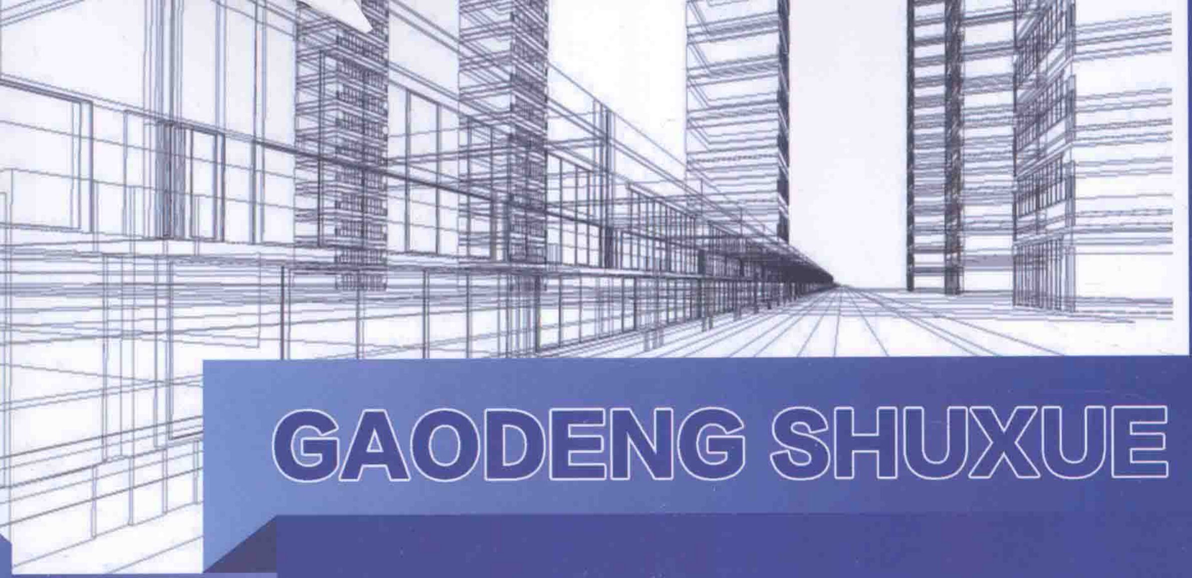
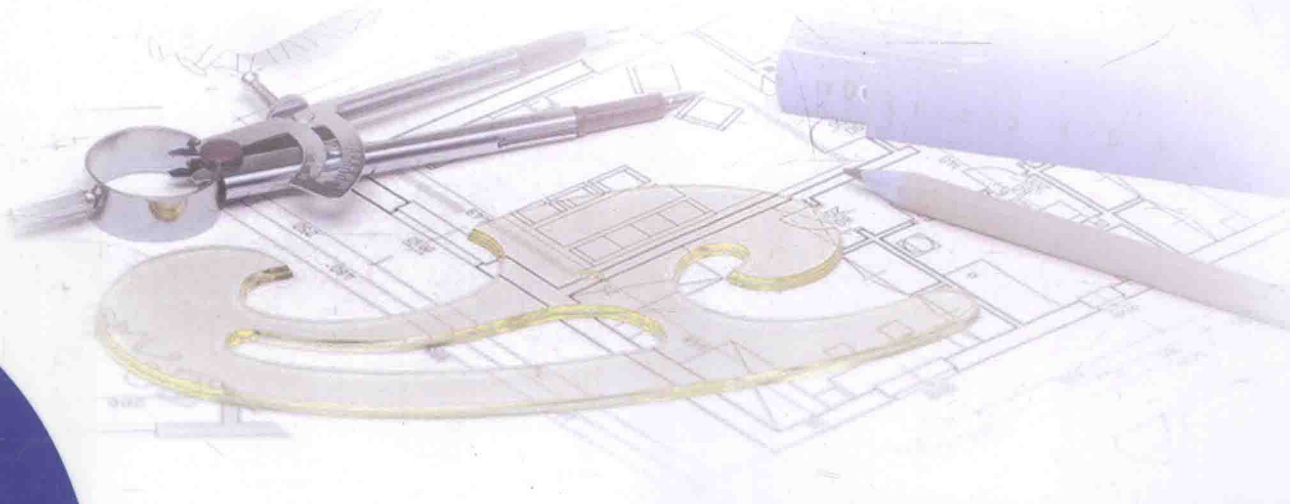


GAODENG SHUXUE

高等数学（下）

主　编　张　谋　王开荣　蒋卫生

主　审　穆春来



重庆大学出版社

http://www.cqup.com.cn

高等数学(下)

主　编　张　谋　王开荣　蒋卫生
主　审　穆春来

重庆大学出版社

内容提要

本书着重于学生数学素养的培养，系统性地对微积分进行讲解. 基本概念、基本原理、基本方法及应用，渐次展开，强调直观性，注重可读性，尽力保证整个体系的完整性、可溯性，激发学生利用所学分析问题、解决问题的创造性.

本书分上、下两册，上册内容包括极限论、导数与微分、微分学的基本定理及其应用、不定积分、定积分、定积分的应用；下册内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、微分方程.

本书可作为高等学校非数学专业，尤其是理工类各专业高等数学教材.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下/张谋，王开荣，蒋卫生主编. —重庆：重庆大学出版社，2016.2

ISBN 978-7-5624-9363-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①张…②王…③蒋…④阴… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 172292 号

高等数学(下)

主　编　张　谋　王开荣　蒋卫生

主　审　穆春来

策划编辑：杨粮菊

责任编辑：文　鹏　　版式设计：杨粮菊

责任校对：贾　梅　　责任印制：赵　晟

*

重庆大学出版社出版发行

出版人：易树平

社址：重庆市沙坪坝区大学城西路 21 号

邮编：401331

电话：(023) 88617190　88617185(中小学)

传真：(023) 88617186　88617166

网址：http://www.cqup.com.cn

邮箱：fxk@cqup.com.cn (营销中心)

全国新华书店经销

万州日报印刷厂印刷

*

开本：787×1092　1/16　印张：17.5　字数：437千

2016 年 2 月第 1 版　2016 年 2 月第 1 次印刷

印数：1—3 000

ISBN 978-7-5624-9363-1　定价：39.00 元

前言

数学，简而言之，是研究数量关系和空间形式的科学.

在现实世界中，数与形，如影随形，随处可见. 数学已经渗透到了社会生活的方方面面，数学已经成为了人类文化的重要组成部分，数学素养已是现代社会每一个公民应该具备的基本素养.

高等数学，作为高校工科、理科及经济管理等专业的一门重要必修基础课程，它承担着为学生开拓视野、打下基础、培养能力的重要任务. 大学期间"高等数学"课程的学习是数学文化的传承、数学素养培养的关键阶段. 通过高等数学的学习，学者得到的不仅仅是相关知识的积累以及利用知识分析问题、解决问题能力的提高，最重要的是严密的逻辑思维能力、严谨的工作作风、踏踏实实的工作态度的培养.

"高等数学"教材在国内已有很多版本，其内容和体系已相当成熟. 但随着社会的进步、科技的迅猛发展，高校院系越来越多、越分越细，各个院系、专业对数学要求的侧重点都有所不同，这就对高等数学教材提出了更高的要求.

本教材由重庆大学数学与统计学院具有丰富教学经验的一线教师编写，参考了国内外有关教材，博采众家之长，调研了建筑类院系的实际需求，本着培养学生的创新思维，为后续课程奠定扎实的理论基础和应用基础的目的而编写了本教材. 本教材的主要特色如下：

1. 对经典的微积分理论系统地进行介绍，其产生脉络清晰可见，保证了整个系统的完整性、可溯性，能激发学者利用所学分析问题、解决问题时的思辨性、创造性.

2. 充分强调基础理论的重要性，基本概念、基本性质、基本方法，详尽地加以阐述，辅以几何直观以使其形象化.

3. 习题的设置遵循了循序渐进、渐次展开的原则，分为习题、总复习题，以使不同层次、不同需求的同学都能学有所得.

本书上册由魏曙光副教授和杨木洪讲师担任主编. 第1

章、第 2 章、第 3 章及其习题由魏曙光副教授编写;第 4 章、第 5 章、第 6 章及其习题由杨木洪讲师编写;下册由张谋副教授、王开荣教授及蒋卫生副教授、阴文革讲师编写,其中第 7 章、第 8 章及其习题由蒋卫生编写,第 9 章、第 10 章及其习题由王开荣编写,第 11 章、第 12 章及其习题由张谋、阴文革编写.

本书由重庆大学数学与统计学院院长、博士生导师穆春来教授审定.

由于时间有限,加之编者水平有限,书中缺点和错误在所难免,恳请广大同行、读者批评指正.

编　者

2015 年 9 月

目录

第 7 章 向量代数与空间解析几何

在平面解析几何中，通过建立直角坐标系，把平面上的点 $M(x,y)$ 与有序数组 (x,y) 一一对应，从而可以用代数方法来研究几何问题. 空间解析几何也是按照类似的方法建立起来的. 平面解析几何的知识对学习一元函数微积分是不可缺少的，同样，空间解析几何的知识对学习多元函数微积分也是必要的.

本章首先介绍三维空间直角坐标系和三维空间中的向量及其代数运算，然后以向量为工具研究空间的直线与平面，最后讨论一般的空间曲面与曲线等.

7.1 空间直角坐标系与向量

7.1.1 空间直角坐标系

17 世纪以来，由于航海、天文、力学、经济、军事、生产的发展，以及初等几何和初等代数的迅速发展，促进了解析几何的建立，并被广泛应用于数学的各个分支. 在解析几何创立以前，几何与代数是彼此独立的两个分支. 解析几何的建立第一次真正实现了几何方法与代数方法的结合，使“数”与“形”统一起来，这是数学发展史上的一次重大突破. 这主要归功于法国数学家笛卡尔.

在中学已介绍了平面直角坐标系，并用坐标方法解决了一些平面解析几何问题. 下面建立三维空间直角坐标系.

在空间任意选定一点 O，过 O 点作三条相互垂直且具有相同单位长度的数轴，三条数轴的正向要符合右手规则，即右手握住 z 轴，大拇指指向 z 轴的正向，其余四个手指从 x 轴的正方向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴的正方向，这就构成了**空间直角（右手）坐标系**，如图 7.1 所示.

称点 O 为坐标原点，三条数轴依次记为 x 轴、y 轴、z 轴，统称为坐标轴. 由两条坐标轴所决定的平面称为**坐标面**，它们两两相互垂直，分别简称为 xOy 面、yOz 面、zOx 面. 三张坐标面把空间分为八个部分，每个部分称为**卦限**，分别用大写罗马数字 Ⅰ、Ⅱ、…、Ⅷ表示，如图 7.2 所示. 在 xOy 平面之上，yOz 平面之前，zOx 平面之右的卦限称为第 Ⅰ 卦限. 在 xOy 平面上方的

其余三个卦限按逆时针方向依次称为第Ⅱ卦限、第Ⅲ卦限和第Ⅳ卦限. 在 xOy 平面下方的四个卦限，规定第Ⅴ卦限在第Ⅰ卦限之下，其余三个卦限也按逆时针方向依次称为第Ⅵ卦限、第Ⅶ卦限、第Ⅷ卦限.

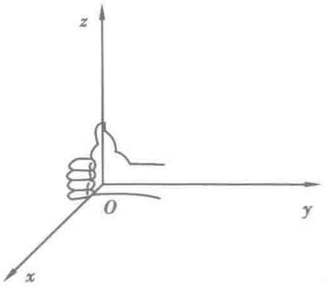


图 7.1

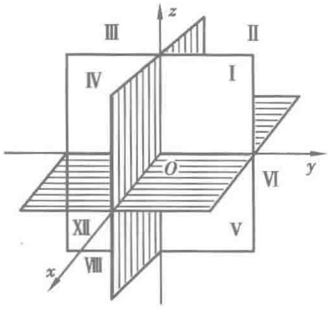


图 7.2

设 M 是空间任意一点，过 M 点分别作三张与 x 轴、y 轴、z 轴垂直的平面，这三张平面与 x 轴、y 轴、z 轴的交点分别为 P、Q、R，如图 7.3 所示. 点 P、Q、R 在相应的坐标轴上的坐标依次为 x、y、z，于是空间点 M 唯一确定了一个有序数组 (x,y,z). 反之，对给定的有序数组 (x,y,z)，若在 x 轴、y 轴和 z 轴上分别取坐标为 x、y、z 的点 P、Q、R，过点 P、Q、R 分别作垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的三张平面，这三张平面有且仅有唯一的交点 M，因而有序数组 (x,y,z) 唯一对应于空间一点 M. 这样，通过空间直角坐标系，空间点 M 与有序数组 (x,y,z) 之间就建立起了一一对应的关系. 有序数组 (x,y,z) 称为点 M 的**坐标**，并把点 M 记为 $M(x,y,z)$，其中第一个数 x 称为**横坐标**，第二个数 y 称为**纵坐标**，第三个数 z 称为**竖坐标**.

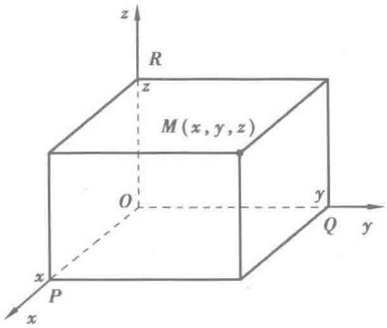


图 7.3

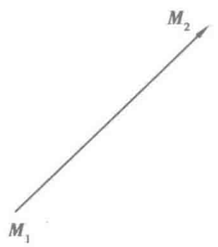


图 7.4

7.1.2　向量及其线性运算

(1) 向量的概念

在自然界中经常会遇到两种量，其中一种，如长度、时间、温度、质量、密度等，当选定度量单位之后，仅用一个实数就能完全把它表示出来. 这种只有大小的量，称为**数量**. 另一种量，如质点的位移、力、速度、力矩等，它是由大小和方向来刻画的量. 这种既有大小又有方向的量，称为**向量**.

由于向量既有大小又有方向，因此在数学上，可以把向量和空间中的有向线段等同起来，即把向量定义为有向线段. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方

向. 这是 1846 年爱尔兰数学家哈密顿创立的. 如图 7.4 所示,以 M_1 为起点、M_2 为终点的有向线段所表示的向量记为$\overrightarrow{M_1M_2}$. 为了方便,除利用起点和终点来表示向量外,还可用一个黑体字母或一个字母上面加箭头来表示向量,例如 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},\boldsymbol{F}$ 或$\vec{a},\vec{r},\vec{v},\vec{F}$.

向量的大小叫做**向量的模**,向量 $\boldsymbol{a},\vec{a},\overrightarrow{M_1M_2}$的模分别记为 $|\boldsymbol{a}|$、$|\vec{a}|$、$|\overrightarrow{M_1M_2}|$. 模为 1 的向量称为**单位向量**. 模为 0 的向量称为**零向量**,记作 $\boldsymbol{0}$. 零向量的方向不定,也可以说是任意的.

如果两个向量大小相等、方向相同,称这两个向量为**相等向量**. 与起点无关的向量称为**自由向量**. 也就是说,自由向量可以在空间中自由平行移动. 或者可以说,自由向量的起点可以放在空间中的任何位置. 如无特别声明,今后讨论的向量都是自由向量.

称与向量 $\boldsymbol{a}$ 大小相等方向相反的向量为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**,记为 $-\boldsymbol{a}$,如图 7.5 所示. 显然,$-\boldsymbol{a}$ 的负向量就是 $\boldsymbol{a}$,即 $-(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}$. 如果两个非零向量的方向相同或相反,则称这两个向量**平行或共线**(即将两个平行向量的起点放在同一点时,它们的终点和公共的起点就在一条直线上),记为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 规定零向量与任何向量都平行. 将两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平移使起点重合,这时两向量所在射线之间的夹角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角,记为 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$. 当 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$ 或 π 时,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行.

(2) 向量的线性运算

1) 向量的加法

作为施工技术及施工管理人员,必须了解各结构和构件的受力情况,及其在这些力的作用下会发生怎样的破坏等. 而结构和构件往往会受到多个力的作用,因此要考虑这些力的合力. 合力的数学表示便是向量的加法. 由物理学知道,求两个力的合力用的是平行四边形法则,类似地可定义两个向量的加法.

对于任何两个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$,在它们之间可以规定一种运算,称为加法. 我们通过两种方式来规定这种运算,即三角形法则和平行四边形法则.

定义 7.1　设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,平移向量 $\boldsymbol{b}$,使 $\boldsymbol{b}$ 的起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合,此时从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

上述作出两向量和的方法叫做向量加法的**三角形法则**,如图 7.6 所示. 三角形法则的实际背景是:设一质点从 O 出发,经过位移 $\boldsymbol{a}$,到达 A,再由 A 出发,经过位移 $\boldsymbol{b}$ 到达 C,其结果相当于直接从 O 出发到达 C 所移动的位移 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 因此,三角形法则的物理意义是位移的合成.

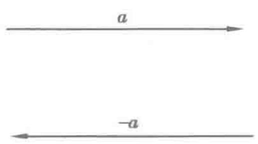


图 7.5

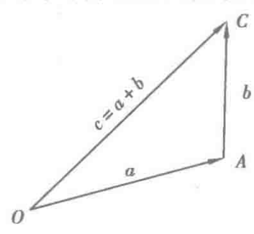


图 7.6

另外,我们还可以用**平行四边形法则**定义向量的加法,如图 7.7 所示:当非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时,平移向量使 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合,以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为相邻两边作平行四边形,从公共起点 O 到对角点 C 的向量定义为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

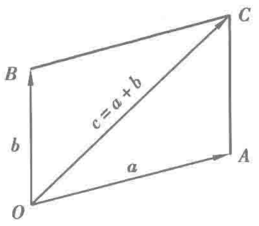


图 7.7

平行四边形法则的实际背景可以看作力的合成或速度的合成.

显然,这两种法则定义的向量的加法是一致的.

若两个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 在同一直线上(或者平行),则它们的和规定为:

(i)若 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 同向,其和向量的方向就是 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的共同方向,其模为 $\boldsymbol{a}$ 的模与 $\boldsymbol{b}$ 的模之和.

(ii)若 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 反向,其和向量的方向为 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 中较长向量的方向,其模为 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 中较大的模与较小的模之差.

向量的加法运算满足下列运算规律:

交换律:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

结合律:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

这是因为,按向量加法的规定(三角形法则),从图 7.6 可见:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c};$$

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}.$$

所以符合交换律. 对于结合律,按加法的规定,先作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 再加上 $\boldsymbol{c}$,即得 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$;如果用 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 相加,则得同一结果,所以符合结合律.

多个向量,如 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$ 首尾相接,则从第一个向量的起点到最后一个向量的终点的向量就是它们的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$,如图 7.8 所示.

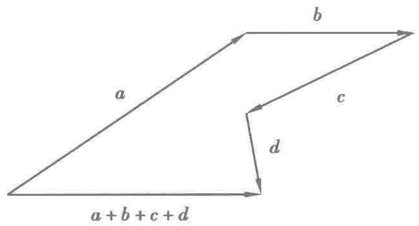


图 7.8

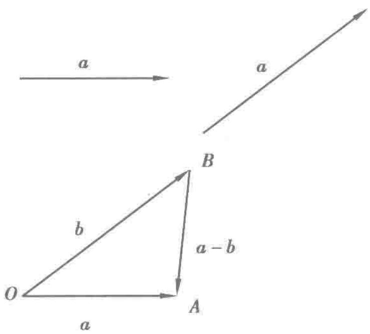


图 7.9

2)向量的减法

向量的减法是作为向量加法的逆运算而引入的.

定义 7.2 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的负向量 $-\boldsymbol{b}$ 的和,称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差**,即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

由向量减法的定义,我们从同一起点 O 作有向线段 $\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$ 分别表示 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}&=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+(-\overrightarrow{OB})\\&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BA}.\end{aligned}$$

也就是说,若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点放在一起,则 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的差向量就是以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为起点,以 $\boldsymbol{a}$ 的终点为终点的向量. 特别地,当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时,有 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

3)数与向量的乘法

定义 7.3　设 λ 是一个实数,$\boldsymbol{a}$ 是一个向量,向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$,$\lambda\boldsymbol{a}$ 定义为一个向量:

(ⅰ)$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$;

(ⅱ)当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向;当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反方向;当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}=0$,即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量,这时它的方向可以是任意的. 特别地,当 $\lambda=\pm1$ 时,有

$$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}.$$

由上述定义,当 $\boldsymbol{a}$ 是零向量时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 也是零向量.

向量与数的乘积符合下列运算规律:

结合律:$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

分配律:$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a},\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

利用向量与数的乘积,任一非零向量 $\boldsymbol{a}$ 还可以表示为

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0,$$

其中 $\boldsymbol{a}^0$ 表示与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量. 由此得到

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a},\text{记为}\quad \boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

该过程称为非零**向量的单位化**.

由于 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行,因此我们常用向量与数的乘积来说明两个向量的平行关系.

定理 7.1　设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,那么向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行的充分必要条件是:存在唯一的实数 λ 使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证明　条件的充分性是显然的,下面证明条件的必要性.

设 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 取 $|\lambda|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$,当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时 $\lambda>0$,$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反方向时 $\lambda<0$,即有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 这是因为此时 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向,且

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\cdot|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|.$$

再证明数 λ 的唯一性. 设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,又设 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$,两式相减,便得

$$(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}\text{ 即 }|\lambda-\mu|\cdot|\boldsymbol{a}|=0.$$

因为 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,故 $|\lambda-\mu|=0$,即 $\lambda=\mu$.

上述定理可以写成更一般的形式:两个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件是存在不同时为零的实数 λ_1、λ_2 使得 $\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

向量的加法、减法及数乘向量运算统称为**向量的线性运算**,$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 称为 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的一个线性组合($\lambda,\mu\in\mathbf{R}$).

例 7.1　试用向量证明三角形的中位线定理:三角形两边中点的连线平行于第三边且等于第三边长度的一半.

证明　如图 7.10 所示,设 D 是 AB 的中点,E 是 AC 的中点,则

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

因为
$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

所以 $$\overrightarrow{DE}\ /\!/\ \overrightarrow{BC}\text{ 且 }|\overrightarrow{DE}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|.$$

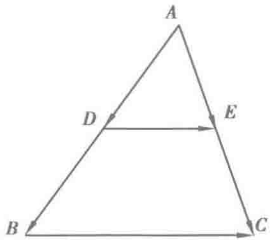


图 7.10

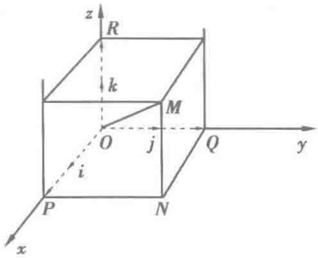


图 7.11

7.1.3 向量的坐标表示及其在坐标表示下的线性运算

(1)向量的坐标表示

为了用坐标表示向量,我们需要将向量放在空间直角坐标系中进行研究.

分别作三个与 x 轴,y 轴,z 轴正向相同的单位向量,依次记为 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$,如图 7.11 所示. 如果将向量的起点移到坐标原点,则这个向量就称为向径. 向径是由终点所唯一确定的. 反之,任给空间一点 M,也能唯一确定一个向径,因此空间点 M 与向径之间构成一一对应关系. 设点 M 的坐标为(x,y,z),由向量的数乘知:向径$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$、$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$、$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$,如图 7.11 所示. 由向量的加法法则可知

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}&=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}\\&=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

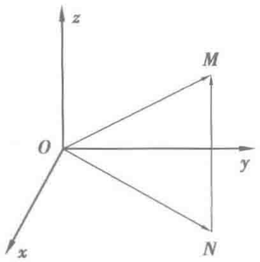


图 7.12

从而

$$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

称上式为向径$\overrightarrow{OM}$的**坐标分解式**. 而表达式中 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 前面的系数 x,y,z 其实就是向量$\overrightarrow{OM}$的终点的坐标,故(x,y,z)称为向径$\overrightarrow{OM}$的**坐标表示**.

设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{NM}$是一个起点为 $N(x_1,y_1,z_1)$、终点为 $M(x_2,y_2,z_2)$的向量,如图 7.12 所示,由向量的加法,得:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NM}&=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}\\&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

因此向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{NM}$的坐标为$(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

(2)向量在坐标表示下的线性运算

利用向量的坐标,可以得到向量的代数运算表达式.

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$,则

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\pm(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_zk)$$

$$= (a_x \pm b_x)\boldsymbol{i} + (a_y \pm b_y)\boldsymbol{j} + (a_z \pm b_z)\boldsymbol{k}$$
$$= (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z);$$
$$\lambda \boldsymbol{a} = \lambda(a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) = \lambda a_x\boldsymbol{i} + \lambda a_y\boldsymbol{j} + \lambda a_z\boldsymbol{k} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}.$$

利用向量数乘的坐标还可判断两个向量是否平行.

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)\neq\boldsymbol{0}$,则由定理 7.1,$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是存在 $\lambda\in\mathbf{R}$,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,即

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}.$$

这里若 $b_x=0$(或 $b_y=0$ 或 $b_z=0$),应相应地理解为 $a_x=0$(或 $a_y=0$ 或 $a_z=0$).

7.1.4　向量的模、方向角、投影

(1)向量的模与两点间的距离公式

设 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$,作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$,如图 7.11 所示,有

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}.$$

按勾股定理可得

$$|\boldsymbol{r}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{OQ}|^2+|\overrightarrow{OR}|^2}.$$

再由 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$,$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$,$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$,有 $|\overrightarrow{OP}|=|x|$,$|\overrightarrow{OQ}|=|y|$,$|\overrightarrow{OR}|=|z|$,于是得到模的坐标表示式

$$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

设有点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和点 $B(x_2,y_2,z_2)$,则点 A 与 B 间的距离 $|AB|$ 就是向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模. 由

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)$$
$$=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1),$$

即得点 A 与 B 间的距离公式:

$$|\overrightarrow{AB}|=|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

(2)向量的方向角

定义 7.4　向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$ 与 x 轴、y 轴、z 轴的正方向所成的夹角 α、β、γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向角**. 根据两向量夹角的定义,有

$$0\leqslant\alpha\leqslant\pi,0\leqslant\beta\leqslant\pi,0\leqslant\gamma\leqslant\pi.$$

方向角的余弦 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**.

将向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$ 的起点平移至原点 O,这样向量 $\boldsymbol{a}$ 与向径相对应,如图 7.13 所示. 利用向径与三个坐标轴之间的关系可得向量 $\boldsymbol{a}$ 的三个方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\cos\gamma=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

由上述三个式子,任一非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦满足:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

单位向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标,就是其方向余弦,即 $\boldsymbol{a}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$.

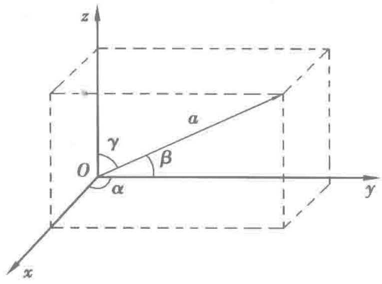


图 7.13

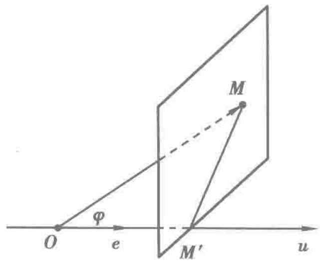


图 7.14

(3)向量在轴上的投影

定义 7.5 设点 O 以及单位向量 $\boldsymbol{e}$ 确定了 u 轴,任给向量 $\boldsymbol{r}$,作$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$,再过点 M 作与 u 轴垂直的平面交 u 轴于点 M'(点 M'称为点 M 在 u 轴上的投影),则向量$\overrightarrow{OM'}$称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的**分向量**. 记$\overrightarrow{OM}=\lambda\boldsymbol{e}$,则数 λ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的**投影**,记作 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r}$ 或$(\boldsymbol{r})_u$,如图 7.14 所示.

按此定义,向量 $\boldsymbol{a}$ 在直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标 a_x,a_y,a_z 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 在三条坐标轴上的投影,即

$$a_x=\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a},a_y=\mathrm{Prj}_y\boldsymbol{a},a_z=\mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a},$$

或记作

$$a_x=(\boldsymbol{a})_x,a_y=(\boldsymbol{a})_y,a_z=(\boldsymbol{a})_z.$$

易证,向量的投影具有与坐标相同的性质:

性质 1 $(\boldsymbol{a})_u=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$(即 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$),其中 φ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 u 轴的夹角;

性质 2 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_u=(\boldsymbol{a})_u+(\boldsymbol{b})_u$(即 $\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}$);

性质 3 $(\lambda\boldsymbol{a})_u=\lambda(\boldsymbol{a})_u$(即 $\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$).

例 7.2 设 $\boldsymbol{a}=(2,1,1),\boldsymbol{b}=(3,-4,-2)$. 求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 方向上的单位向量 $\boldsymbol{e}^0$ 及其方向余弦.

解 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2+3,1-4,1-2)=(5,-3,-1)$.

$$\boldsymbol{e}^0=\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}=\frac{(5,-3,-1)}{\sqrt{5^2+(-3)^2+(-1)^2}}=\left(\frac{5}{\sqrt{35}},-\frac{3}{\sqrt{35}},-\frac{1}{\sqrt{35}}\right).$$

方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{5}{\sqrt{35}},\cos\beta=-\dfrac{3}{\sqrt{35}},\cos\gamma=-\dfrac{1}{\sqrt{35}}$.

例 7.3 已知两点 $A(x_1,y_1,z_1)$和 $B(x_2,y_2,z_2)$以及实数 $\lambda\neq-1$,在直线 AB 上求一点 M,使$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$.

解 设所求点为 $M(x,y,z)$,则

$$\overrightarrow{AM}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1),\overrightarrow{MB}=(x_2-x,y_2-y,z_2-z).$$

依题意,有$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$,即

$$(x-x_1,y-y_1,z-z_1)=\lambda(x_2-x,y_2-y,z_2-z),$$
$$(x,y,z)-(x_1,y_1,z_1)=\lambda(x_2,y_2,z_2)-\lambda(x,y,z),$$
$$(x,y,z)=\frac{1}{1+\lambda}(x_1+\lambda x_2,y_1+\lambda y_2,z_1+\lambda z_2).$$

于是
$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

注　例7.3中的点 M 称为有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的**定比分点**. 当 $\lambda=1$,点 M 是有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的**中点**,其坐标为
$$x=\frac{x_1+x_2}{2},y=\frac{y_1+y_2}{2},z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

习题 7.1

1. 求点 $A(-3,2,-1)$ 关于各坐标面与坐标轴对称点的坐标.
2. 求点 $A(-4,3,5)$ 在坐标面与坐标轴上的投影点的坐标.
3. 已知三个力 $\boldsymbol{F}_1=5\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k},\boldsymbol{F}_2=3\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k},\boldsymbol{F}_3=12\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+15\boldsymbol{k}$,求它们的合力 $\boldsymbol{F}$.
4. 求证:以点 $A(4,3,1)$、$B(7,1,2)$、$C(5,2,3)$ 为顶点的三角形是等腰三角形.
5. 已知向量 $\boldsymbol{a}=5\boldsymbol{i}+\lambda\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\mu\boldsymbol{k}$ 平行,求 λ 与 μ 的值.
6. 用向量方法证明:对角线互相平分的四边形是平行四边形.
7. 从点 $A(2,-1,7)$ 沿向量 $\boldsymbol{a}=(8,9,-12)$ 的方向取线段长 $|AB|=34$,求 B 点坐标.
8. 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle C=\frac{\pi}{6},\angle A=\frac{\pi}{3},|AB|=2$,求 $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影.
9. 设 $\boldsymbol{a}=(1,1,1)$,(1)求 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦;(2)问 $\boldsymbol{a}$ 是否为单位向量?
10. 一向量与 x,y 轴夹角相等为 α,与 z 轴夹角为 2α,试确定该向量的方向.

7.2　向量的乘法运算

向量的乘法运算包括向量的数量积、向量积及混合积.

7.2.1　数量积

(1)数量积的定义

由物理学知道,一质点在恒力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下,由 A 点沿直线移到 B 点,若力 $\boldsymbol{F}$ 与位移向量 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角为 θ,则力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为
$$W=|\boldsymbol{F}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos\theta.$$

功是一个数量,它由力与位移唯一确定. 像这样由两个向量各自的长度和它们夹角的余弦之积的情形,不仅在物理学中而且在各种科学技术中也是经常出现的. 为此,把向量的这种运算抽象出来,就得到两个向量数量积的定义.

定义7.6　设有向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,称数量 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**,记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,即
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}). \tag{7.1}$$