

第八届全国随机振动理论与应用学术会议
暨第一届全国随机动力学学术会议

论文集

主办单位：中国振动工程学会随机振动专业委员会

承办单位：西南交通大学

协办单位：中国建筑学会结构计算理论与工程应用专业委员会

中国力学学会动力学与控制专业委员会随机动力学学组

同济大学土木工程防灾国家重点实验室

四川·成都·西南交通大学

二〇一二年十一月

第八届全国随机振动理论与应用学术会议
暨第一届全国随机动力学学术会议

论文集

主办单位: 中国振动工程学会随机振动专业委员会

承办单位: 西南交通大学

协办单位: 中国建筑学会结构计算理论与工程应用专业委员会
中国力学学会动力学与控制专业委员会随机动力学学组
同济大学土木工程防灾国家重点实验室

赞助单位: 江苏东华测试技术股份有限公司

四川·成都·西南交通大学

二〇一二年十一月

第八届全国随机振动理论与应用学术会议
暨第一届全国随机动力学学术会议

主办单位：中国振动工程学会随机振动专业委员会

承办单位：西南交通大学

协办单位：中国建筑学会结构计算理论与工程应用专业委员会

中国力学学会动力学与控制专业委员会随机动力学学组

同济大学土木工程防灾国家重点实验室

赞助单位：江苏东华测试技术股份有限公司

四川·成都·西南交通大学

二〇一二年十一月

会议学术委员会

主任：李杰
副主任：王黎明 李宏男 陈建军
黄志龙 吴波 徐伟
孙建桥 洪灵 刘先斌
秘书长：陈建兵

委员：（按姓氏笔划顺序排列）

于正平	王柏生	王黎明	王如彬
王永刚	王海荣	王强	刘晓波
刘保国	刘亦工	刘先斌	邓茂林
戎海武	闫云聚	闫桂荣	向俊
齐豪	孙建桥	许勇	李宏男
李杰	李永乐	李乔	李佼瑞
陈淮	陈建军	陈建兵	陈启东
陈奎孚	宋汉文	吴波	吴子燕
吴勇军	张森文	张志谊	张小章
张亚辉	张义民	肖仪清	杨绿峰
宋金宝	邱志平	杜永峰	应祖光
洪灵	高波	徐伟	黄志龙
黄斌	梁建文	曹登庆	温华兵
傅继阳	嵇春艳	雷敏	靳艳飞
谭平	霍林生		

会议组织委员会

主席：李永乐
秘书：陈宁 吴梦雪

委员：（按姓氏笔划顺序排列）

高波	钱永久	李乔	廖海黎
李亚东	赵人达	苏谦	何川
王平	唐继舜	杨永清	张清华
沈锐利	郑凯锋	祝兵	李小珍
单德山	赵灿晖		

前 言

由中国振动工程学会随机振动专业委员会主办、西南交通大学承办的第八届全国随机振动理论与应用学术会议暨第一届全国随机动力学学术会议拟于2012年11月8~9日在成都召开。来自全国各地从事振动工程研究的专家学者将相聚天府之国，相互交流切磋，共同商讨工程随机振动与随机动力学前沿领域的最新研究成果和发展动态。

全国随机振动理论与应用学术会议是由中国振动工程学会随机振动专业委员会发起组织的系列学术研讨会。它以土木工程、机械工程、航空航天工程以及船舶与海洋工程等多个工程领域中共同涉及的随机振动问题为背景、在促进我国工程随机振动领域的理论研究进展及其工程应用方面起到了持续推动作用。2008年以来，中国振动工程学会随机振动专业委员会与中国建筑学会结构计算理论与工程应用专业委员会合作，将这一会议规范为两年一度的系列学术会议。注意到工程随机振动与随机动力学研究的交叉与融合，经中国振动工程学会随机振动专业委员会和中国力学学会动力学与控制专业委员会协商，本次会议以两个专业委员会联合召开的方式进行、并由动力学与控制专业委员会随机动力学学组具体参与协办。希望通过多方共同参与的方式，进一步促进国内外专家和年轻学者广泛深入的交流、研讨与合作。

收入本论文集的学术论文130余篇，按研究领域分为七个部分，分别为随机振动理论与方法、随机结构分析和结构动力特性、风场特性和风致结构振动、结构抗震与减隔振、车致振动与环境振动、结构可靠度与疲劳、系统损伤识别与参数识别，较为全面地反映了我国在这些领域的科研和应用现状，体现了我国工程随机振动和随机动力学学科近年来的学术水平。

本次会议得到了全国相关学会、高等院校、科研部门和企事业单位的大力支持。会议由西南交通大学承办，西南交通大学土木工程学院桥梁工程系为本次会议论文的征集、评审和编辑做了大量的工作，谨在此表示衷心的感谢！

中国振动工程学会随机振动专业委员会

2012年10月30日

目 录

第一部分：随机振动理论与方法（14篇）

- 基于通量等效的FPK方程降维.....陈建兵、袁淑蓉、李 杰（001）
- 宽带噪声激励下含分数阶导数的van der Pol-Duffing振子的首次穿越破坏.....陈林聪、李海锋、朱位秋（006）
- GF-偏差及其在结构非线性随机响应分析中的应用.....陈建兵、张圣涵、李 杰（013）
- 随机相位简谐激励下稳态振动的合成响应.....吕易璠、王柏生（021）
- 非线性随机振动分析的概率密度演化方法.....彭勇波、李杰（031）
- 具有随机参数的三维结构频率拓扑优化设计.....宋宗凤、陈建军、刘国梁（038）
- 碳纳米管谐振器在参数激励的非线性动力响应.....武荣成、赵跃宇（044）
- 索梁组合结构非线性建模理论及分析.....王志攀、赵珧冰、王连华（050）
- 磁粘弹性复合结构的微振动响应.....应祖光、倪一清（054）
- 基于SAP2000 API的模式缩减法在高层建筑动力分析中的应用.....陈嘉源、吴玖荣、徐 安等（058）
- 斜拉桥整体振动下拉索的大幅振动.....孙测世、赵跃宇、王连华（065）
- 结构可靠性分析的完全概率法.....李金平、焦生杰、陈建军（069）
- 随机参数车辆的随机振动响应分析.....贾爱芹、陈建军、曹鸿钧（075）
- 移动质量-悬索体系的稳定性分析.....金一鸣、赵跃宇、王连华（080）

第二部分：随机结构分析与结构动力特性（16篇）

- 基于纤维梁单元的圆钢管再生混合柱受压承载力随机分析.....赵新宇、吴 波、杨 勇（084）
- 钢筋混凝土偏心受压柱长期变形随机分析.....徐腾飞、向天宇、赵人达（092）

基于概率统计模型的超大跨度悬索桥温致位移效应研究·····	陈波、孙玉周、徐幼麟等	(098)
地下结构混凝土随机分布裂缝对硫酸根离子的渗流影响研究·····	刘鑫、刘伟庆、王曙光等	(105)
桥塔随机性对大跨斜拉桥动力特性的统计影响·····	黄斌、朱礼平、李伟	(112)
钢筋混凝土板动力特性的时变温度效应实验研究·····	陈波、孙玉周、夏勇	(120)
基于弹性模量缩减法的随机极限承载力·····	杨绿峰、吴文龙、余波	(127)
温度对拉索频率与索力的影响·····	赵珧冰、赵跃宇、王连华	(135)
P- Δ 效应对结构固有特性的影响·····	梁仁杰、吴京	(141)
转角输电塔动力性能的参数研究·····	陈波、宋春芳、田金鹏等	(147)
海上风电机组支撑体系的结构动特性研究·····	张陆陈、王新、骆少泽	(154)
桩竖向振动引起的桩周饱和土体孔压积累效应分析·····	李强、段玮玮、施骞	(159)
钢管混凝土拱桥运行模态实验研究·····	张欣	(167)
简化索网-阻尼器的自由振动特性分析·····	周海俊、杨夏	(170)
钢桁斜拉桥正交异性整体桥面系行为分析·····	单德山、苏延文、李乔	(176)
超大跨径CFRP主缆悬索桥动力特性参数分析·····	李翠娟、徐勋、强士中	(183)

第三部分：风场特性及风致结构振动（30篇）

基于EMD分解法对台风“梅花”的近地风特性分析·····	吕昭、黄鹏、王旭等	(189)
基于修正迭代法识别时变风速·····	卜建清、罗绍湘、贡明明	(196)
海浪强干扰条件下风场特性风洞试验研究·····	许福友、李文江、张哲等	(203)
基于长期监测的苏通大桥风速风向联合分布研究·····	王浩、王龙花、樊星辰等	(209)
低矮房屋实测风压极值特性及极值估计方法研究·····	黄鹏、蔡玢、全涌等	(216)
基于代理模型的门式刚架抗风优化·····	饶瑞、傅继阳、吴玖荣等	(223)

风雪作用下大跨屋盖基于稳定等效的静力风荷载·····	黄友钦、傅继阳	(230)
建筑结构风雨作用效应的研究进展·····	黄鹏、周海根、顾明	(237)
结构抗风设计分级体系研究·····	张建胜、武岳、吴迪	(246)
半球形大跨度干煤棚风荷载及干扰效应试验研究·····	黄鹏、王旭、顾明	(252)
基于复形法的大跨屋盖结构抗风优化·····	黄友钦、张志华、傅继阳	(259)
复杂环境下有外附网架的高层建筑表面风压特性研究·····	涂楠坤、全涌、顾明等	(266)
基于量子粒子群算法的大跨屋盖结构抗风优化·····	钟亮、傅继阳、黄友钦等	(275)
锥度化方形截面高层建筑气动力特性研究·····	张正维、全涌、顾明等	(283)
带宽影响的风致响应峰值因子研究·····	黄国庆、陈新中	(292)
悬索桥跨跨式吊索驰振气动干扰效应数值分析·····	李胜利、路毓、王东炜	(299)
多主跨悬索桥颤振形态演化现象及其机理推断·····	张文明、葛耀君	(306)
基于非线性振动的桥梁颤振后状态研究·····	王骑、廖海黎	(310)
大跨度柔性斜拉—悬索体系风致静动力响应研究·····	张明金、李永乐、廖海黎	(316)
悬索桥施工猫道静风稳定性与抖振响应分析·····	王东绪、李永乐、卢伟等	(324)
双圆柱索尾流驰振的能量分析方法·····	唐浩俊、李永乐、廖海黎	(331)
矩形断面数值绕流的特征正交分解分析·····	张士宁、祝志文	(338)
固定直圆柱随机脉动升力特性的数值模拟·····	祝志文	(346)
横风下公路交通车辆气动特性的风洞试验研究·····	韩艳、胡揭玄、蔡春声等	(356)
考虑摆动效应的覆冰导线三维驰振分析·····	马文勇、尉耀元	(363)
翼吊发动机转子系统在大气紊流下的响应分析·····	刘晓波、涂俊超、邓贝贝	(371)
作用于高速铁路声屏障的列车脉动风荷载研究·····	施洲、张双洋、苏威风等	(377)
悬浮隧道锚索涡激振动影响因数分析·····	罗刚、周晓军	(385)

铁路风屏障的气动绕流及风吹雪特性研究·····	李永乐、赵彤、刘多特等	(392)
分离双幅斜拉桥的随机抖振风洞试验与数值分析·····	朱乐东、周奇、任鹏杰等	(400)

第四部分：结构抗震与减隔振（28篇）

基于改进点估计法的结构随机动力地震反应概率密度演化分析·····	吕大刚、宋鹏彦、于晓辉等	(415)
考虑塔线耦联效应的输电塔纵向抗震简化分析方法·····	陈波、宋春芳、郭伟华等	(420)
超大跨度斜拉桥随机地震响应参数敏感性分析·····	武芳文、赵雷	(426)
长周期地震动影响因素及频谱参数研究·····	杜东升、王曙光、刘伟庆等	(439)
穿越三种介质地下管线的随机地震反应·····	王岱、韦灼彬、梁建文	(448)
设计加速度反应谱长周期段输入能量特征分析·····	王德才、倪四道、叶献国	(455)
粘弹性边界条件下黄土隧道结构的地震动稳定分析·····	程选生、田瑞瑞、郑颖人等	(463)
基于辛几何谱分布率的2010年加利福尼亚Baja地震非线性分析·····	雷敏、孟光	(470)
地震与重卡车作用下桥梁多灾内力组合的改进方法探讨·····	孙得璋、孙柏涛、王旭等	(474)
带高位厚板转换层混凝土框筒结构地震反应分析·····	周靖、赵卫锋、何方平	(482)
弯曲型与剪切型多自由度体系抗震强度折减系数比较分析·····	王慧英、蔡健、补国斌	(489)
振动台试验用小直径普通叠层橡胶隔震支座力学性能试验检测·····	段燕玲、韩淼、孙欢	(496)
大跨度斜拉桥多维多点随机地震激励响应分析·····	郑史雄、贾宏宇、夏明强等	(502)
行波效应对大跨度上承式钢桁拱桥地震响应的影响·····	杨华平、钱永久、邵长江等	(509)
地震响应分析中反应谱法与时程法计算差异研究·····	单德山、丁德豪、李乔	(515)
大跨三塔斜拉桥非一致激励下非线性地震响应·····	卫星、肖林、邵柯夫等	(521)
基于弹塑性联结梁的双薄壁高墩连续钢构桥稳定性和抗震性研究·····	文曙东、郑凯锋	(528)
平动位移模式下加筋土挡墙抗震稳定性研究·····	杨长卫	(533)

Earthquake Resisting System Optimization and Pushover Analysis in Bridge Seismic Design·····	Guoqing Huang, Hangtong Wu	(539)
基于 H_{∞} 范数的调液阻尼器在摄动结构中的减震优化设计·····	霍林生、沈文赫、李宏男	(552)
连接相邻结构的粘弹性阻尼器优化设计研究·····	黄潇、朱宏平	(559)
随机智能梁结构主动振动控制压电片优化配置·····	王敏娟、陈建军	(565)
颗粒阻尼吸振器减振特性试验研究·····	项红荧、陈前、姚冰等	(571)
基于随机振动的液体粘滞阻尼器参数优化分析·····	赵国辉、刘健新、李宇	(579)
船舶结构自粘性复合阻尼材料减振性能试验研究·····	温华兵、郭夕军、夏兆旺等	(586)
大跨度铁路斜拉桥的纵向振动控制·····	单德山、何源、李乔	(591)
地震作用下桥梁结构损伤位置识别·····	单德山、黄振兴、李乔	(598)
铁路连续钢桁梁柔性拱桥减隔震方案比较研究·····	张志明、郑凯锋	(604)

第五部分：车致结构振动与环境振动（20篇）

CA砂浆弹性模量对高速列车-板式轨道系统动力特性的影响·····	龚凯、向俊、毛建红	(608)
25t轴重货车非线性振动特性研究·····	何百千、王开云	(614)
竖曲线变化对高速铁路平纵断面轮轨系统振动特性的影响·····	杨久川、王开云	(620)
公路桥梁冲击系数的影响因素分析·····	易晋生、顾安邦、王小松	(626)
公路桥梁车辆耦合系统随机最优控制研究·····	冷小磊、孙燕	(632)
城市道路交通诱发周边建筑结构振动实测分析·····	叶茂、任珉、谭平等	(639)
轨道谱与软土动力特性对地铁盾构隧道随机振动的影响·····	韦凯、翟婉明、肖军华	(646)
高速公路交通诱发环境振动隔振屏障数值分析·····	李思璐、任珉、叶茂	(653)
基于动态子结构-阻抗法的车辆模型动态特性分析·····	夏兆旺、方媛媛、温华兵	(660)
移动简谐荷载列作用下简支梁竖向动力响应的解析分析及应用·····	张铎、李小珍	(665)

基于车桥耦合振动的斜拉桥主梁钢-混结合段刚度平顺性分析	刘全民、李小珍、张迅等	(676)
运行列车引起的高架车站环境振动的实测分析	李小珍、刘全民、张迅等	(683)
基于相干分析的混凝土箱梁结构噪声源识别方法研究	刘孝寒、李小珍、张迅等	(690)
风屏障对桥面行车风环境及车辆运行安全性影响	陈宁、李永乐、姜孝伟等	(697)
风-车-桥耦合振动系统参数影响性研究	李永乐、张明金、汪斌	(704)
桥上移动列车的风场特性研究	吴梦雪、李永乐、强士中	(712)
大跨度铁路斜拉桥塔梁纵向连接的动力性能	乔倩妃、李永乐、向活跃等	(719)
大跨度钢桁梁斜拉桥无砟轨道桥面系车致局部振动性能研究	李永乐, 夏飞龙, 李龙等	(723)
基于风-车-桥(线)耦合振动的风屏障防风效果研究	李永乐、向活跃、廖海黎	(729)
地震作用对大跨度斜拉桥车-桥耦合振动的影响	李永乐、朱思宇、李鑫等	(735)

第六部分：结构可靠度与疲劳（11篇）

基于长期监测的拉索可靠性评估	孙利民、焦美菊、孙守旺	(740)
考虑非高斯性的大跨悬索桥抖振动力可靠性分析	胡俊、欧进萍	(748)
新型消能伸臂体系的动力可靠度研究	谭平、方创杰、王磊等	(753)
基础隔震结构的性态设计方法与可靠度评价	孙臻、刘伟庆、王曙光等	(759)
考虑非线性累积损伤的大跨多荷载桥梁的疲劳可靠度评估	陈志为、徐幼麟	(766)
基于精细随机有限元模型的隧道衬砌结构可靠度研究	董志君、李筱毅、刘树亚	(773)
基于HRBF500钢筋的预应力混凝土梁受弯疲劳性能研究	王新玲、白小康、高朝阳	(779)
基于健康监测系统的大跨多荷载桥梁的疲劳可靠度评估	陈志为、徐幼麟	(784)
基于概率密度演化的连续刚构桥抗震可靠度分析	刘章军、熊敏、方兴	(791)
预应力混凝土桥弯曲开裂的时变可靠度分析	刘程、向天宇	(798)

钢桁梁斜拉桥索梁锚固结构疲劳性能试验研究.....单德山、张亚东、李乔 (804)

第七部分：系统损伤识别与参数识别（16篇）

基于应变统计矩的简支梁损伤定位.....王丹生、相伟、朱宏平等 (812)

随机共振和响应灵敏度结合的结构损伤检测方法.....刘镡、闫云聚、常晓通等 (817)

油气管道损伤识别的工作应变模态方法及模型试验研究.....许成祥、贾善坡、涂金钊等 (823)

工程中微弱信号随机共振检测方法的研究.....裘著有、闫云聚、刘镡等 (837)

设置加固支撑多层建筑结构的系统识别和模型修正研究.....陈波、郭伟华、宋春芳等 (842)

基于一元线性回归模型的多源频域载荷识别.....王成、焦吉祥、黄翔龙等 (848)

转子系统随机支撑刚度参数的识别.....刘保国、潘勇、岳龙旺等 (855)

列车荷载作用下铁路桥梁损伤位置识别.....单德山、张俊英、李乔 (859)

铁路桥梁结构时域损伤预警子区域法.....单德山、付春雨、李乔 (867)

混凝土结构的震损机理和评估方法研究.....邵长江、钱永久 (875)

斜拉桥健康监测动态信号改进小波相关降噪研究.....单德山、严鹏、李乔 (881)

随机子空间识别的模态参数不确定度量化研究.....秦世强、霍学晋、高玉峰等 (889)

桥梁结构模态参数的时频域识别.....单德山、苏延文、李乔 (895)

传感器性能退化与损伤引起的结构响应异常检测与区分研究.....翁柳青、麻胜兰、姜绍飞 (901)

连廊位置对连体双塔结构位移响应影响的平稳随机分析.....杜永峰、李春锋、李慧 (910)

Chaos Control in a Bertrand duopoly Model with Heterogeneous Players.....Jiaorui Li, Jian Chang (916)

基于通量等效的 FPK 方程降维*

陈建兵^{1,2} 袁淑蓉² 李杰^{1,2}

(1. 同济大学土木工程防灾国家重点实验室 上海 200092; 2. 同济大学土木工程学院 上海 200092)

摘要: FPK 方程是自噪声激励下非线性随机系统状态响应概率密度函数的控制方程。对高维非线性系统, 其求解十分困难。广义概率密度演化方程是解耦的偏微分方程, 其基本思想是基于概率守恒原理的随机事件描述与物理解答。利用广义概率密度演化方程, 构造基于物理的等效通量, 可以获得解耦的 FPK 方程。以结构的随机地震响应分析为例, 进行了初步验证。这一基本思想有望推广到更一般的非线性系统中去。

关键词: 概率守恒原理; 广义概率密度演化方程; 通量等效; FPK 方程

Dimension Reduction of FPK Equation based on Equivalent Flux

CHEN JianBing^{1,2}, YUAN ShuRon², LI Jie^{1,2}

(1. State Key Laboratory of Disaster Reduction in Civil Engineering, Tongji University, Shanghai, 200092, China;

2. School of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai, 200092, China)

Abstract: FPK equation is the governing equation of the probability density function of stochastic dynamical systems subjected to white noise excitation. The solution is unavailable for high-dimensional stochastic systems. On the other hand, the generalized density evolution equation is a family of uncoupled partial differential equation, which is based on the random event description of the principle of preservation of probability and the physical solution. Making use of the generalized density evolution equation, an equivalent flux via physical mechanism could be obtained. Thus, the FPK equation could be uncoupled and the dimension could be reduced. Numerical example verifies the proposed approach.

Key words: The principle of preservation of probability; Generalized density evolution equation; Equivalent flux; FPK equation

土木工程、海洋工程等领域中的工程结构所受的激励及本身的物理力学特性往往都具有很大的不确定性, 从而使得系统的响应和性态是随机变量、随机过程或随机场^[1-3]。高维非线性随机系统分析是困扰了人们近五十年的困难问题。对随机问题, 人们通常从样本、统计矩及概率密度等三个不同层次加以把握。但无论在哪个层次上, 都不可避免地遇到了非线性与随机性耦合造成的巨大困难^[4,5]。基于物理随机系统的基本思想, 为非线性随机动力学问题提供了新的途径^[6,7]。

经典的概率密度演化方程(包括 Liouville 方程、FPK 方程和 Dostupov-Pugachev 方程)都是高维偏微分方程^[8], 求解十分困难^[5,9]。过去十年来, 发展了以广义概率密度演化方程为基础的广义概率密度演化

理论。广义概率密度演化方程是解耦的偏微分方程, 其求解难度大大降低。

本文试图沿着概率密度演化的基本思想, 导出一类新的通量等效形式的概率密度演化方程, 从而实现 FPK 方程的降维。

1 概率守恒原理与概率密度演化方程

1.1 概率守恒原理

概率守恒原理是随机系统的基本特性之一, 它可以一般地表述为: 在保守的随机系统演化过程中, 概率测度守恒^[6,7]。这里“保守”意指在演化过程中既没有随机因素消失, 也没有新的随机因素增加。

为了更加深入地理解概率守恒原理的确切意

义, 可从状态空间描述和随机事件描述两个不同的角度加以剖析^[10]。所谓状态空间描述, 是指在任意时间区间内, 状态空间的任意给定区域中的概率增量等于通过边界的概率流量。从这一基本原理出发, 结合随机状态方程, 可以完整地导出经典的概率密度演化方程, 包括 Liouville 方程、Dostupov-Pugachev 方程和 FPK 方程^[7,10]。应该强调, 状态空间描述表明, 在状态子空间中概率不守恒。这是导致高维耦合偏微分方程的本质原因。

更为重要的是, 存在一类随机事件描述, 即: 在概率保守系统中, 同一样本轨道或一族样本轨道在演化过程中概率测度守恒。这一基本观念是如此简单和直接, 以至于人们天然默认而长期没有对此加以深入探讨。事实上, 在随机事件描述的基础上, 结合随机物理方程, 可以导出一类全新的、完全解耦的广义概率密度演化方程^[7]。

值得指出, 概率密度守恒原理的两种描述分别与连续介质物理中的 Lagrange 描述和 Euler 描述有类似之处^[11]。但是, 除物理本质不同之外, 它们之间也还存在重要的差别, 例如, 在概率守恒原理中, 本质上不需要关于变换的 Jacobi 行列式非零的要求。

1.2 FPK 方程、广义概率密度演化方程

1.2.1 FPK 方程

对于多维随机动力系统, 动力方程可表述为

$$M\ddot{X} + f(\dot{X}, X) = \Gamma\xi(t) \quad (1)$$

其中, M 为动力系统的质量矩阵, $f(\cdot)$ 为阻尼和刚度矩阵函数, Γ 为激励输入影响矩阵。系统(1)相应的 Itô 随机微分方程为

$$dY = A(Y, t)dt + B(Y, t)dW(t) \quad (2)$$

式中, Y 为 n 维状态向量, A 为 n 维算子向量, $B=[B_{ij}]_{n \times r}$ 为 $n \times r$ 维荷载影响矩阵。对于 r 维 Wiener 过程 $W(t)$, 有

$$E[dW(t)]=0, E[dW(t)dW^T(t)]=Ddt \quad (3)$$

从概率守恒原理的状态空间描述出发, 结合物理论状态方程(2), 可得 FPK 方程^[7]

$$\frac{\partial p_Y(y, t)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial [A_i(y, t)p_Y(y, t)]}{\partial y_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 [\sigma_{ij}(y, t)p_Y(y, t)]}{\partial y_i \partial y_j} \quad (4)$$

其中, $\sigma(y, t) = B(y, t)DB^T(y, t)$ 为扩散矩阵。在结构随机地震响应分析中, $B(y, t)$ 一般与 y 无关, 此即所谓的加性白噪声激励问题, 此时, 上式可写为

$$\frac{\partial p_Y(y, t)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial [A_i(y, t)p_Y(y, t)]}{\partial y_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(t) \frac{\partial^2 p_Y(y, t)}{\partial y_i \partial y_j} \quad (5)$$

式(5)为 n 维偏微分方程。研究表明, 当维数 n 较大时, 目前尚无有效方法获得其解析或数值解^[8,9]。

1.2.2 广义概率密度演化方程

将式(10)中的随机激励表达成随机函数形式^[3,12], 则可将多维随机动力系统的随机动力方程写为

$$\dot{Y} = G(\Theta, Y, t), Y(t_0) = Y_0 \quad (6)$$

其中, $G(\cdot)$ 为确定性算子, Θ 不仅包括随机激励中的基本随机变量, 还可以包括系统本身特性中的随机变量, 其联合概率密度函数 $p_\Theta(\Theta)$ 已知。

实际工程中大多数系统为适定的动力系统, 对此类系统, 其状态方程的解答存在且唯一, 为简便计, 记系统(6)的物理解答为

$$Y = H(\Theta, t) \quad (7)$$

类似地, 记 \dot{Y} 为

$$\dot{Y} = h(\Theta, t) \quad (8)$$

其中, $h(\cdot) = \partial H(\cdot) / \partial t$ 。

基于概率密度守恒原理的随机事件描述, 并结合(8), 可获得关于状态向量 Y 的任意分量 Y_l ($l=1, 2, \dots, n$) 的广义概率密度演化方程(GDEE), 即^[7]

$$\frac{\partial p_{Y_l}(y_l, \theta, t)}{\partial t} + \dot{Y}_l(\theta, t) \frac{\partial p_{Y_l}(y_l, \theta, t)}{\partial y_l} = 0 \quad (9)$$

相应的初始条件一般取为

$$p_{Y_l}(y_l, \theta, t_0) = \delta(y_l - y_{l0})p_\Theta(\Theta) \quad (10)$$

通过求解广义概率密度演化方程, 可最终得到

*基金项目: 国家自然科学基金项目(11172210)和上海市曙光计划资助。

作者简介: 陈建兵(1975-), 男, 博士, 特聘研究员, 博士生导师, 主要从事随机动力学与控制及结构可靠性理论研究。电话: 021-65981505, Email: chenjb@tongji.edu.cn.

状态分量 Y_j 的概率密度函数, 即

$$p_{Y_j}(y_j, t) = \int p_{Y_{\mathbf{e}}}(y, \mathbf{e}, t) d\mathbf{e} \quad (11)$$

至此, 基于概率守恒原理的随机事件描述, 多维随机动力系统任意状态分量的概率密度函数可通过直接求解一维广义概率密度演化方程获得, 从而克服了求解高维偏微分方程的困难。

2 基于通量等效的概率密度演化方程

从上节可见, 对于随机动力响应分析问题(1), 若激励采用白噪声模型, 则可以将其模型化为 Itô 随机微分方程并导出高维耦合的 FPK 方程。从另一个方面来看, 若激励采用随机函数表达, 则可以通过概率守恒原理的随机事件描述和物理方程的结合导出完全解耦的广义概率密度演化方程。显然, 存在充分利用上述两类方程, 导出一类新的解耦方程的可能性。

事实上, 通过直接从 Itô 随机微分方程(2)出发, 可以获得高维系统在各个方向的概率通量

$$J_j(\mathbf{y}, t) = p(\mathbf{y}, t) A_j(\mathbf{y}, t) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sigma_{ij} \frac{\partial p(\mathbf{y}, t)}{\partial y_i} \quad (12)$$

进而, 根据概率守恒原理的通量形式, 可得

$$\frac{\partial p(\mathbf{y}, t)}{\partial t} = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial J_j(\mathbf{y}, t)}{\partial y_j} \quad (13)$$

此即经典的 FPK 方程。

进一步, 考虑对方程(13)两边同时关于 $y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n$ 积分, 可得如下一维偏微分方程

$$\frac{\partial p_{Y_j}(y_j, t)}{\partial t} = - \frac{\partial J_{\text{diff}}(y_j, t)}{\partial y_j} + \frac{1}{2} \sigma_{jj} \frac{\partial^2 p_{Y_j}(y_j, t)}{\partial y_j^2} \quad (14)$$

其中

$$J_{\text{diff}}(y_j, t) = \int A_j(\mathbf{y}, t) p(\mathbf{y}, t) dy_1 \dots dy_{j-1} dy_{j+1} \dots dy_n \quad (15)$$

为漂移项对通量的贡献。

我们注意到, 方程(14)是一个一维偏微分方程, 但是, 对通量 $J_{\text{diff}}(y_j, t)$ 的求解却耦合了 $A_j(\mathbf{y}, t)$ 与 $p(\mathbf{y}, t)$ 构成的高维积分。因而, 如何避开此高维

积分获得 $J_{\text{diff}}(y_j, t)$ 的基本信息, 成为问题的核心。

事实上, 这一步骤可以利用广义概率密度演化方程的解答构造等价通量实现。此时,

$$J_{\text{diff}}^m(y_j, t) = \int_{\Omega_{\mathbf{e}}} \left[\dot{Y}_j(\mathbf{e}, t) - \sum_{k=1}^r B_k \xi_k(\mathbf{e}, t) \right] p_{Y_{\mathbf{e}}}(y_j, \mathbf{e}, t) d\mathbf{e} \quad (16)$$

式中, $p_{Y_{\mathbf{e}}}(y_j, \mathbf{e}, t)$ 为广义概率密度演化方程求解的结果。至此, 式(14)变为

$$\frac{\partial p_{Y_j}(y_j, t)}{\partial t} = - \frac{\partial J_{\text{diff}}^m(y_j, t)}{\partial y_j} + \frac{1}{2} \sigma_{jj} \frac{\partial^2 p_{Y_j}(y_j, t)}{\partial y_j^2} \quad (17)$$

该式即为基于通量等效的概率密度演化方程。

与 FPK 方程不同的是, $J_{\text{diff}}^m(y_j, t)$ 的数值解可通过式(16)获得, 故式(17)为一维偏微分方程, 可通过有限差分法方便地求解。

3 分析实例

基于通量等效的概率密度演化方程在随机动力系统响应分析中具有广阔的应用前景。考察一个 9 层层间剪切型结构(图 1)在一维高斯白噪声激励下的线性随机响应分析问题。结构系统参数均为确定性量, 各层质量分别为(3.442, 3.278, 3.056, 2.756, 2.739, 2.739, 2.739, 2.739, 2.692) $\times 10^5$ kg, 各层层间侧移刚度分别为(0.89, 0.96, 1.85, 1.92, 1.60, 1.60, 1.62, 1.63, 1.47) $\times 10^5$ kN/m。阻尼模型采用 Rayleigh 阻尼, 即 $\mathbf{C} = a\mathbf{M} + b\mathbf{K}$, 文中取 $a = 0.0086$, $b = 0.2249$ 。考虑系统激励为一维白噪声, 相应的维纳过程方差为 $D = 1$, 荷载影响矩阵 $\Gamma = [1, 1, \dots, 1]_{9 \times 1}^T \times 10^4$ 。

上述结构系统的状态方程形式如式(10), 该式在 $\mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ 条件下的随机积分解答为

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Y}_0 e^{\mathbf{A}(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{B} d\mathbf{W}(t) \quad (18)$$

其中 $\mathbf{W}(t)$ 为维纳过程。

该系统对应的 FPK 方程为式(5), 此时, FPK 方程具有解析解^[7]

$$p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}, t) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left[\mathbf{C}_Y(t) \right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} [\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_Y(t)]^T \mathbf{C}_Y^{-1}(t) [\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_Y(t)] \right] \quad (19)$$

即高斯激励下响应 \mathbf{Y} 的联合概率分布服从多维正态分布(对于该系统, 维数 $n = 18$), 其均值和相关函数矩阵可通过对式(18)求解获得, 即有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_Y(t) &= \mathbf{y}_0 e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \\ \mathbf{C}_Y(t) &= \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{B} \mathbf{D} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(t-t_0)} dt \end{aligned} \quad (20)$$

据多维正态分布的性质可知, 随机过程 $\mathbf{Y}(t)$ 的任一分量满足

$$Y_j \sim N(\mu_j, c_{jj}), j = 1, 2, \dots, n \quad (21)$$

与广义概率密度演化方程一样, 基于通量等效的概率密度演化方程能够直接给出任意所需结构响应量的概率密度函数及其演化过程, 这里仅以上述结构的顶层速度响应为例进行简单示意。为了便于比较, 文中亦列出了直接采用广义概率密度演化方程(PDEM)的数值结果和由式(21)确定的解析解结果。图 2 为结构顶层速度响应的均值和标准差函数, 图 3 是典型时刻的概率密度函数, 图 4 是概率密度函数随时间的变化, 图 5 是等概率密度线。图中可见, 基于通量等效的概率密度演化方程与解析解吻合较好, 且较直接采用 PDEM 的数值结果更为光滑。

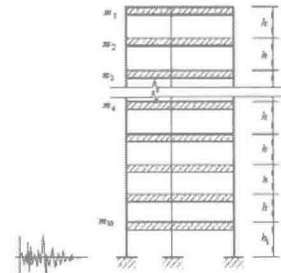


图 1 9 层层间剪切结构
Fig.1 The 9-story floor shear frame

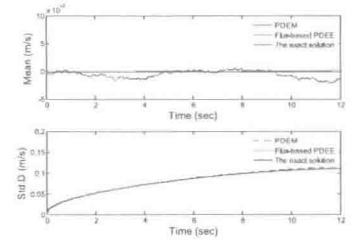


图 2 顶层速度均值与标准差
Fig.2 Mean and standard deviation of the top velocity

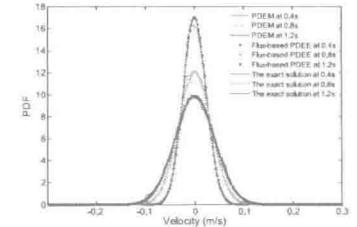


图 3 典型时刻的概率密度函数
Fig.3 The PDF at certain time instants

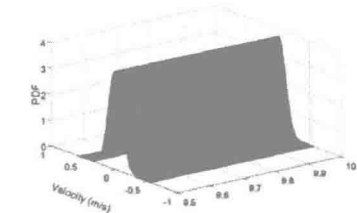


图 4 概率密度演化曲面
Fig.4 The PDF surface varying with time

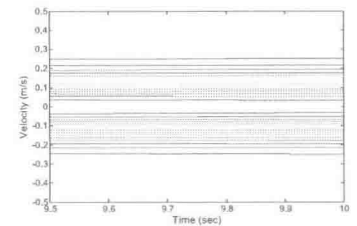


图 5 等概率密度线
Fig.5 The contour of the surface

4 结论

在土木、海洋、航空航天等工程领域中, 随机动力系统响应分析受到广泛关注。通过对结构系统中不同来源的随机性进行统一处理, 并结合解耦的物理方程和概率守恒原理, 可得到广义概率密度演化方程。本文进一步结合广义概率密度演化方程, 构造了基于通量等效的一维概率密度演化方程, 从而实现了加性白噪声下 FPK 方程的解耦降维。与解析解的对比表明, 这一方程具有较高精度。类似的思想有望推广到乘性白噪声及非平稳激励的情况中去, 为高维非线性系统的求解提供富有希望的新途径。

参考文献

- [1] Wen YK. Reliability and performance-based design[J]. Structural Safety, 2001, 23(4): 407-428.
- [2] Vanmarcke EH. Random Fields: Analysis and Synthesis (2nd edition) [M]. World Scientific, 2010.
- [3] Li J, Yan Q, Chen JB. Stochastic modeling of engineering dynamic excitations for stochastic dynamics of structures[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2012, 27(1): 19-28.
- [4] Lutes LD, Sarkani S. Random Vibrations: Analysis of

Structural and Mechanical Systems [M]. Elsevier, Amsterdam, 2004.

- [5] Zhu W Q. Nonlinear stochastic dynamics and control in Hamiltonian formulation[J]. Applied Mechanics Reviews, 2006, 59: 230-248.
- [6] 李杰, 陈建兵. 随机动力系统下的概率密度演化方程及其研究进展[J]. 力学进展, 2010, 40(2): 170-188.
- [7] Li J, Chen JB. Stochastic dynamics of structures[M]. Singapore: John Wiley & Sons, 2009.
- [8] Lasota A, Mackey M C. Chaos, fractals, and noise: stochastic aspects of dynamics (2nd edition)[M]. New York: Springer-Verlag, 1994.
- [9] Naess A, Moe V. Efficient path integral methods for nonlinear dynamics systems[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2000, 15(2): 221-231.
- [10] Li J, Chen J B. The principle of preservation of probability and the generalized density evolution equation[J]. Structural Safety, 2008, 30: 65-77.
- [11] Fung YC. A First Course in Continuum Mechanics [M]. Prentice-Hall, Inc., 1994.
- [12] Chen JB, Sun WL, Li J, Xu J. Stochastic harmonic function representation of stochastic process. Journal of Applied Mechanics[J], 2013, 80(1), 011001-1-11.

宽带噪声激励下含分数阶导数的 ver de Pol-Duffing 振子的首次穿越破坏*

陈林聪¹, 李海锋¹, 朱位秋²

(1. 华侨大学土木工程学院, 福建 厦门 361021; 2. 浙江大学力学系, 浙江 杭州 310027)

摘要: 研究宽带噪声激励下含分数阶导数 ver de Pol-Duffing 振子的首次穿越破坏。应用广义谐波平衡技术, 将分数阶导数表示的回复力分解为等效拟线性阻尼力和拟线性回复力, 得到不含分数阶导数的等效非线性随机系统。应用随机平均法, 等效非线性随机系统近似为一维扩散过程。然后, 建立并求解相应的后向 Kolmogorov 方程, 得到系统的条件可靠性函数和平均首次穿越时间。通过蒙特卡罗模拟法验证了所有解析解的正确性。

关键词: 分数阶导数; 首次穿越破坏; 随机平均法; ver de Pol-Duffing 振子; 宽带噪声

First passage failure of ver de Pol-Duffing oscillator with fractional derivative under wide-band noise excitations

CHEN Lincong¹, LI Haifeng¹, ZHU Weiqiu²

(1. College of Civil Engineering, Huaqiao University, 361021, Xiamen, Fujian, China;

2. Department of Mechanics, Zhejiang University, Hangzhou, Zhejiang, 310027, China)

Abstract: The first passage failure of ver de Pol-Duffing oscillator with fractional derivative under wide-band noise excitations is investigated in this paper. The restoring force described by a fractional derivative is separated into the equivalent quasi-linear dissipative force and quasi-linear restoring force by using the generalized harmonic balance technique, which yields an equivalent nonlinear stochastic system without fractional derivative. By using the stochastic averaging method, the equivalent nonlinear stochastic system is approximated as one-dimensional diffusive process. The backward Kolmogorov equation associated with the averaged equation are then established and solved, which could yield the conditional reliability function and mean first passage time of system. All analytical results are validated by those from the Monte Carlo simulation of original system.

Key words: fractional derivative; first passage failure; stochastic averaging method; ver de Pol-Duffing oscillator; wide-band noise

近 30 年来, 含分数阶导数动力学系统的研究一直受到诸多学者的关注, 但绝大多数仅限于确定性系统的研究。对随机系统的研究较少。已有的成果, 或仅关注特定的分数阶数, 或仅将分数阶导数表示的回复力简单的看作一类特殊的阻尼力。如 Spanos 和 Zeldin^[1]在频域中得到了高斯白噪声激励下阻尼用分数阶导数且分数阶数为 1/2 表示的线性振子的随机响应。Agrawal^[2]利用特征值展开和 Laplace 变换卷积积分的办法获得了含分数阶导数型阻尼的

单自由度线性振子的随机响应。Huang 和 Jin^[3]发展了高斯白噪声激励下含分数阶导数型阻尼的单自由度强非线性系统的随机平均法, 研究了单自由度非线性系统的随机响应和概率为 1 渐进稳定性。Chen 与 Zhu^[4]应用随机平均法进一步研究了有色噪声激励下含分数阶导数型阻尼的单自由度强非线性系统的首次穿越问题。最近, Spanos 与 Evangelatos^[5]用随机模拟和统计线性化的方法研究了含分数阶导数型阻尼的 Duffing 振子的随机响应。

*基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10932009, 11002059)、教育部博士点新教师基金项目(20103501120003)、福建省自然科学基金项目(2010J05006)、中央高校基本业务费(No.JB-SJ1010)

作者简介: 陈林聪 (1981-), 男, 博士, 副教授, 主要从事非线性随机振动与控制研究。电话: 15880294730, Email: chen000241@126.com

Di Paola 等人^[6]获得了线性粘弹性系统的稳态及非稳态随机响应。显然,上述研究是不够充分的,在某些条件下甚至会得到错误的结论。这是由于分数阶导数表示的回复力同时影响系统的阻尼和刚度。

在另一方面,研究随机动力学系统的首次穿越问题具有重要的理论与实际意义,同时又是随机动力学中较难解决的问题之一。迄今为止,对于具有实际意义的工程系统,只有不同复杂程度及精度的近似解。一类是泊松模型及其修正,此模型较简单,但误差较大。另一类是时齐扩散过程模型,这类方法较为精确,却更复杂,尤其较难获得后向 Kolmogorov 方程或 Pontryagin 方程的精确解析解。此外,现实中大多数系统受的是非高斯白噪声随机激励,不能直接应用首次穿越扩散过程理论。然而,应用随机平均法不仅可使所研究的系统维数大为降低,还可在一定条件下用扩散过程来近似系统对非高斯白噪声激励的响应。因此,联合使用随机平均法和首次穿越扩散过程理论是近几十年求解首次穿越问题的主要途径^[6-10]。

本文研究宽带噪声激励下含分数阶导数的 ver de Pol-Duffing 振子的首次穿越问题。应用广义谐波平衡技术将分数阶导数表示的回复力解耦为幅值依赖的拟线性阻尼力和拟线性回复力,得到不含分数阶导数的等效非线性随机系统。对等效非线性随机系统联合使用随机平均法和首次穿越扩散过程理论,得到原系统近似的条件可靠性函数及平均首次穿越时间。通过与原方程蒙特卡罗模拟结果比较,验证解析结果的正确性。

1 等效非线性随机系统

考虑弱宽带噪声激励下含分数阶导数的 ver de Pol-Duffing 振子,其运动方程为

$$\ddot{X} + (\beta_0 + \beta_1 X^2)\dot{X} + \omega_0^2 X + \alpha_0 X^3 + \chi D^\alpha(X) = W_1(t) + \chi W_2(t) \quad (1)$$

其中 $\omega_0, \beta_0, \beta_1, \alpha_0$ 和 χ 为常数; $D^\alpha(X)$ 为 Riemann-Liouville 定义下的分数阶导数

$$D^\alpha X(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(t-\tau)}{\tau^\alpha} d\tau, 0 < \alpha < 1 \quad (2)$$

W_1, W_2 分别为相互独立的宽带噪声激励,对应的有理谱密度为

$$S_i(\omega) = \frac{D_i}{\pi} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_i^2)^2 + 4\xi_i^2 \omega^2 \omega_i^2} \quad i=1,2 \quad (3)$$

$\beta_0, \beta_1, \chi, D_1$ 均为小量。

由于分数阶导数表示的回复力同时影响系统的阻尼和刚度。应用广义谐波平衡技术, $\chi D^\alpha X(t)$ 可解耦为幅值依赖的等效拟线性阻尼力和拟线性回复力

$$\chi D^\alpha X(t) = C(A)\dot{X}(t) + K(A)X(t) \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} C(A) &= -\frac{\chi}{\pi A \omega(A)} \int_0^{2\pi} D^\alpha(A \cos \Theta) \sin \Theta d\Theta \\ &= \chi b_0^{\alpha-2}(A)[b_0(A) + b_2(A)/2] \sin(\frac{\alpha\pi}{2}) \\ K(A) &= \frac{\chi}{\pi A} \int_0^{2\pi} D^\alpha(A \cos \Theta) \cos \Theta d\Theta \\ &= \chi b_0^{\alpha-1}(A)[b_0(A) - b_2(A)/2] \cos(\frac{\alpha\pi}{2}) \end{aligned} \quad (5)$$

详细推导过程见附录。

因此,与系统(1)等效的非线性随机系统为

$$\ddot{Y}(t) + (\beta + \beta_1 Y^2)\dot{Y}(t) + \omega_1^2 Y(t) + \alpha_0 Y^3(t) = W_1(t) + YW_2(t) \quad (6)$$

其中

$$\beta = \beta_0 + \chi b_0^{\alpha-2}(b_0 + b_2/2) \sin(\alpha\pi/2) \quad (7a)$$

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 + \chi b_0^{\alpha-1}(b_0 - b_2/2) \cos(\alpha\pi/2) \quad (7b)$$

与系统(6)相应的能量为

$$\begin{aligned} H &= \dot{Y}^2/2 + \omega_1^2 Y^2/2 + \alpha_0 Y^4/4 \\ &= \omega_1^2(A)A^2/2 + \alpha_0 A^4/4 = V(A) \end{aligned} \quad (8)$$

2 平均伊藤方程

系统(5)的解可看作其对应保守系统

$$\dot{Y}(t) + \omega_1^2 Y(t) + \alpha_0 Y^3(t) = 0 \quad (9)$$

的解在相平面上的随机扩散。因此,可假设系统的解为

$$\begin{aligned} Y_1 &= Y(t) = A \cos \Theta(t) \\ Y_2 &= \dot{Y}(t) = -A\nu(A, \Theta) \sin \Theta(t) \end{aligned} \quad (10)$$

其中

$$\Theta(t) = \Phi(t) + \Gamma(t)$$

$$\begin{aligned} \nu(A, \Theta) &= \sqrt{\frac{2[V(A) - V(A \cos \Theta)]}{A^2 \sin^2 \Theta}} \\ &= [(\omega_1^2 + 3\alpha_0 A^2/4)(1 + \eta \cos 2\Theta)]^{1/2} \\ \eta &= \alpha_0 A^2 / (4\omega_1^2 + 3\alpha_0 A^2) \leq 1/3 \end{aligned} \quad (11)$$

将 $\nu(A, \Theta)$ 展开为 Fourier 级数, 得

$$\nu(A, \Theta) = b_0(A) + \sum_{r=1}^{\infty} b_r(A) \cos r\Theta \quad (12)$$

可近似为

$$\nu(A, \Theta) = \sum_{r=0}^3 b_{2r}(A) \cos 2r\Theta \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} b_0 &= (\omega_1^2 + 3\alpha_0 A^2/4)^{1/2} (1 - \eta^2/16) \\ b_2 &= (\omega_1^2 + 3\alpha_0 A^2/4)^{1/2} (\eta^2/2 + 3\eta^3/64) \\ b_4 &= (\omega_1^2 + 3\alpha_0 A^2/4)^{1/2} (-\eta^2/16) \\ b_6 &= (\omega_1^2 + 3\alpha_0 A^2/4)^{1/2} (\eta^3/64) \end{aligned} \quad (14)$$

且误差不超过 0.03%。显然, 结合方程(7b), 通过数值迭代可求得 $\omega_1(A)$ 。

将式(10)看作 X_1, X_2 到 A, Γ 的广义 van del Pol 变换, 可得到关于 A, Γ 的随机微分方程

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= F_1(A, \Theta) + \sum_{i=1}^2 G_{1i}(A, \Theta) W_i(t) \\ \frac{d\Gamma}{dt} &= F_2(A, \Theta) + \sum_{i=1}^2 G_{2i}(A, \Theta) W_i(t) \end{aligned} \quad (15)$$

式中

$$\begin{aligned} F_1 &= -\frac{A\nu^2(A, \Theta)[\beta + \beta_1 A^2 \cos^2 \Theta] \sin^2 \Theta}{\omega_1^2(A) + \alpha A^2} \\ F_2 &= \frac{\nu(A, \Theta)[\beta + \beta_1 A^2 \cos^2 \Theta] \sin \Theta \cos \Theta}{\omega_1^2(A) + \alpha A^2} \\ G_{11} &= \frac{-\nu \sin \Theta}{(\omega_1^2 + \alpha_0 A^2)}; G_{12} = \frac{-A\nu \sin \Theta \cos \Theta}{(\omega_1^2 + \alpha_0 A^2)} \\ G_{21} &= \frac{-\nu \cos \Theta}{A(\omega_1^2 + \alpha_0 A^2)}; G_{22} = \frac{-\nu \cos^2 \Theta}{(\omega_1^2 + \alpha_0 A^2)} \end{aligned} \quad (16)$$

变量 $A(t)$ 和 $\Gamma(t)$ 是慢变随机过程, 而变量 $\Theta(t)$ 是快变随机过程。应用随机平均法和对 $\Theta(t)$ 进行确定性平均, 可得关于 $A(t)$ 和 $\Gamma(t)$ 的平均伊藤方程。鉴于关于 $A(t)$ 的平均伊藤方程中不含 $\Gamma(t)$, 因此, 极限过程 $A(t)$ 弱收敛于一维扩散过程, 相应的平均伊藤方程为

$$dA = \bar{m}(A)dt + \bar{\sigma}(A)dB(t) \quad (17)$$

这里

$$\begin{aligned} \bar{m} &= \langle F_1 \rangle_\Theta + \left\langle \int_{-\infty}^0 \left(\frac{\partial G_{1k}}{\partial A} \right)_t G_{1l}|_{l+\tau} R_{kl}(\tau) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial G_{1k}}{\partial \Theta} \right|_t G_{2l}|_{l+\tau} R_{kl}(\tau) d\tau \rangle_\Theta \\ \bar{\sigma}^2(A) &= \left\langle \int_{-\infty}^0 G_{1k}|_t G_{1l}|_{l+\tau} R_{kl}(\tau) d\tau \right\rangle_\Theta \end{aligned} \quad (18)$$

其中 $R_{kl}(\tau)$ 表示系统激励的相关函数。

现将 G_{ik} 展开成 Fourier 级数

$$\begin{aligned} G_{1k} &= G_{1k0}(A) + \sum_{r=1}^{\infty} [G_{1kr}^{(c)}(A) \cos r\Theta \\ &\quad + G_{1kr}^{(s)}(A) \sin r\Theta] \end{aligned} \quad (19)$$

并代入(18), 完成对 τ 的积分与对 Θ 的平均后, 得

$$\begin{aligned} \bar{m}_1 &= -\frac{\beta(4\omega_1^2 A + 2.5\alpha_0 A^3)}{8(\omega_1^2 + \alpha_0 A^2)} \\ &\quad - \frac{\beta_1(\omega_1^2 A^3 + 0.75\alpha_0 A^5)}{8(\omega_1^2 + \alpha_0 A^2)} \\ &\quad - \frac{\pi A}{32(\omega_1^2 + \alpha_0 A^2)} \left\{ (2b_0 - b_4) \right. \\ &\quad \times S_2(2\omega) \frac{d}{dA} \left[\frac{A(2b_0 - b_4)}{\omega_1^2 + \alpha_0 A^2} \right] \\ &\quad + (b_2 - b_6) S_2(4\omega) \frac{d}{dA} \left[\frac{A(b_2 - b_6)}{\omega_1^2 + \alpha_0 A^2} \right] \\ &\quad + b_4 S_2(6\omega) \frac{d}{dA} \left[\frac{Ab_4}{\omega_1^2 + \alpha_0 A^2} \right] \\ &\quad \left. + b_6 S_2(8\omega) \frac{d}{dA} \left[\frac{Ab_6}{\omega_1^2 + \alpha_0 A^2} \right] \right\} \\ &\quad + \frac{\pi A}{16(\omega_1^2 + \alpha_0 A^2)^2} \\ &\quad \times \left\{ (2b_0 - b_4)(2b_0 + 2b_2 + b_4) S_2(2\omega) \right. \\ &\quad + 2(b_2 - b_6)(b_2 + 2b_4 + b_6) S_2(4\omega) \\ &\quad + 3b_4(b_4 + 2b_6) S_2(6\omega) + 4b_6^2 S_2(8\omega) \left. \right\} \\ &\quad + \frac{\pi}{8(\omega_1^2 + \alpha_0 A^2)} \\ &\quad \times \left\{ (2b_0 - b_2) S_1(\omega) \frac{d}{dA} \left[\frac{2b_0 - b_2}{\omega_1^2 + \alpha_0 A^2} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (b_2 - b_4) S_1(3\omega) \frac{d}{dA} \left[\frac{b_2 - b_4}{\omega_1^2 + \alpha_0 A^2} \right] \\
 & + (b_4 - b_6) S_1(5\omega) \frac{d}{dA} \left[\frac{b_4 - b_6}{\omega_1^2 + \alpha_0 A^2} \right] \\
 & + b_6 S_1(7\omega) \frac{d}{dA} \left[\frac{b_6}{\omega_1^2 + \alpha_0 A^2} \right] \left. \right\} \\
 & + \frac{\pi}{8A(\omega_1^2 + \alpha_0 A^2)^2} \\
 & \times \left\{ (4b_0^2 - b_2^2) S_1(\omega) + 3(b_2^2 - b_4^2) S_1(3\omega) \right. \\
 & \left. + 5(b_4^2 - b_6^2) S_1(5\omega) + 7b_6^2 S_1(7\omega) \right\} \\
 & \bar{\sigma}^2 = \frac{\pi A^2}{16(\omega_1^2 + \alpha_0 A^2)^2} \\
 & \times \left\{ (2b_0 - b_4)^2 S_2(2\omega) + (b_2 - b_6)^2 \right. \\
 & \times S_2(4\omega) + b_4^2 S_2(6\omega) + b_6^2 S_2(8\omega) \left. \right\} \\
 & + \frac{\pi}{4(\omega_1^2 + \alpha_0 A^2)^2} \\
 & \times \left\{ (2b_0 - b_2)^2 S_1(\omega) + (b_2 - b_4)^2 S_1(3\omega) \right. \\
 & \left. + (b_4 - b_6)^2 S_1(5\omega) + b_6^2 S_1(7\omega) \right\} \quad (20)
 \end{aligned}$$

应用式(8)及伊藤微分法则, 可得关于 H 的平均伊藤方程

$$dH = \bar{m}_1(H)dt + \bar{\sigma}_1(H)dB(t) \quad (21)$$

其中

$$\begin{aligned}
 \bar{m}_1 &= [\bar{m}dH/dA + \frac{\bar{\sigma}^2 d^2H/dA^2}{2}]_{A=V^{-1}(H)} \\
 \bar{\sigma}_1^2 &= \bar{\sigma}^2 [dH/dA]^2 \Big|_{A=V^{-1}(H)} \quad (22)
 \end{aligned}$$

3 首次穿越扩散理论

假设 $H(t)$ 可在 $[0, \infty)$ 上变化, $(0, H_c)$ 为安全域 Ω_s 。一旦 $H(t)$ 达到或超过 H_c , 系统就损坏。现定义条件可靠性函数为 $R(t|H_0) = P\{[H(t) \in \Omega_s, \tau \in (0, t)] | H_0 \in \Omega_s\}$ 。它满足如下的后向 Kolmogorov 方程

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \bar{m}_1(H_0) \frac{\partial R}{\partial H_0} + \frac{1}{2} \bar{\sigma}_1^2(H_0) \frac{\partial^2 R}{\partial H_0^2} \quad (23)$$

其中漂移系数与扩散系数分别由式(22)以 H_0 代替 H 确定。初始条件为

$$R(0|H_0) = 1, H_0 \in \Omega_s \quad (24)$$

安全域有两个边界条件, 右边边界为吸收边界, 即

$$R(t|H_c) = 0 \quad (25)$$

左边为反射边界, $R(t|H_0)$ 在 $H=0$ 上为有限值, 对应的边界条件为

$$R(t|0) = \text{finite} \quad (26)$$

考虑到 $\bar{m}_1(0) \neq 0; \bar{\sigma}_1^2(0) = 0, H=0$ 为流动点。定性边界条件(26)可用以下定量边界代替:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \bar{m}_1(0) \frac{\partial R}{\partial H_0} \quad (27)$$

数值求解方程(23)-(25)及(27)可获得条件可靠性函数。然后再按下式:

$$\mu(H_0) = \int_0^\infty \tau p(\tau|H_0) d\tau \quad (28)$$

可得系统的平均首次穿越时间。

4 数值结果

情形一: 无特别说明, 取系统参数为 $\beta_0=0.05, \beta_1=0.05, \omega_0=1.0, \alpha_0=1, \chi=0.1, H_0=0, H_c=0.001, \omega_f=10.0, \xi_f=0.3, D_f=1.0$; 用实线表示近似解析解, 符号(■, ●, ▼)表示对原方程(1)直接 Monte Carlo 数字模拟的结果。图1与图2分别给出了不同分数阶数 α 时条件可靠性函数和平均首次穿越时间。

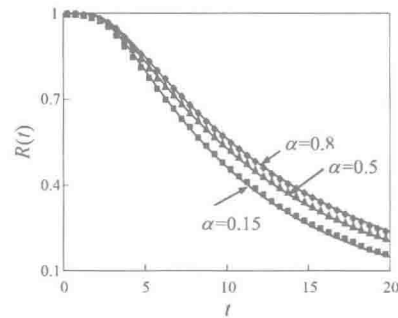


图1 不同分数阶数时条件可靠性函数
Fig.1 The conditional reliability function for the different fractional derivative order

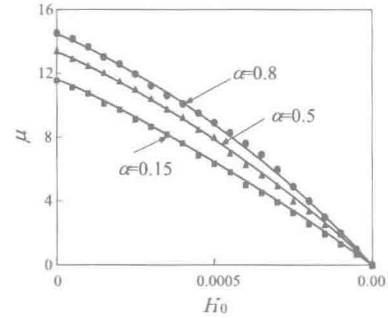


图2 不同分数阶数时平均首次穿越时间
Fig.2 The conditional reliability function for the different fractional derivative order

由图可知, 近似解析解与原方程 Monte Carlo 数字模拟结果吻合的非常好; 系统的可靠性增加随分数阶数的增加而提高。

情形二: 无特别说明, 取系统参数为 $\beta_0=0.0, \beta_1=0.0, \omega_0=1.0, \alpha_0=1, \chi=0.5, H_0=0, H_c=0.001, \omega_f=9.0, \xi_f=0.5, D_f=1.0$ 。图3与图4给出了不同分数阶数 α 时条件可靠性函数, 其中实线表示由本文方法获得的近似解析解, 符号(■, ●, ▼)表示对原方程(1)直接 Monte Carlo 数字模拟的结果, 虚线表示根据文献[22]获得的解析解。

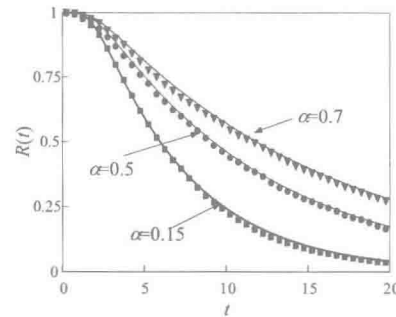


图3 不同分数阶数时条件可靠性函数
Fig.3 The conditional reliability function for the different fractional derivative order

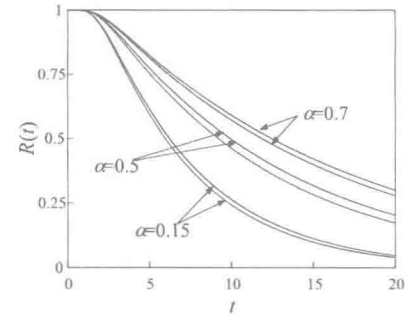


图4 不同分数阶数时条件可靠性函数
Fig.4 The conditional reliability function for the different fractional derivative order

由图3与图4知, 实线表示的解析解与符号表示的结果吻合的较好, 而与虚线表示的解析相差较远。因此, 仅将分数阶数表示的回复力简单的看作一类特殊的阻尼力是不合理的。

5 结语

本文研究了宽带噪声激励下含分数阶导数的 van del Pol-Duffing 振子的首次穿越问题。应用广义谐波平衡技术将分数阶数表示的回复力解耦为幅值依赖的拟线性耗散力和拟线性回复力, 得到不含分数阶导数的等效非线性随机系统。通过随机平均, 导出等效非线性随机系统的平均伊藤方程。建立并求解相应的后向 Kolmogorov 方程, 得到系统的近似条件可靠性函数和平均首次穿越时间。数值结果表明近似解析解与原方程 Monte Carlo 模拟结果吻合的非常好, 系统的可靠性随分数阶数的增加而提高, 并证明不能简单地分数阶数表示的回复力看作一类特殊的阻尼力。

参考文献

- [1] Spanos PD, Zeldin BA, Random vibration of systems with frequency-dependent parameters or fractional derivatives[J]. ASCE Journal of Engineering Mechanics 1997, 123:290-292.
- [2] Agrawal OP, Analytical solution for stochastic response of a fractionally damped beam [J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2004, 126:561-566.