

初中数学

• CHUZHONGSHUXUE

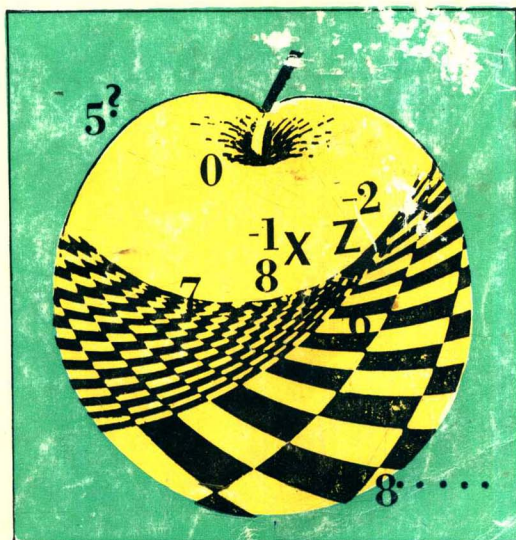
问题和方法

• WENTI

• HE

• FANGFA

刘佛清 陈喜 主编



华中理工大学出版社

初中数学问题和方法

刘佛清	陈 喜	主 编
编者：王志强	王祖祥	黄明维
冯国强	陈广旺	陈富强
李健庭	姚启平	张成国
康聚贤	袁鄂襄	章贵明
沈伟生		

华中理工大学出版社

内容提要

本书是中考数学复习用书，它具有编排新颖，选题质量高，便于教和学，实用性强。主要内容有：（一）问题要点：在充分分析教材中的例题、习题及历年来各主要城市中考试题的基础上提出问题，使读者复习目的明确，对中考命题的形式及难度有比较清晰的认识；（二）方法讲解：详细系统地介绍各种数学问题的解题方法和技巧。每章有习题和测试题，书后附有中考模拟题和答案。

初中数学问题和方法

*

刘佛清 陈 喜 主编

责任编辑：李立鹏 焦 微

*

华中理工大学出版社出版发行

（武昌喻家山 邮编 430074）

新华书店湖北发行所经销

石首市第二印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/32 印张：11.5 字数：263 000

1993年10月第1版 1994年2月第2次印刷

印数：10 001—15 000

ISBN 7-5609-0888-8/O·114

定价：5.50元

（鄂） 新登字第10号

前 言

本书是根据国家中学数学教学大纲，在总结多年教学经验的基础上，为参加初中毕业和升学考试的学生而编写的教学参考书。

全书和各章节主要由两部分内容组成，第一部分是“问题要点”，作者在充分分析教材中的基础知识、例题、习题以及历年各省市中考试题的基础上，高层建瓴提出数学问题，使读者复习目的明确，对中考命题形式及难度有比较清晰的认识。第二部分是“方法讲解”，它详细、系统地介绍了各类数学问题的解题方法和技巧，并通过典型例题的讲解来提高读者分析问题和解决问题的能力，每一节都有经过精选的，适量的习题供读者练习，最后还附有综合测试题，供读者全面测试复习效果。

由于我们的水平有限，加上编写时间仓促，有错误和不妥之处，欢迎批评指正。

作者 一九九三年八月

目 录

第一章 实数	(1)
§ 1.1 实数的概念	(1)
§ 1.2 实数的运算	(5)
第二章 整式	(9)
§ 2.1 整式的有关概念	(9)
§ 2.2 整式的运算	(13)
§ 2.3 因式分解	(17)
第三章 分式	(23)
§ 3.1 分式	(23)
§ 3.2 条件求值	(27)
第四章 二次根式	(35)
§ 4.1 数的开方	(35)
§ 4.2 二次根式	(39)
§ 4.3 非负数性质的应用	(45)
第五章 指数	(53)
第六章 方程和方程组	(57)
§ 6.1 方程及其解法	(57)
§ 6.2 分式方程与无理方程	(61)
§ 6.3 方程组	(66)
第七章 方程知识的综合应用	(74)
§ 7.1 判别式和韦达定理	(74)
§ 7.2 判别式、韦达定理的应用	(78)
§ 7.3 应用题	(83)

第八章 不等式	(90)
§ 8.1 一元一次不等式	(90)
§ 8.2 一元二次不等式	(94)
第九章 函数及其图象	(103)
§ 9.1 函数的概念	(103)
§ 9.2 正、反比例函数、一次函数	(108)
§ 9.3 二次函数(一)	(113)
§ 9.4 二次函数(二)	(120)
§ 9.5 数形结合解题	(125)
§ 9.6 函数综合题分析	(130)
第十章 解三角形	(139)
§ 10.1 三角函数	(139)
§ 10.2 解直角三角形	(142)
§ 10.3 解斜三角形	(146)
§ 10.4 解三角形应用题	(150)
第十一章 统计初步	(157)
第十二章 相交线、平行线	(163)
第十三章 三角形	(169)
第十四章 四边形	(175)
§ 14.1 有关平行四边形的解题	(175)
§ 14.2 梯形的性质	(181)
§ 14.3 辅助线的增添	(187)
§ 14.4 面积和勾股定理	(194)
第十五章 相似形	(204)
§ 15.1 比例线段	(204)
§ 15.2 相似三角形(一)	(208)
§ 15.3 相似三角形(二)	(213)
第十六章 圆	(220)
§ 16.1 圆的基础知识及应用	(220)

§ 16.2	圆的切线及割线	(225)
§ 16.3	与圆有关的三角形及四边形	(231)
§ 16.4	圆与圆的位置关系	(238)
§ 16.5	正多边形和圆	(244)
§ 16.6	基本作图	(249)
§ 16.7	四种命题和间接证法	(253)
第十七章	综合题分析	(259)
§ 17.1	代数综合题	(259)
§ 17.2	几何综合题	(265)
§ 17.3	代数与几何综合题	(270)
§ 17.4	代数与三角函数综合题	(276)
§ 17.5	几何与三角函数综合题	(280)
§ 17.6	代数几何与三角函数综合题	(286)
	中考模拟试题	(294)
	习题答案与提示	(325)

第一章 实数

§ 1.1 实数的概念

【问题要点】

- 1 数的概念和数的分类.
- 2 运用数轴加深对实数,相反数和绝对值的理解.
- 3 实数大小的比较.

【方法讲解】

例 1 下列四句中,正确的是().

- (A) 没有最小的自然数.
- (B) 最大的负有理数是 -1 .
- (C) 无限循环小数是无理数.
- (D) 不存在最小的正有理数.

分析 此题是考查数的概念. 准确掌握各种数的概念和性质,可逐句进行判断.

解 自然数即正整数,1 是最小的正整数,(A) 不对;比 -1 大的负有理数还多,如 -0.1 ,可见 (B) 不对;无理数的定义是无限不循环小数,(C) 不对. 从而选 (D).

例 2 把下列各数分别填入相应的数的集合内:

$\sqrt{16}$, $0.\dot{9}$, $\sin 60^\circ$, $\operatorname{ctg} 45^\circ$, $-\pi^\circ$, $-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$, -0.1212212221
 $\dots$, 3.14 .

整数集合 { }

有理数集合{ }

负实数集合{ }

分析 除了能直接根据定义判断的数,如 $0.\dot{9}$, 3.14 是有理数, $-0.1212212221\cdots$ 是无理数外,都要先对它们进行相应的运算,根据要求再进行填入.

解 $\because \sqrt{16}=4, \sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{ctg} 45^\circ=1, -\pi^\circ=-1,$
 $-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2},$ 所以

整数集合{ $\sqrt{16}, \operatorname{ctg} 45^\circ, -\pi^\circ, \cdots$ }

有理数集合{ $\sqrt{16}, 0.\dot{9}, \operatorname{ctg} 45^\circ, -\pi^\circ, 3.14$ }

负实数集合{ $-\pi^\circ, -\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, -0.1212212221\cdots$ }

注 各种实数的分类,不能凭形式分类,如一见有根号的数或三解符号表示的数就认为是无理数,而应先进行相应运算,根据最终结果进行分类.

例3 已知 $x>0, y<0$ 且 $|x|\leq|y|$, 那么 $x+y$ 是什么数?

解: $\because x>0, y<0$ 且 $|x|\leq|y|$

$\therefore x\leq -y$ 即 $x+y\leq 0$, 可见 $x+y$ 为非正数.

例4 若 a, b, c 三数在数轴上的对应点如图 1-1 则 $|a|-|a+b|+|c-b|-|a+c|=\underline{\hspace{2cm}}$.



解 由图 1-1 可知 $b<a<0<c$ 且 $|b|>|c|>|a|$.

$$\begin{aligned} \therefore |a|-|a+b|+|c-b|-|a+c| \\ = -a - [-(a+b)] = c-b-(a+c) = -a. \end{aligned}$$

例5 设 x, y, z 三个数的平均数为 m , x 与 y 的平均数为 p , p

与 z 的平均数为 n , 且 $x < y < z$, 试比较 m 与 n 的大小.

分析 用作差的方法比较.

$$\begin{aligned}\text{解} \quad n - m &= \frac{p+z}{2} - \frac{x+y+z}{3} = \frac{\frac{x+y}{2} + z}{2} - \frac{x+y+z}{3} \\&= \frac{x+y+2z}{4} - \frac{x+y+z}{3} \\&= \frac{2z-x-y}{12} = \frac{(z-x) + (z-y)}{12}, \\&\because x < y < z \quad \therefore z-x > 0 \quad z-y > 0 \\&\therefore n-m > 0 \quad \text{即 } n > m.\end{aligned}$$

【小结】

1 分类法是数学上重要的思想方法, 在分类时一定要注意在同一标准下逐一进行, 既不能重复, 也不能遗漏, 这里介绍数的分类.

2 数形结合是解决数学问题的重要方法, 利用数轴解决绝对值等有关问题, 体现了数形结合.

3 实数大小的比较可用作差(商)法, 分类讨论法或用数轴直观显示, 比较复杂的问题要根据条件进行变形或化简后再比较.

习题 1.1

一 判断题

- (1) 如果 a, b 为不等实数, 那么 $a^2 + b^2$ 一定是正数 ()
- (2) 若 a, b 为有理数, 则 a^3 也是有理数 ()
- (3) 若 $-m$ 不是负数, 则 m 为正数 ()
- (4) $\sqrt[3]{2a} \geq \sqrt[3]{a}$ 对任何实数 a 都一定成立 ()

(5) 无理数是无限小数 ()

二 填空题

(1) 一个有理数与它的倒数相等的有理数共有_____个

(2) 实数 a 有 $a+|a|=0$ 则 a 是_____

(3) 绝对值小于 1.25 的整数是_____

(4) 已知 $a < 0$ 则 $|a-|a||+|a+|a||=$ _____

(5) 最小的一位数质数与最小的两位数质数的积是_____.

三 选择题

(1) 下面四句话中

甲:两个数的和一定大于每一个加数.

乙:两个数的差一定小于被减数.

丙:两个整数的积一定大于每一个因数.

丁:两个整数的商一定小于被除数.

其中(A)只有一句话是正确的. (B)有两句话是正确的.

(C)四句话都是正确的. (D)四句话都不正确.

(2) 若 $|a|=2$ $|b|=1$ 则 $a+b$ 的值一定是()

(A)3, (B)1, (C)-3, (D)以上都不对.

(3) 若 $ab=0$ 则()

(A) $a=0$, (B) $b=0$, (C) $a=b=0$, (D) $a=0$ 或 $b=0$.

(4) a, b 两实数在数轴上的对应点如图 1-2 在下列式中正确的是

()



图 1-2

(A) $b > a$, (B) $-a > |b|$, (C) $-b > |a|$, (D) $|b| < |a|$.

(5) 实数 a, b 在数轴上的对应点如图 1-3, 则 $\sqrt[3]{a^3b^3}$ 化简为()



(A) ab , (B) $-ab$, (C) $\pm ab$, (D)1.

图 1-3

四 比较下列各题中几个数的大小

$$(1) -\frac{5}{6}, -\frac{6}{7}, \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{10}} \quad (2) a, -a \quad (3) a+b, a.$$

五 已知 a 是绝对值大于 2 而小于或等于 5 的最小负整数, 求 a^3 的倒数的相反数.

§ 1.2 实数的运算

【问题要点】

- 1 实数运算的法则、顺序和运算律.
- 2 近似数、有效数字和科学记数法.

【方法讲解】

例 1 计算 $(1.1 - \frac{1}{3} \div 0.\dot{3}) \times \left\{ \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + [\sqrt{(-3)^2} - (-2)^2 \times 0.5] \div 1\frac{1}{2} \right\}$.

解 原式 $= (1.1 - \frac{1}{3} \div \frac{1}{3}) \times [(-\frac{1}{6}) + (3 - 4 \times 0.5) \div \frac{3}{2}]$
 $= \frac{1}{10} \times (-\frac{1}{6} + 1 \times \frac{2}{3}) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{20}.$

注 1 加、减法为一级运算, 乘法、除法为二级运算, 乘方、开方为三级运算.

2 实数的运算必须遵循: 同级运算由左往右, 混合运算由高往低, 括号运算由内往外.

例 2 计算 $|(-5)^3 \cdot (0.24)^2| \times (-5)^2 \div (6.25)^0 + (-1)^{2n-1}$ (其中 n 为整数).

解 原式 $= 5^3 \times (\frac{6}{5^2})^2 \times 5^2 - 1 = \frac{5^5 \times 6^2}{5^4} - 1$
 $= 5 \times 36 - 1 = 179.$

注 1 若式中既有小数, 又有分数, 那么计算时先要统一形式, 一般化为分数.

2 注意奇数、偶数的表示法和它的性质.

例3 已知线段 AB 的两端点分别为 $A(p, 2), B(-8, q)$ 且 $|AB| = 2\sqrt{8p-2q}$ 求 p, q 的值.

解 由两点间距离公式有

$$|AB| = \sqrt{(p+8)^2 + (2-q)^2}.$$

根据题意有

$$2\sqrt{8p-2q} = \sqrt{(p+8)^2 + (2-q)^2},$$

两边平方, 整理得 $(p-8)^2 + (q+2)^2 = 0$ 由非负数性质得

$$p=8, q=-2.$$

例4 化简 $\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}}$.

$$\text{解法一 原式} = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{2}} + \sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \sqrt{10}.$$

$$\text{解法二 设 } x = \sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}} \quad (x > 0).$$

$$\text{两边平方 } x^2 = 6 + 2\sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} = 10,$$

$$\therefore x = \sqrt{10}.$$

注 把化简、求值问题转化为方程问题, 这是一种常用的解题方法.

例5 用四舍五入法, 按括号里的要求对下列各数取近似值:

1 0.85149 (精确到千分位);

2 1.4972 (精确到 0.01);

3 0.03076 (保留三个有效数字);

4 64140 (保留一个有效数字);

5 60140 (保留两个有效数字).

解 1 $0.85149 \approx 0.851$;

2 $1.4972 \approx 1.50$;

3 $0.03076 \approx 0.0308$;

4 $64140 \approx 6 \times 10^4$;

5 $60140 \approx 6.0 \times 10^4$.

例 6 用科学记数法记出下列各数

1 87000000; 2 500900000;

3 地球离太阳约有一亿五千万千米;

4 地球上煤的储量估计为 15 万亿吨以上.

解 1 8.7×10^6 ; 2 5.009×10^8

3 1.5×10^8 千米 4 1.5×10^{13} 吨以上.

习 题 1.2

一 计算下列各题

$$(1) \quad (-3\frac{1}{2})^2 + 6\frac{1}{2} \times \frac{4}{13} + (-2)^4 \div [(-2)^3 - (-2)^2] - 1 \div (-\frac{4}{3});$$

$$(2) \quad |2 \div 0.2 - 11| \times \{(-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + [\sqrt{(-3)^2} - (-2)^2 \times 0.5]\} \div 1\frac{1}{2};$$

$$(3) \quad \{\sqrt{5-2\sqrt{6}} - (\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{1}{6}}) \times \sqrt{3}\} \div (\sqrt{2} - \sqrt{3});$$

$$(4) \quad (-1)^n \times 2.5 \times 4^3 - 3^2 \div 1\frac{4}{5} \quad (n \text{ 为正整数});$$

$$(5) \quad \frac{1}{2}\sqrt{28} - 6\sqrt{\frac{5}{9}} + \frac{6}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} \quad (1990 \text{ 年四川试题});$$

(6) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{1992} \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{1990}$ (1992 年河北试题).

二 下列由四舍五入得到的近似数,各精确到哪一位,各有哪几个有效数字?

(1) 12.1; (2) 0.04506;

(3) 5.4 万; (4) 205 万.

三 用科学记数法记出下列各数:

(1) 太阳半径大约是 696000 千米;

(2) 光的速度大约是 300000000 米/秒;

(3) (1990 年青岛题)19907.

第二章 整式

§ 2.1 整式的有关概念

【问题要点】

- 1 代数式及其分类.
- 2 代数式的值.
- 3 整式的概念.

【方法讲解】

解 1 填写代数式的分类表

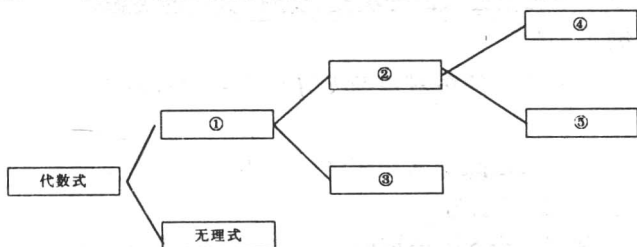


图 2-1

解 ①有理式； ②整式； ③分式； ④单项式； ⑤多项式.

注 分类表准确反映各种概念之间的关系，本题是介绍式的分类表.

例 2 什么叫代数式？并说明它与公式、等式的区别和联系？

解 用加、减、乘、除、乘方、开方六种运算符号，把数

字和表示数的字母连结起来的式子,叫做代数式,代数式里不含有等号,而公式、等式含有等号,所以公式、等式都不是代数式.但是它的两边可以是两个代数式,公式是等式,但等式不一定是公式.

例3 在下列式中① $\frac{1}{3}x^2$, ② $\frac{1}{x^2}$, ③ $2xy$, ④ $\frac{4y}{3x^2}$,
⑤ $6x^2 - \frac{2}{3}y$, ⑥ $\sqrt{x} + y$, ⑦ $\frac{x+y}{a}$, ⑧ $\frac{a}{b}x$, ⑨ $3 + \sin x$,
⑩ $-\pi$ 整式共有多少个?为什么?

解 $\because \frac{1}{x^2}$ 中分母含有字母是分式,②不是整式,④是分式不是整式, $\sqrt{x} + y$ 是无理式不是有理式,⑧更不是整式,⑦和⑧是分式不是整式,⑨是三角式不是代数式,也不是整式.

$\therefore$ ①③⑤⑩是整式共4个.

注 准确把握式的分类是判断代数式的关键.

例4 填空

1 1除以 a 的绝对值与 b 的相反数的和的商,用代数式表示为_____.

2 x 是两位数, y 是一位数,如果把 y 置于 x 的左边,那么所成的三位数表示为_____.

3 如果 a 个人 b 天可做 c 个零件(每人速度一样)那么 b 个人用相同的速度做 a 个零件所需的天数为_____.

4 两个圆的直径和为 a ,用 r 表示其中一个圆的半径,那么这两个圆的面积和为_____.

分析 1 此题是要求能将准确的语言叙述改写为代数式表示. a 的绝对值为 $|a|$, b 的相反数为 $-b$,它们的和为 $|a| - b$,因此①填 $\frac{1}{|a| - b}$.

2 因 x 为两位数, y 置于 x 的左边即 y 在百位上应为 $100y$