有的成果来看,对 Lagrange 稳定性的研究仅仅局限在对有多平衡点的非线性系统的分析与综合方面,尤其是在 Chua's 电路、相同步系统等一系列实际系统中。

Lagrange 稳定性较 Lyapunov 稳定性的不同之处在于:Lagrange 稳定性是关于整个系统所有解的有界性,而不是某些平衡点的稳定性。在研究系统 Lagrange 稳定性时,不需要考虑平衡点的数量;特别是在研究 Lagrange 渐近稳定性时,只要系统的解最终进入某一个紧集(有界闭集),我们就称该系统具有 Lagrange 渐近稳定性或最终有界。这一稳定性概念条件更弱,具有较小的保守性。Lagrange 稳定性是系统所有解收敛到某个平衡位置的必要条件,当吸引紧集退化为一个唯一平衡位置时,系统则为 Lyapunov 意义下的全局稳定,吸引紧集就是唯一的平衡点。

同时注意到,较早就在动态系统理论和应用中研究了 Lagrange 稳定性。在文献[51]和[53]中,Lasalle 和 Yoshizawa 应用 Lyapunov 函数,研究了 Lagrange 稳定性。其中文献[51]延拓了 Lyapunov 第二方法,揭开了系统 Lagrange 稳定性问题研究的序幕,而文献[53]则进一步研究了 Lagrange 稳定性,即系统解的有界性。文献[54]中,Thornton 和 Mulholland 将 Lagrange 稳定性作为一个决定生态系统稳定性的实用概念进行了讨论。

You[56]研究了 Pendulum-type 方程的不变集和 Lagrange 稳定性。黄文灶[57]研究了动力系统中 Lagrange 稳定运动的 ω-极限集为稳定几乎周期运动所组成的极小集合的充要条件,进而判别常微分系统中几乎周期解或周期解存在的条件。张胜强[58]研究了 n 维欧氏空间中动力系统奇点邻域以及紧致不变集合邻域内 Lagrange 稳定运动的存在性问题。Passino 和 Burgess[59]选择用 Lagrange 稳定性概念来研究离散事件系统,认为 Lyapunov 稳定性和渐近稳定性可以描述一类“合乎逻辑”的离散事件系统的稳定性,可用于制造系统和计算机网络的稳定性分析,扩展了一致有界性、一致极限有界性、实际稳定性、有限时间稳定性和 Lagrange 稳定性的概

念，分析了标准 Petri 网络的稳定性。Bacciotti 和 Rosier[60]研究了 Lyapunov 逆定理在右端不连续的常微分系统中的应用，分析了在一个平衡点处的局部稳定性问题和系统解的 Lagrange 稳定性问题。张克伟[61]证明，如果某一运动是正向 Lagrange稳定的且此运动关于其正半轨是一致正向 Lyapunov 稳定的，则其 ω-极限集是几乎周期运动的极小集合。Rosier[62]通过构造一个光滑 Lyapunov 函数，来说明不连续稳定系统是鲁棒 Lagrange 稳定的。Hassibi 等[63]研究了超动态系统的 Lagrange 稳定性。王玉敏和孟凡伟[64]借助不等式及辅助函数技巧研究了二阶微分方程 Lagrange 稳定的若干判定准则。Zharnitsky[65]将单调扭定理推广到拟周期情形，并应用于探寻一个跳跃粒子系统的运动规律中，当频率满足丢番图不等式时，粒子的速度是一致有界的，满足 Lagrange 稳定条件。在文献[66]中，Yuan 研究了非对称 Duffing 方程的 Lagrange 稳定性问题。Huang[67]研究了拟周期强迫类摆方程解的一致有界性。Bibikov 和 Yu[68]研究了基本非线性哈密顿系统以及带有一个自由度的可逆系统的零解 Lyapunov 稳定性和 Lagrange 稳定性问题。杨莹和黄琳[69]研究了摄动类摆系统的总体性质和鲁棒稳定性，得到了类摆系统在摄动模式下的 Lagrange 稳定条件。弥鲁芳[70]研究了一类非对称 Duffing 方程的 Lagrange 稳定性。在文献[71]中对离散分段仿射系统进行了 Lagrange 稳定研究和系统性能分析。而在文献[72]中则研究了多稳态系统的三个基本性能有界性、吸引性和完全收敛性。Lin 和 Wang[73]证明了拟周期系统的 Lagrangian 稳定性问题。Mi[74]利用 Moser 扭转定理研究了一类 Duffing 方程的 Lagrange 稳定性。孙光辉和傅希林[75]运用变分 Lyapunov 函数方法和比较定理，得到了脉冲摄动微分系统关于两个测度 Lagrange 稳定性的充分条件。李鑫滨[76]基于类摆系统理论，研究了发电机气门 H_∞ 控制器设计问题。李鑫滨等[77]利用微分方程的定性分析方法，讨论了具有一般非线性形式的二阶类摆系统的 Lagrange 稳定性。李鑫滨和钟嘉庆[78]针对一类特殊的具有多平衡点的类摆系统，研究了鲁棒 Lagrange 镇定问题并给出了鲁棒状态反馈控制器的设计方法。吕濯缨和傅希林[79]通过构造 Lyapunov 函数与运用 Razmikhin 技巧，研究了脉冲积分微分方程解的有界性与 Lagrange 稳定性的判别准则。Sosnyts'kyi[80]研究了三体问题中的 Lagrange 运动稳定性问题。郭戈[81]采用非线性跳跃方法及其线性化策略，研究了非线性采样控制系统在理想离散化方式和无限字长数字控制器作用下的 Lagrange 稳定性。Liu 等[82]采用频域方法，研究了在有限维 Hilbert 空间中的一类摆动系统的 Lagrange稳定特性。Wang 等[83]研究了线性摄动系统的控制问题，设计一些控制器策略，确保闭环系统具有类摆性质和 Lagrange 稳定性。Yang 和 Huang[84]研究了一类非线性离散时间系统的鲁棒 Lagrange 稳定性。Luo 等[85]研究了随机反馈扩散方程在均方意义下的 Lagrange 稳定性。廖晓昕等[86]讨论了 Lorenz 系统族的 Lagrange 稳定性，并给出全局指数吸引集的估计式。Liu 等[87]在有限维

Hilbert空间中，针对一类摆动系统建立确保系统 Lagrange 稳定的频域判据。Wang 等[88]使用 H_∞ 理论，研究了不确定的类摆反馈系统的二分法特性和Lagrange稳定性。Duan 等[89]将光滑 Chua's 方程推广到高阶系统中，建立了系统Lagrange 稳定条件，分析了规范的Chua's 振荡器的 Lagrange 稳定域。郭韵霞[90]通过证明一个 Halanay 型不等式，研究了半线性泛函微分方程的 Lagrange 稳定性，通过利用矩阵测度以及欧几里得空间范数构造简单 Lyapunov 函数，得到了半线性泛函微分方程关于部分变元为 Lagrange 稳定性的充分条件。Liao 等[91]在考虑三种不同类型激活函数的基础上，通过构造恰当的 Lyapunov-like 函数，研究了带有多时滞的连续递归神经网络在 Lagrange 意义下的全局指数稳定性。紧接着，Liao 等[92]基于系统参数，进一步研究了多种连续变时滞递归神经网络的Lagrange稳定性，给出了全局指数吸引集和正不变集的具体估计式。Li 等[93]通过分段线性函数和一个吸引排斥函数，将原始的 Chua's 电路进行改进，并采用分岔图分析新电路的一些基本性质，得到了电路 Lagrange 稳定性的条件。Liao 等[94]提出全局指数吸引集的概念，并用于分析一族带有变参数 Lorenz 系统的 Lagrange 稳定性，给出了 Lagrange 稳定域的估计式。郭韵霞[95]利用 Gronwall-Bellman 不等式和微分积分不等式，结合 Lyapunov 函数，探讨了一类非线性时变系统关于部分变元的Lagrange 稳定性、等度 Lagrange 稳定性和一致 Lagrange 稳定性。王晓红[96]针对时滞 Cohen-Grossberg 神经网络的动力学行为，进行了 Lagrange 稳定性分析。孙西滢[97]利用光滑条件下拟周期扭转映射的不变曲线定理，研究了拟周期碰撞振子的 Lagrange 稳定性。殷明慧等[98]基于已有的电力工程实用方法，建立了一类基于轨迹的 Lagrange 稳定性的数学描述及其判定方法。Gao[99]通过使用 Kalman-Yakubovich-Popov 引理、LMI 技巧和频域方法，研究了带有参数不确定的相控制系统的 Lagrange 镇定问题。Dun 等[100]通过应用系统传递函数的结构奇异值到结构化的不确定性中，得到了研究带有标准约束结构不确定性的类摆系统鲁棒 Lagrange 稳定问题一个新的频域条件。Wang 等[101]探讨了一类带有变时滞和分布时滞的非自治 Cohen-Grossberg 神经网络在 Lagrange 意义下的全局指数稳定性。Wang 等[102]基于 Lyapunov 理论，研究了带有变时滞和有限分布时滞的 Cohen-Grossberg 神经网络在 Lagrange 意义下的全局指数稳定性。王晓红等[103]基于两种不同类型的激活函数，讨论了非自治时滞Cohen-Grossberg神经网络在 Lagrange 意义下的全局指数稳定性。金惠萍[104]研究了平面非自治 Hamilton 方程的 Lagrange 稳定性。金惠萍[105]研究了一类非多项式型周期 Hamilton 系统的Lagrange 稳定性。Cong[106]研究了一类拟周期类摆型方程 Lagrange 稳定的充要条件。Luo 等[107]通过构造恰当的 Lyapunov 泛函，得到了一类基因调控网络在

Lagrange 意义下的全局指数稳定的充分性判据。Luo 等[108]研究了多时滞连续中立型递归神经网络在 Lagrange 意义下的全局指数稳定性。Wu 等[109]进一步研究了带有不同类型激活函数的周期型神经网络的 Lagrange 稳定性问题。Tu 等[110]通过构造 Lyapunov 泛函和时滞微分不等式技巧，得到了具有广义激活函数和时变时滞递归神经网络在 Lagrange 意义下的全局指数稳定性。Yakar 等[111]研究初始时差有界性标准和分数阶微分方程在卡普坦意义下的 Lagrange 稳定性。Yakar 和 Cicek[112]讨论了初始时间差异有界的理论、方法和应用，采用两种措施研究了非线性系统的 Lagrange 稳定性。王卫华等[113]分析了一类光滑 Chua's 电路的 Lagrange 稳定性。张亭亭[114]讨论了具有无界扰动的非对称振动的 Lagrange 稳定性。刘杰[115]研究了具有奇点的等时系统在无界扰动下的Lagrange稳定性。施洋等[116]研究了所构造的一类新型 Chua's 电路的 Lagrange 稳定性。邢秀梅[117]研究了非线性方程的 Lagrange 稳定性。贤锋和马合保[118]利用 K 类函数和 Dini 导数，分别研究了非线性广义系统 Lagrange 稳定性、等度 Lagrange 稳定性和一致 Lagrange 稳定性的充分条件。Sosnitskii[119]研究了三体问题中的 Lagrange 运动稳定性和最终演化问题。Yakar 等[120]研究了模糊微分方程的实用稳定性、有界性条件和 Lagrange 稳定性，并将这些性质与 Lyapunov 范函进行了比较。Ouyang等在文献[121]中针对带有多非线性的类摆系统，考虑了 Lagrange 稳定性问题以及状态反馈 Lagrange 镇定问题。Ouyang 等[122]进一步研究了带有多非线性类摆系统的 Lagrange 稳定性问题以及状态反馈 Lagrange 镇定问题。Jiang 和 Fang[123]用 KAM 迭代方法和可逆映射的小扭转定理，研究了一类带有非线性阻尼项的二阶周期系统的 Lagrange 稳定性，得到了拟周期解的存在性与所有解的有界性条件。

以上研究表明，非线性动力系统的 Lagrange 稳定性研究不仅具有重要的理论意义，也具有重要的工程应用价值。

2. 正不变集和全局指数吸引集

在文献[92]中指出，研究神经网络这类非线性系统的 Lagrange 稳定性取决于正不变集和全局指数吸引集的存在性。也就是说，当神经网络存在正不变集和全局指数吸引集时，它必然是 Lagrange 意义下全局指数稳定的，二者相互等价。因此，探讨神经网络的 Lagrange 稳定性就在于寻找正不变集和全局指数吸引集。基于此，我们对带有时变时滞和无穷分布时滞的递归神经网络的正不变集和吸引集加以研究，得到正不变集和全局指数吸引集存在的充分条件。在文献[92]中同时指出，当动力系统存在全局指数吸引集时，就称系统是在 Lagrange 意义下的全局指数稳定，或称全局指数耗散。因此正不变集和吸引集的探究也隶属于 Lagrange 稳定性研究的范畴。事实上，关于这个话题，已经引起了许多学者的关注，并给出

了一系列有效的成果。其中，在文献[124]～[127]中分别针对脉冲时滞 Cohen-Grossberg 神经网络、模糊时滞 Cohen-Grossberg 神经网络、模糊时滞细胞神经网络以及时滞 Hopfield 神经网络等，均探讨了正不变集和吸引集问题；文献[128]～[131]则分别研究了 Lorenz 系统、Chua's 系统和新的混沌系统的正不变集和全局指数吸引集；文献[132]～[140]分别对自治系统、随机微分系统、泛函微分方程等，研究了它们的不变集和吸引域问题。

3. 全局指数耗散性

有关区间神经网络的鲁棒耗散性研究也逐渐引起了国内外学者的广泛关注。文献[141]中首次研究了神经网络的耗散性，紧接着文献[142]将文献[141]中的网络模型推广到随机型，研究了随机系统的均方耗散性。通过构造 Lyapunov 泛函、并利用 Jensen's 不等式、Itô 公式和一些分析技巧，得到了一些以 LMI 表示的保证随机神经网络全局均方耗散的充分条件。文献[143]中研究了形如积分微分系统模型的时滞神经网络全局鲁棒耗散性问题。关于变时滞和无界时滞神经网络的耗散性分析在文献[144]中得到了研究。在文献[145]中，考虑了非线性 Volterra 泛函微分方程(VFDE)的耗散理论解决方案，通过引用一个广义的 Halanay 不等式，得到了 VFDE 的耗散结论。在文献[146]中，从耗散理论的角度出发，研究了非线性随机 Markovian 跳跃的连通系统的镇定问题。基于 Lyapunov 理论和不等式技巧，文献[147]考察了具有混合时滞的不确定神经网络的全局鲁棒点耗散特性。首先，给出了全局鲁棒点耗散的概念，接着得到了一些检验不确定神经网络模型全局鲁棒点耗散和全局指数鲁棒耗散的充分条件，并给出了数值仿真实例加以验证。

同样，本书对全局指数耗散的研究仍然属于 Lagrange 稳定范围，这一思想的来源依然是文献[92]中的结论：若神经网络系统存在全局指数吸引集，则称它是全局指数耗散系统。因此，要想讨论全局指数耗散性问题，落脚点依然是在判断系统全局指数吸引集是否存在的问题。

1.2.3　有限时间有界问题的提出

线性系统的鲁棒控制[148,149]已取得长足的发展，而系统在无穷时间区间内的 Lyapunov 稳定性则是人们长期以来一直关心的问题。据我们所知，Lyapunov 稳定性并不能反映系统的暂态性质，一个在无穷时间内稳定的系统，可能没有较好的暂态性能(如超调量过大)，限制了其工程应用。因此，在实际工程中，人们除了对系统的稳定性感兴趣，更关心系统应满足一定的暂态性要求。为了研究系统在有限时间内的性能，Dorato 在 1961 年、Weiss 和 Infante 在 1967 年分别在文献[150]与文献[151]中，首次提出了有限时间稳定的概念。随着 LMI 理论的不断发展和成熟，有限时间稳定的概念被重新定义。当系统存在外部输入时，有限时间稳定就